R
≠ 2557

1
TOMUL 41
ian. — febr.
1982

1981 SEP 1 01

258

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor şef*

Membrii :

Acad. **I. ANTON**
Acad. **ŞT. BĂLAN**,
Acad. **D. DUMITRESCU**,
Acad. **C. IACOB**,
Acad. **D. MATEESCU**,
Acad. **O. ONICESCU**,
Acad. **R. VOINEA**,
Prof. **C. AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **GH. BUZDUGAN**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **R. C. BOGDAN**,
Prof. **DAN PAVELESCU**
Prof. **R. PRIŞCU**,
Dr. ing. **V. VISARION**,
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL**,
Prof. **I. CRIŞAN**,
Prof. **CR. PELECUDI**,
Prof. **TR. DEMIAN**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie*,
Dr. ing. **C. TEODOSIU**, *secretar de redacţie*,

Colegiul de redacţie

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor şef*

Membrii :

Acad. **I. ANTON**,
Acad. **D. MATEESCU**,
Ing. **I. CRIŞAN**,
Dr. ing. **D. PANTAZOPOL**,
Prof. **TR. DEMIAN**,
Prof. **T. OROVEANU**, *secretar de redacţie*,
Dr. ing. **C. TEODOSIU**, *secretar de redacţie*.

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste) 79515, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O. Box 136—137, telex 11227, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi ori ce corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 41, nr. 1 ianuarie-februarie 1982

1989

SUMAR

STUDII

I. SETEANU, M. ERHAN, Tranzitul undelor de viitură în albii deschise cu infiltrații laterale 3

FLORICA GLOD, Mișcarea bidimensională a unui fluid ideal de adîncime finită, datorită unei perturbații produse la suprafața sa 17

MIHAIL POPESCU, Calculul rezonanței hidraulice la uzine hidroelectrice. I 23

AL. MARINESCU, Intrarea optimă tridimensională ricoșantă cu încălzire minimă a vehiculului 39

GABRIEL D. POPA, Placă încastrată pe contur, rigidizată cu grinzi prinse continuu și dispuse pe o direcție 53

GHEORGHE MOMANU, Calculul plăcilor circulare rezemate pe medii elastice 83

T. SIRETEANU, S. PĂRĂIAN, I. ROȘU, Metode spectrale în dinamica autovehiculelor 95

N. TRUICĂ, Un algoritm pentru analiza și sinteza pe calculator a parametrilor geometrici ai roților-față cu suspensie independentă de la automobile. Analiza parametrilor roților-față de la Dacia 1300 109

CH. VASILIU, TR. CANȚĂ, Influența eficacității frînelor asupra parametrilor capacității maxime de frînare a autovehiculelor 125

MIRCEA D. PASCOVICI, Studiul filmului de lubrifiant extrudat în condiții elastohidrodinamice 139

A. TUDOR, Asupra distribuției temperaturii cauzate de frecare în dantura roților dințate lubrefiate cu uleiuri minerale aditivate 147

GEORGE DOBRE, Cu privire la influența unor elemente de geometrie asupra rigidității danturii în cazul angrenajelor paralele cilindrice cu dinți drepți în evolventă. . . 157

RECENZII 167

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

Egyetemi Könyvtár
1677/1982

TRANZITUL UNDELOR DE VIITURĂ ÎN ALBII DESCHISE CU INFILTRAȚII LATERALE

de I. SETEANU, M. ERHAN

Institutul politehnic București

Se analizează curgerea unidimensională nestaționară cu suprafață liberă în albii naturale cu debit semnificativ de infiltrație către acviferul adiacent. Folosind sistemul de ecuații al lui Saint-Venant pentru curgerea cu suprafață liberă și modelul lui Boussinesq pentru infiltrația nepermanentă în acvifer, se rezolvă cu algoritmul dublului parcurs problema în diferențe finite (schemă implicită) de cuplaj a celor două procese de curgere, prin intermediul debitului specific de infiltrație.

Se prezintă rezultatele obținute cu un program de calcul în limbaj FORTRAN IV pentru un caz concret.

1. INTRODUCERE

În lucrare se analizează curgerea unidimensională nestaționară cu suprafață liberă în albii naturale, în cazul în care debitul de infiltrație prin maluri către acviferul adiacent este semnificativ. Pinder și Sauer [1] au analizat această problemă cu modelul mișcării nestaționare de infiltrație în două dimensiuni, iar Zitta și Wiggert [2] au folosit modelul lui Boussinesq pentru un canal dreptunghiular.

În continuare, alegînd drept parametru de cuplaj debitul de infiltrație, se rezolvă cu o schemă numerică implicită (double sweep algorithm) sistemul Saint-Venant pentru mișcarea nepermanentă cu suprafață liberă și ecuația lui Boussinesq pentru infiltrație în acvifer. Condițiile la limită ale tranzitului undei de viitură constau din hidrograful cunoscut în secțiunea amonte și nivelul staționar al suprafeței libere în secțiunea aval a zonei studiate (joncțiunea cu un lac). Pentru curgerea subterană, condițiile la limită constau în existența unui nivel staționar al curbei de depresie la distanță suficient de mare de secțiunea vie a rîului.

Condițiile inițiale ale curgerii cu suprafață liberă sînt nivelele curgerii gradual variate permanente pentru debitul mediu, respectiv pentru analiza infiltrației, un nivel orizontal inițial al curbei de depresie în acvifer.

Schema implicită în diferențe finite pentru mișcarea nepermanentă constă dintr-un sistem liniarizat de iterații succesive pentru un pas de timp dat, cu un set dublu de necunoscute (debitele și nivelele la diferite momente de timp în diferite secțiuni transversale de curgere). Pentru rezolvarea acestui sistem, caracterizat printr-o matrice tridiagonală, se introduce un ansamblu de mărimi de calcul, cu ajutorul cărora se poate genera un algoritm

recursiv de obținere a necunoscutelor principale (algoritmul dublului parcurs). La un moment de timp dat, admițînd că debitul specific de infiltrație în acvifer este cunoscut, se poate determina șirul nivelelor și debitelor în nodurile rețelei spațiale, dispusă în lungul curgerii. Schema de analiză a infiltrației pentru o rețea spațio-temporală, cu nodurile de timp decalate în centrele rețelei anterioare, este echivalentă, în diferențe finite, cu un sistem implicit de ecuații liniare, de asemenea tridiagonal, avînd ca necunoscute cotele curbei de depresie în noduri spațiale dispuse transversal față de albia rîului. Pentru rezolvarea acestui sistem se utilizează din nou algoritmul dublului parcurs, în ipoteza că debitele și nivelele în albie sînt cele determinate în etapa anterioară. Se obține, în cele din urmă, debitul specific de infiltrație, cu ajutorul căruia cele două scheme de calcul (Saint-Venant și Boussinesq) sînt cuplate succesiv.

Se prezintă rezultatele numerice obținute cu un program în limbaj FORTRAN IV elaborat în acest scop.

2. MIȘCAREA NEPERMANENTĂ ÎN ALBII DESCHISE

Mișcarea nepermanentă unidimensională în canale și albii deschise este, în cele mai multe cazuri, cvasiorizontală (de tipul undelor lungi), admițîndu-se o distribuție hidrostatică a presiunii în secțiunea transversală, o epură a vitezei practic uniformă și densitate constantă în aceeași secțiune. Pentru pante mici ale fundului albiei, se poate admite, cu o bună aproximație, că schimbul turbulent de energie și impuls în faza lichidă este modelat printr-o rezistență la curgere, caracterizată de eforturile de forfecare la frontiera stratului limită de fund, opuse vitezei. În aceste condiții, este valabilă relația lui Chézy :

$$V = C\sqrt{RI}, \tag{1}$$

unde V este viteza medie în secțiunea transversală, C reprezintă coeficientul lui Chézy, R este raza hidraulică ($R = S/\chi$), S este aria secțiunii transversale, χ reprezintă perimetrul udat, iar prin I s-a notat panta hidraulică, numeric egală cu panta fundului în curgerea uniformă, dar diferită de aceasta în curgerea gradual variată, datorită neuniformității vitezei în lungul curgerii. Coeficientul lui Chézy se exprimă, de obicei, în funcție de coeficientul n_M de rugozitate al patului albiei, prin formula lui Manning :

$$C = \frac{1}{n_M} R^{1/6}. \tag{2}$$

Pentru un element infinitezimal în faza lichidă, mărginit de două secțiuni transversale verticale (fig. 1), se pot scrie următoarele două ecuații generale ale curgerii nestaționare în albii deschise :

Ecuația dinamică

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha Q^2}{S}\right) + gS\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gQ|Q|}{C^2SR} = 0, \tag{3}$$

în care $Q = SV$ este debitul; V — viteza medie în secțiunea transversală; h — înălțimea suprafeței libere a apei deasupra planului convențional de referință $O-O$; S — aria secțiunii transversale; g — accelerația gravitațională; α — coeficientul de neuniformitate al vitezei în secțiunea trans-

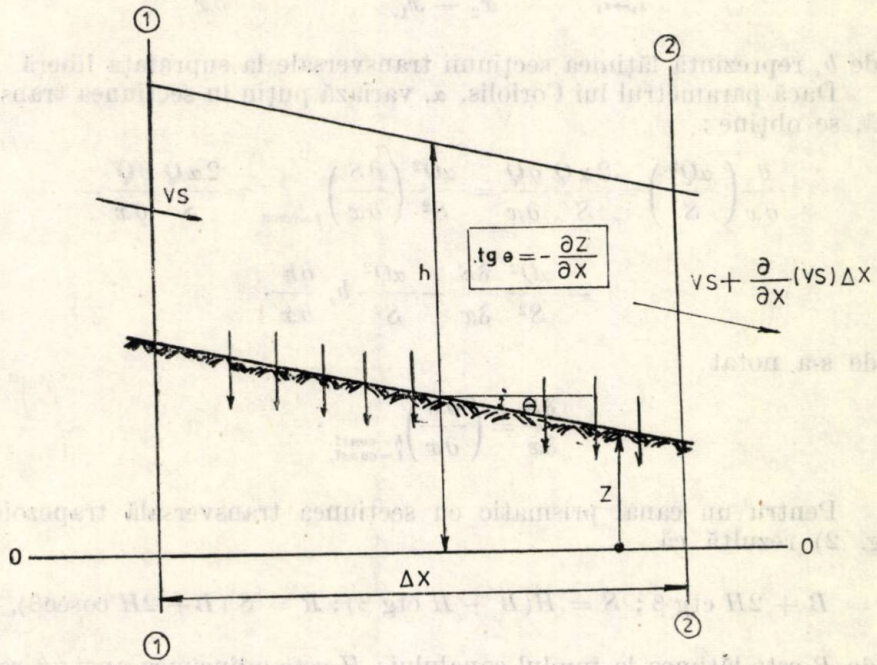


Fig. 1

versală (Coriolis); x — distanța măsurată în lungul curgerii, pornind dintr-o secțiune amonte de referință; t — timpul;

Ecuația de continuitate

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0. \tag{4}$$

Ecuațiile (3), (4) constituie sistemul Saint-Venant pentru curgerea nestaționară în albii deschise, în notații adecvate schemei de calcul propuse în prezenta lucrare.

Evaluarea derivatelor spațiale ale ariei S trebuie să fie efectuate cu o oarecare prudență [3]. Se poate scrie:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)_{x=const.} = \frac{\partial S}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t} = b_s \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{t=const.} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{\substack{h=const.\\ t=const.}} + \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{\substack{x=const.\\ t=const.}} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) =$$

$$= \lim_{x_1 \to x_2} \frac{S(x_2, h) - S(x_1, h)}{x_2 - x_1} + b_s \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{5}$$

unde b_s reprezintă lățimea secțiunii transversale la suprafața liberă.

Dacă parametrul lui Coriolis, α, variază puțin în secțiunea transversală, se obține :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha Q^2}{S}\right) = \frac{2\alpha Q}{S}\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\alpha Q^2}{S^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{t=const.} = \frac{2\alpha Q}{S}\frac{\partial Q}{\partial x} -$$

$$- \frac{\alpha Q^2}{S^2}\frac{\delta S}{\delta x} - \frac{\alpha Q^2}{S^2} b_s \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{6}$$

unde s-a notat

$$\frac{\delta S}{\delta x} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{\substack{h=const.\\ t=const.}}.$$

Pentru un canal prismatic cu secțiunea transversală trapezoidală (fig. 2) rezultă că

$$b_s = B + 2H \operatorname{ctg} \beta\,; \; S = H(B + H \operatorname{ctg} \beta)\,; \; R = S/(B + 2H \operatorname{cosec} \beta), \tag{7}$$

unde B este lățimea la fundul canalului ; H este adîncimea apei ; β reprezintă unghiul de înclinare al taluzului canalului. Cu aceste notații sistemul lui Saint-Venant devine :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2\alpha Q}{S}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\alpha Q^2}{S^2}\frac{\delta S}{\delta x} - \frac{\alpha Q^2}{S^2} b_s \frac{\partial h}{\partial x} + gS\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{gQ|Q|}{C^2 S R} = 0, \tag{8}$$

$$b_s \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0. \tag{9}$$

El este constituit din două ecuații neliniare cu derivate parțiale de tip hiperbolic, avînd ca necunoscute debitul Q și cota h a suprafeței libere față de planul orizontal de referință, iar variabilele independente sînt abscisa x, măsurată în lungul curgerii și timpul t. Rezolvarea analitică a acestui sistem întîmpină dificultăți majore datorită neliniarității și complexității coeficienților ; se impune, în consecință, un procedeu numeric de calcul. În acest scop, se definește o rețea de calcul constînd din puncte în care se calculează alternativ mărimile necunoscute Q și h (fig. 3).

Condiții inițiale și la limită. Pentru a putea să se înceapă calculele este necesar să se indice la momentul $t = 0$ debitele Q_j și cotele h_j în toate

nodurile rețelei. Aceste condiții inițiale se evaluează din studiul curgerii staționare gradual variate pentru un debit Q_0, același în toate secțiunile, cunoscut. Drept condiții la limită se aleg:

— hidrograful $Q(t)$ al undei de viitură în secțiunea amonte de referință;

— nivelul constant h_1 în secțiunea extremă aval, la confluența cu un lac de acumulare de mare capacitate.

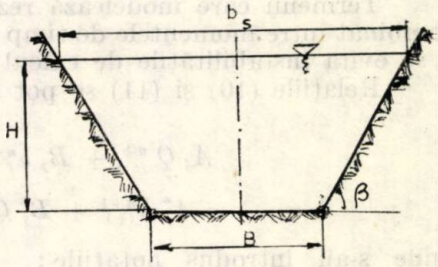


Fig. 2

Schema în diferențe finite. Admițînd că pașii spațiali Δx_j ai schemei de calcul alese sînt egali ($\Delta x_j = \Delta x$), sistemul lui Saint-Venant în forma (8)—(9) se poate aproxima prin următorul sistem în diferențe implicite:

$$\frac{1}{4} L_j^{(0)} \left(\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_{j-1}} + \frac{h_{j+1}^{n} - h_{j-1}^{n}}{\Delta x_{j-1}} \right) + \frac{Q_j^{n+1} - Q_j^n}{\Delta t} -$$

$$- \frac{1}{2} M_j^{(0)} \left(\frac{h_{j+1}^{n+1} - h_{j+1}^{n}}{\Delta t} + \frac{h_{j-1}^{n+1} - h_{j-1}^{n}}{\Delta t} \right) + \frac{g Q_j^{n+1} |Q_j^n|}{(C^2 S R)^{(0)}} + \tag{10}$$

$$+ \left(\alpha \frac{q}{S} \right)_j^{(0)} (Q_j^{n+1} + Q_j^n) - \left(\frac{\alpha Q^2}{S^2} \right)_j^{(0)} \frac{S_{j+1}^{(0)m} - S_{j-1}^{(0)m}}{\Delta x_{j-1}} = 0,$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{Q_{j+1}^{n+1} - Q_{j-1}^{n+1}}{\Delta x_{j-1}} + \frac{Q_{j+1}^{n} - Q_{j-1}^{n}}{\Delta x_{j-1}} \right) + (b_s)_j^{(0)} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} -$$

$$- q_j^{(0)} = 0, \tag{11}$$

unde mărimile L și M au expresiile:

$$L = S - \frac{\alpha Q^2}{S^2} b_s \tag{12}$$

$$M = \frac{2\alpha Q}{S} b_s, \tag{13}$$

iar pasul spațial este $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

În aceste relații, o notație de forma Q_j^n semnifică valoarea debitului Q la momentul de timp $n\Delta t$ în nodul de abscisă x_j al rețelei spațiale. Indicele superior (0) desemnează momentul de timp $\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t$ astfel că, de exem-

plu, $S_{j+1}^{(0)m}$ reprezintă aria secțiunii transversale în nodul x_{j+1} la un moment de timp $(n + 1/2)\Delta t$, dacă se admite că în acest nod spațial (de tip Q) cota apei este egală cu valoarea medie a acesteia în nodurile adiacente de tip h.

Termenii care modelează rezistența la înaintare au fost exprimați combinat între momentele de timp actual, $n\Delta t$, și viitor, $(n + 1)\Delta t$, pentru a se evita instabilitățile de calcul semnalate de diverși autori [4].

Relațiile (10) și (11) se pot aranja în următoarea formă:

$$A_j Q_{j+1}^{n+1} + B_j h_j^{n+1} + C_j Q_{j-1}^{n+1} = D_j , \tag{14}$$

$$A_j^* h_{j+1}^{n+1} + B_j^* Q_j^{n+1} + C_j^* h_{j-1}^{n+1} = D_j^* , \tag{15}$$

unde s-au introdus notațiile:

$$A_j = \frac{1}{4\Delta x_{j-1}} ; \quad A_j^* = \frac{L_j^{(0)}}{4\Delta x_{j-1}} - \frac{M_j^{(0)}}{2\Delta t} ,$$

$$B_j = \frac{(b_s)_j^{(0)}}{\Delta t} ; \quad B_j^* = \frac{1}{\Delta t} + \frac{g|Q_j^n|}{(C^2SR)_j^{(0)}} + \left(\alpha \frac{q}{S}\right)_j^{(0)} ,$$

$$C_j = -\frac{1}{4\Delta x_{j-1}} ; \quad C_j^* = -\frac{L_j^{(0)}}{4\Delta x_{j-1}} - \frac{M_j^{(0)}}{2\Delta t} ,$$

$$D_j = A_j Q_{j-1}^n + B_j h_j^n + C_j Q_{j+1}^n + q_j^{(0)} ,$$

$$D_j^* = A_j^* h_{j-1}^n + \frac{1}{\Delta t} - \left(\alpha \frac{q}{S}\right)_j^{(0)} Q_j^n + C_j^* h_{j+1}^n +$$

$$+ \left(\alpha \frac{Q^2}{S^2}\right)_j^{(0)} \frac{S_{j+1}^{(0)m} - S_{j-L}^{(0)m}}{\Delta x_{j-1}} .$$

Coeficienții ecuațiilor (14) și (15) sînt evaluați în nodurile de tip h, respectiv Q, exceptînd termenii $S_{j+1}^{(0)m}$ și $S_{j-1}^{(0)m}$ care se calculează în punctele de tip h pentru cota $h_j^{(m)} = (h_{j-1} + h_{j+1})/2$.

Sub această formă sistemul (14)—(15) se poate rezolva cu un algoritm dublu simultan tridiagonal (double sweep algorithm) [5]. Presupunînd că Q_{j+1}^{n+1} și h_j^{n+1} sînt legate prin relații liniare de forma:

$$Q_{j+1}^{n+1} = E_j h_j^{n+1} + F_j , \tag{16}$$

$$h_{j+1}^{n+1} = E_j^* Q_j^{n+1} + F_j^* , \tag{17}$$

se obțin, după substituirea acestor relații în sistemul anterior, următoarele formule de recurență:

$$E_{j-1}^* = \frac{C_j}{A_j E_j + B_j} ; \quad F_{j-1}^* = \frac{D_j - A_j F_j}{A_j E_j + B_j} ,$$

$$E_{j-1} = \frac{-C_j^*}{A_j^* E_j^* + B_j^*} ; \quad F_{j-1} = \frac{D_j^* - A_j^* F_j^*}{A_j^* E_j^* + B_j^*} . \tag{18}$$

Calculul începe din secțiunea extremă aval, în care nivelul este cunoscut (curgerea este admisă de tip fluvial, subcritică). În ultimul nod al rețelei, x_{jj} (joncțiunea cu lacul) formula (17) are forma:

$$h_{jj}^{n+1} = E_{jj+1}^{*} Q_{jj-1}^{n+1} + F_{jj-1}^{*};$$

se constată că relația poate fi identic satisfăcută dacă se alege:

$$E_{jj-1}^{*} = 0, \tag{19}$$

$$F_{jj-1}^{*} = h_{jj}^{n+1}. \tag{20}$$

Este evident că din relațiile (18) se pot obține succesiv mărimile de calcul $E_{jj-2}, F_{jj-2}, E_{jj-1}^{*}, F_{jj-1}^{*}$ etc., încheind cu E_1^{*} și F_1^{*} (primul parcurs). Pe de altă parte, întrucît Q_1^{n+1} este cunoscut în secțiunea extremă amonte (hidrograful de viitură), cota h_2^{n+1} rezultă din relația (17), etc., pînă la secțiunea extremă aval (al doilea parcurs).

Întrucît în expresiile coeficienților A și A^{*}, precum și în alți termeni care apar în sistemul iterativ în diferențe finite, datorită neliniarității problemei, figurează momentul de timp intermediar $(n + 1/2)\,\Delta t$ între doi pași de timp consecutivi, este necesar ca peste procedeul numeric al dublului parcurs să se suprapună un proces de aproximare care, pornind de la valorile coeficienților la momentul $n\Delta t$, să le corecteze succesiv în 2—3 iterații, pentru un pas de calcul dat.

Schema prezentată are simetrie în primele derivate spațială și temporală. În consecință, eroarea finală de trunchiere este de ordinul $O(\Delta x^2,\ \Delta t^2)$. Procesul este necondiționat stabil și, de obicei, mai precis decît schema explicită în diferențe finite. De remarcat că, deși procesul iterativ implicit furnizează soluții în orice condiții totuși, pentru pași de timp prea mari, pot să apară erori de calcul excesive.

Pentru a obține condițiile inițiale ale curgerii nepermanente, se determină mișcarea gradual variată din sistemul lui Saint-Venant corespunzător, în regim staționar:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\dfrac{gS^3}{\alpha Q^2} - b_s}\left(\frac{\delta S}{\delta x} - \frac{2Sq}{Q} + \frac{gS|Q|}{C^2RQ}\right), \tag{21}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = q. \tag{22}$$

În diferențe finite, pentru aceeași rețea de discretizare spațio-temporară, ca și în cazul nepermanent, se obține sistemul:

$$\frac{h_{j+2} - h_j}{\Delta x_j} - \frac{S_{j+2}^{m} - S_j^{m}}{G^m \Delta x_j} = \frac{W^m}{G^m}, \tag{23}$$

$$\frac{Q_{j+2} - Q_j}{\Delta x_j} = \frac{q_{j+2} - q_j}{2}, \tag{24}$$

unde

$$G = \frac{gS^3}{\alpha Q^2} - b_s\,; \quad W = \frac{2Sq}{Q} + \frac{gS|Q|}{\alpha C^2 RQ}\,.$$

Termenii de forma G^m sînt calculaţi cu nivelul apei măsurat în nodul intermediar x_{j+1}. Condiţiile la limită pentru cazul permanent sînt similare celor din regim nestaţionar (cu valorile medii în timpul total de studiu).

Pentru a realiza cuplajul dintre condiţiile curgerii nepermanente cu suprafaţă liberă şi procesul nepermanent de infiltraţie în acviferul adiacent, este necesar să se determine mulţimea curbelor de depresie,

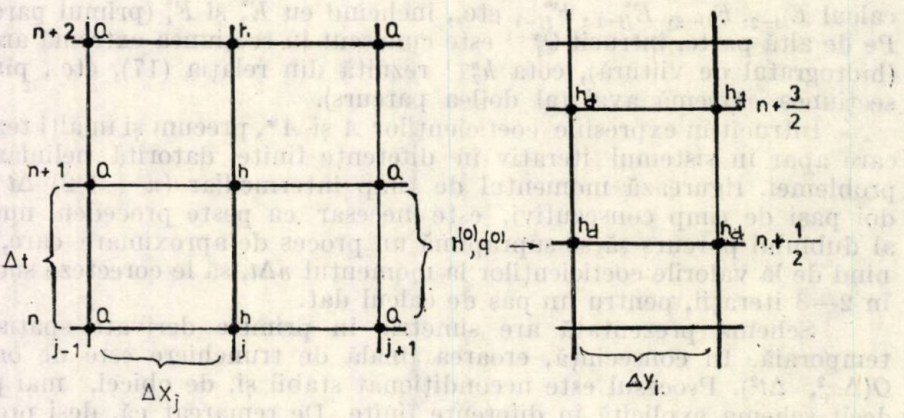


Fig. 3

în ipoteza că momentele de timp de analiză corespund centrelor intervalelor paşilor de timp ai reţelei (de exemplu, $(n + 1/2)\Delta t$).

În acest scop, parametrii hidraulici corespunzători au valori medii în intervalele de timp analizate. Reţeaua de noduri pentru studiul infiltraţiei este, în consecinţă, decalată cu $\Delta t/2$ faţă de reţeaua pentru studiul hidraulic, în planul $x - t$, (fig. 3).

3. INFILTRAŢIA NEPERMANENTĂ ÎN ACVIFER

Infiltraţia nepermanentă în mediul poros acvifer adiacent albiei analizate, pentru un pat impermeabil orizontal, se poate descrie, cu o bună aproximaţie, prin ecuaţia cu derivate parţiale a lui Boussinesq. Pentru o curgere plan-paralelă se obţine [6]:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(h_a \frac{\partial h_a}{\partial y}\right) = \frac{n}{k}\frac{\partial h_a}{\partial t}\,, \tag{25}$$

unde h_d reprezintă înălțimea curbei de depresie în acvifer, raportată la patul impermeabil orizontal, y este coordonata orizontală în secțiunea transversală, cu originea pe taluzul albiei, n este porozitatea mediului poros, iar k reprezintă coeficientul de infiltrație Darcy. Pentru simplificare, taluzul se va admite, în studiul infiltrației, vertical (taluz mediu ipotetic), iar curba de depresie este permanent racordată cu suprafața liberă a curgerii, dacă se neglijează efectul de histerezis (fig. 4).

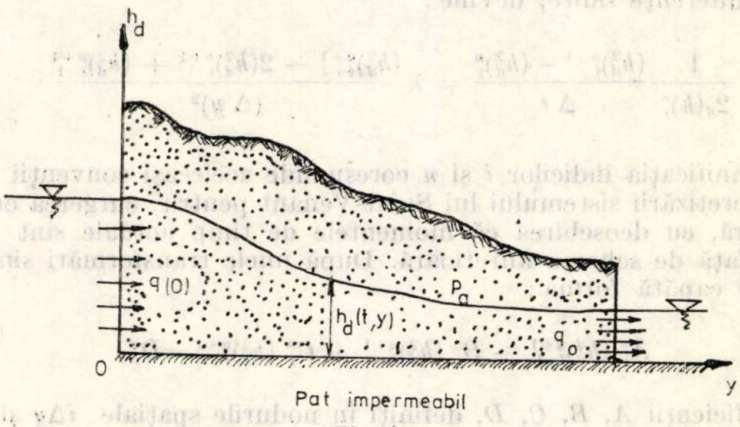


Fig. 4

În deducerea ecuației lui Boussinesq, aproximația esențială constă în neglijarea neuniformității epurei verticale a vitezei de infiltrație, odată cu neglijarea fenomenelor de nesaturare, datorate capilarității. Coeficientul de infiltrație k depinde de diametrul efectiv al granulelor, obținut prin medierea ponderată a curbei granulometrice a materialului, de porozitatea n și de temperatură. După Kozeny [7]:

$$k = 7{,}94 \frac{n^2}{1-n^2} \tau d_e^2, \tag{26}$$

unde diametrul efectiv, d_e, este exprimat în milimetri, iar τ este un coeficient experimental de corecție a temperaturii.

Relația (25) se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{\partial h_d}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2}(h_d^2), \tag{27}$$

unde parametrul λ are expresia:

$$\lambda = \frac{k}{2n}. \tag{28}$$

De obicei, relația lui Boussinesq se liniarizează, în cazul în care curba de depresie este suficient de netedă. În continuare, analiza va

fi efectuată cu referire la ecuaţia neliniară (27), folosind o schemă în diferenţe finite în formă implicită. Se observă că, ecuaţia (27) se poate exprima într-o altă formă echivalentă:

$$\frac{\partial}{\partial t}(h_d^2) = 2\lambda h_d \frac{\partial^2}{\partial y^2}(h_d^2), \tag{29}$$

care, în diferenţe finite, devine:

$$\frac{1}{2_d(h)_i^n} \frac{(h_d^2)_i^{n+1} - (h_d^2)_i^n}{\Delta t} = \lambda \frac{(h_d^2)_{i+1}^{n+1} - 2(h_d^2)_i^{n+1} + (h_d^2)_{i-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}. \tag{30}$$

Semnificaţia indicilor i şi n corespunde aceleeaşi convenţii ca şi în cazul discretizării sistemului lui Saint-Venant pentru curgerea cu suprafaţă liberă, cu deosebirea că momentele de timp actuale sînt decalate au $\Delta t/2$ faţă de schema anterioară. După unele transformări simple, reclţia (30) capătă forma:

$$A_i^n (h_2^d)_{i-1}^{n+1} + B_i^n (h_d^2)_i^{n+1} + C_i^n (h_d^2)_{i+1}^{n+1} = D_i^n, \tag{31}$$

unde coeficienţii A, B, C, D, definiţi în nodurile spaţiale $i\Delta y$ şi la momentul de timp $(n + 1/2)\Delta t$, au expresiile:

$$A_i^n = -1; B_i^n = 2 + \frac{\lambda_e}{(h_d)_i^n}; C_i^n = -1; D_i^n = \lambda_e (h_d)_i^n, \tag{32}$$

iar parametrul λ_e care depinde şi de finelea reţelei spaţio-temporale de calcul, este definit prin formula:

$$\lambda_e = \frac{(\Delta y)^2}{2\lambda \Delta t}. \tag{33}$$

Condiţiile iniţiale şi la limită pentru studiul infiltraţiei nepermanente sînt:

— la momentul iniţial, curba de depresie corespunde regimului permanent de infiltraţie, generat de nivelul staţionar gradual-variat al suprafeţei libere în rîu. Întrucît acest nivel diferă de la o secţiune transversală la alta, alura curbelor de depresie depinde de localizarea secţiunii de calcul;

— în infiltraţia nepermanentă se admite că pe taluz are loc permanent racordarea curbei de depresie la suprafaţa liberă a rîului (prima condiţie la limită), iar la mare distanţă de rîu nivelul apei în acvifer este presupus staţionar.

Ansamblul de relaţii (31) ($i = 2, 3, \ldots, N - 1$), unde N este numărul de noduri spaţiale în schema de studiu a infiltraţiilor, constituie un sistem liniar cu matrice tridiagonală.

Pentru rezolvarea acestui sistem se folosește din nou algoritmul dublului parcurs. Se introduc mărimile de calcul ajutătoare E, F cu relațiile de recurență:

$$E_{i-1}^n = \frac{-A_i^n}{B_i^n + C_i^n E_i^n}, \quad F_{i-1}^n = \frac{D_i^n - C_i^n F_i^n}{B_i^n + C_i^n E_i^n}. \tag{34}$$

Cunoscînd înălțimea de depresie la mare distanță, se determină $(h_d^2)^{n+1}$ și se alege:

$$E_{N-1}^{n+1} = 0; \qquad F_{N-1}^{n+1} = (h_d^2)_N^{n+1}, \tag{35}$$

calculîndu-se succesiv cu relațiile (34) mărimile E_{N-2}^{n+1}, F_{N-2}^{n+1}, ..., E_1^{n+1}, F_1^{n+1}. În al doilea parcurs, pornind de la $(h_d^2)_1^{n+1}$ (nivelul la momentul de timp corespunzător în rîu), se obține șirul de înălțimi de depresie în nodurile spațiale ale rețelei transversale:

$$(h_d^2)_{i+1}^{n+1} = E_i^{n+1} (h_d^2)_i^{n+1} + F_i^{n+1} \quad (i = 1, \ldots, N-2). \tag{36}$$

Pentru a se determina debitul specific (pe unitatea de lungime) de infiltrații de la rîu către acvifer, se folosește relația:

$$q = -n \int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial t} \, dy, \tag{37}$$

care este o consecință a ecuației de continuitate. În diferențe finite se obține:

$$q = -n \sum_{i=1}^{N} ((h_d)_i^{n+1} - (h_d)_i^n) \frac{\Delta y}{\Delta t} + q_N =$$

$$= q_N + \frac{n\Delta y}{2\Delta t} (((h_d)_1^{n+1} + 2(h_d)_2^{n+1} + \ldots + 2(h_d)_{N-1}^{n+1} + \tag{38}$$

$$+ (h_d)_N^n) - ((h_d)_1^n + 2(h_d)_2^n + \ldots + 2(h_d)_{N-1}^n + (h_d)_N^n)).$$

Cunoscînd acest debit, pentru fiecare secțiune transversală a zonei de rîu analizate, la momentul de timp actual, se trece la calculul regimului nepermanent de curgere cu suprafață liberă (Saint-Venant), obținîndu-se noile nivele și debite, în lungul rîului, după pasul de timp Δt. Acest algoritm de calcul se repetă succesiv pe întregul interval de timp analizat.

4. REZULTATE NUMERICE ȘI CONCLUZII

Schema de calcul prezentată mai sus a fost aplicată la cazul unui sector de rîu extins pe o lungime de 19 km, în amonte de un lac. Panta longitudinală a patului s-a ales egală cu 0,00001, coeficientul de rugozi-

tate Manning = 0,0167 pe fundul albiei, respective 0,045 pe taluze. Canalul prismatic de secțiune trapezoidală are lățimea la fund $B = 15$ m și panta taluzului de 1 : 15. Pentru 20 de noduri spațiale, $\Delta x = 1\,000$ m,

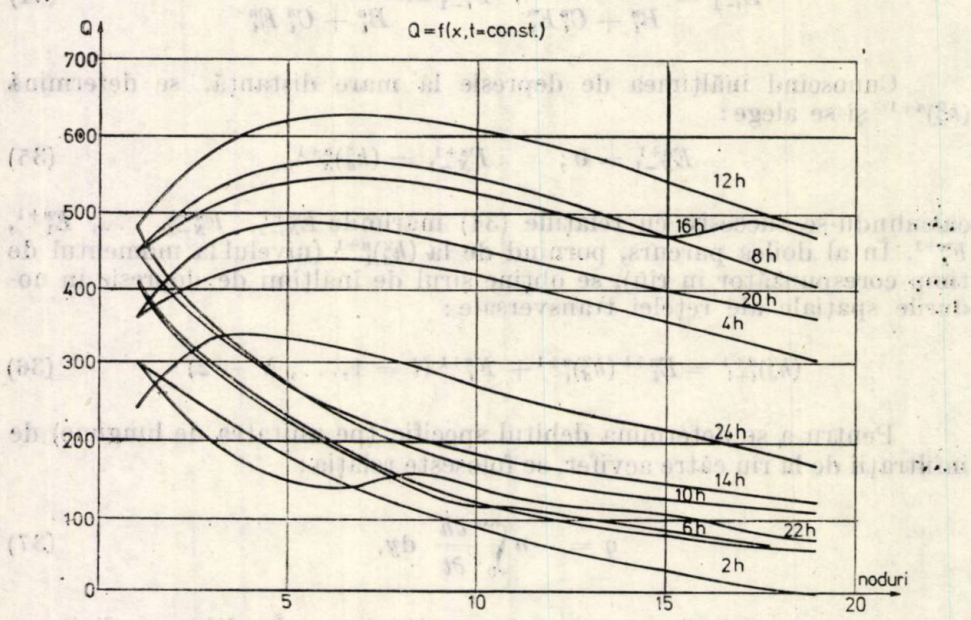


Fig. 5

programul de calcul a fost rulat timp de 50 de pași ($\Delta t = 7\,200$ sec.). Hidrograful $Q(t)$ în secțiunea amonte are expresia analitică:

$$Q = Q_0(1 + \sin 3{,}636\,10^{-5}t) \tag{39}$$

pentru $t \leqslant 86400$ s (24 ore), respectiv,

$$Q = Q_0$$

pentru $t > 86\,400$ s. Acest hidrograf are forma unui impuls sinusoidal extins pe o durată de 43 200 s (12 ore). Un nivel constant, pentru adîncimea de 8 m, se menține la confluența riului cu lacul din secțiunea extremă aval. Coeficientul lui Coriolis s-a ales egal cu 1, 1, iar debitul mediu pe rîu, $Q_0 = 240$ m³/s. Porozitatea materialului granular din acvifer este $n = 0{,}42$, iar coeficientul de infiltrație $k = 0{,}00338$ m²/s. Rețeaua spațială transversală conține 20 de noduri cu pasul $\Delta y = 25$ m.

În figurile 5 și 6 sînt reprezentate curbele de variație ale debitului și nivelului, la momente de timp determinate, în lungul sectorului de rîu analizat. Debitul infiltrat lateral (specific) a avut valoarea medie 0,00992 m²/s.

Procedeul de calcul prezentat se poate aplica la determinarea oscilației nivelului apei freatice în acvifer, ca urmare a tranzitului unei unde

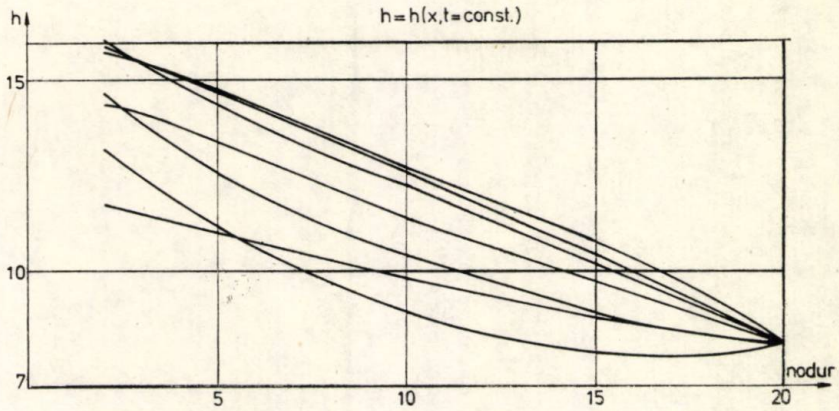


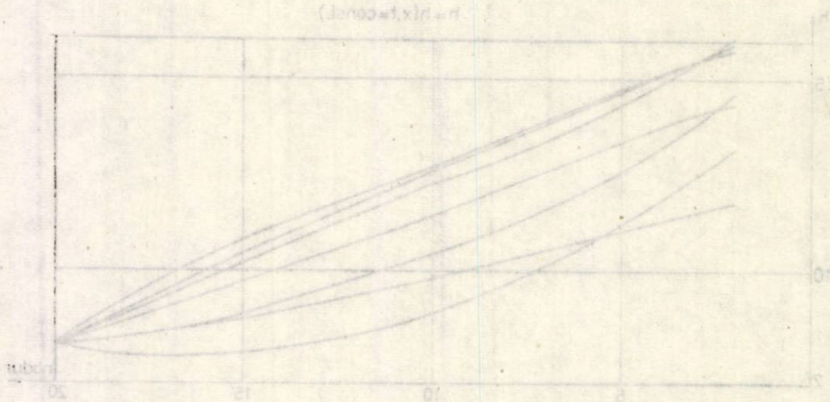
Fig. 6

de viitură în albie, respectiv pentru a se afla schimbările produse în nivelul curbei de depresie, datorită unui sistem de irigare intensiv.

Primită la redacție la 1 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. S. PINDER, S. P. SAUER, *Numerical simulation of flood wave modification due to bank storage effects*, Water Resour, Res., **7**, *1* (1971).
2. V. L. ZITTA, J. M. WIGGART, *Flood routing in channels with bank seepage*, Water Resour. Res., **7**, *5* (1971).
3. A. DIACON, I. SETEANU, R. POPA, P. ROMAN, *Mathematical modelling of thermal river pollution*, Int. Symposium on unsteady flow in open channels, B.H.R.A., Newcastle-upon-Tyne, England (1976).
4. M. B. ABBOT, A. VERWEY, *Some aspects of design system SIVAT*, Proc. XV-th Congress of IAHR, Istanbul, vol. 5, No. 2 (1967).
5. M. B. ABBOT, F. IONESCU, *On the numerical computation of nearly horizontal flows*, Journ. of Hydr. Res., **5** (1967).
6. T. OROVEANU, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Edit. Academiei, București, 1966.
7. M. D. CERTOUSOV, *Hidraulica*, (curs special), Edit. tehnică, București, 1966.



MIŞCAREA BIDIMENSIONALĂ A UNUI FLUID IDEAL DE ADÎNCIME FINITĂ, DATORITĂ UNEI PERTURBAŢII PRODUSE LA SUPRAFAŢA SA

de FLORICA GLOD

În prezenta lucrare se studiază mişcarea bidimensională nestaţionară a unui fluid ideal greu, nemărginit, de adîncime finită, datorită unui impuls aplicat la suprafaţa sa, la momentul iniţial. Se obţin expresiile potenţialului vitezei $\varphi(x, y; t)$ şi ale profilului suprafeţei libere $\eta(x; t)$.
Ca tehnică de lucru se foloseşte transformata Fourier.

Se consideră mişcarea bidimensională datorită unui impuls pe un segment al suprafeţei $-a \leqslant x \leqslant a$, la $t = 0$, cînd lichidul este în poziţia de echilibru. Mişcarea se va raporta la sistemul de axe xoy, cu axa oy orientată ascendent, iar ox suprafaţa liberă orizontală neperturbată. Se presupune că apa este de adîncime finită h şi se extinde la infinit în direcţia orizontală x.

Această problemă a constituit preocuparea unor mecanicieni, ca, de exemplu, J. J. Stoker [1], care a studiat cazul lichidului de adîncime infinită.

După cum se ştie, acest tip de mişcări, datorită unor impulsuri, duc la apariţia unor viteze, care derivă dintr-un potenţial.

În domeniul ocupat de lichid se va determina potenţialul vitezelor $\varphi(x, y; t)$, care satisface ecuaţia Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -h \leqslant y \leqslant 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

cu condiţiile la limită:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru } y = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru } y = -h, \ t > 0 \tag{3}$$

şi condiţiile iniţiale:

$$\varphi(x, 0; 0) = -\frac{1}{\rho} I(x), \tag{4}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 1, 1982, P. 17–21

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

cu $I(x)$ impulsul pe unitatea de arie aplicat pe suprafaţa liberă,

$$\frac{\partial \varphi(x, 0; 0)}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Condiţiile iniţiale sînt impuse numai pe frontiera fluidului, conform unicităţii soluţiei.

Se consideră că $\varphi(x, y; t)$ şi primele două derivate în raport cu x, y şi t, precum şi $I(x)$ tind către zero la infinit, fluidul este în repaus la infinit.

Se va considera cazul particular

$$I(x) = \begin{cases} P = \text{const.} & |x| < a, \\ 0 & |x| > 0, \end{cases} \tag{6}$$

adică cazul în care impulsul uniform este aplicat segmentului $|x| < a$, restul suprafeţei rămînînd neperturbat.

Soluţia $\varphi(x, y; t)$ va fi determinată folosind metoda transformatei Fourier. Aplicînd transformata Fourier în x relaţiilor (1) — (5), se obţine o problemă mai simplă pentru transformata $\bar{\varphi}(s, y; t)$; transformata $\bar{\varphi}$ va satisface o ecuaţie diferenţială ordinară în loc de ecuaţia cu derivate parţiale satisfăcută de φ. Odată ce transformata $\bar{\varphi}$ va fi aflată, formula inversă dă soluţia.

Numim $\bar{f}(s)$ transformata Fourier a lui $f(x)$,

$$\bar{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-isx}\, dx.$$

Funcţia originală $f(x)$ este obţinută din transformata sa $\bar{f}(s)$ prin formula inversă:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(s)\, e^{isx} ds.$$

Se va aplica transformata Fourier la (1) (se înmulţeşte cu e^{-isx} şi se integrează în intervalul $-\infty < x < +\infty$) şi se obţine:

$$-s^2 \bar{\varphi}(s, x; t) + \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dy^2} = 0, \tag{7}$$

utilizînd formula de derivare a transformatei Fourier:

$$\frac{\overline{d^n f}}{dx^n} = (is)^n \bar{f}$$

şi ţinînd cont de comportarea lui φ la infinit.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (7) este de forma:

$$\bar{\varphi}(s, y; t) = A(s, t)\, e^{|s|y} + B(s, t)\, e^{-|s|y}, \tag{8}$$

cu $A(s, t)$ şi $B(s, t)$ ce se vor determina din condiţiile la limită şi iniţiale. Transformata $\bar{\varphi}$ va trebui să satisfacă condiţia pe fundul lichidului (3), şi obţinem

$$A(s, t)\, e^{-|s|h} - B(s, t)\, e^{|s|h} = 0 ,$$

de unde

$$A(s, t) = B(s, t)\, e^{2|s|h}$$

şi

$$\bar{\varphi}(s, y; t) = B(s, t)\,(e^{2|s|h}\, e^{|s|y} + e^{-|s|y}). \tag{9}$$

Transformata este apoi aplicată condiţiei pe suprafaţa liberă (2), obţinîndu-se:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = 0 \quad \text{pentru } y = 0,\ t > 0. \tag{10}$$

Din (9) şi (10) rezultă pentru $B(s, t)$ ecuaţia diferenţială:

$$\frac{d^2 B(s, t)}{dt^2}(e^{2|s|h} + 1) + g|s|\, B(s, t)\,(e^{2|s|h} - 1) = 0, \tag{11}$$

a cărei soluţie generală este de forma:

$$B(s, t) = a(s) \cos \sqrt{g|s| \frac{e^{2|s|h} - 1}{e^{2|s|h} + 1}}\, t + b(s) \sin \sqrt{g|s| \frac{e^{2|s|h} - 1}{e^{2|s|h} + 1}}\, t. \tag{12}$$

Se impun condiţiile iniţiale.

Transformata lui (5) conduce la condiţia $\dfrac{\partial B(s, 0)}{\partial t} = 0$ şi soluţia ecuaţiei (11) devine:

$$B(s, t) = a(s) \cos \sqrt{g|s| \frac{e^{2|s|h} - 1}{e^{2|s|h} + 1}}\, t,$$

cu $a(s)$ de determinat din cealaltă condiţie iniţială (4);

$$\bar{\varphi}(s, 0; 0) = -\frac{1}{\rho} \bar{I}(s), \tag{4'}$$

cu $\bar{I}(s)$ transformata Fourier a lui $I(x)$. Rezultă:

$$a(s) = -\frac{1}{\rho}\bar{I}(s)\frac{1}{e^{2|s|h}+1}$$

și

$$\bar{\varphi}(s, y; t) = -\frac{\bar{I}(s)}{\rho}\frac{1}{e^{2|s|h}+1}(e^{2|s|h}e^{|s|y} + e^{-|s|y})\cos\sqrt{g|s|\frac{e^{2|s|h}-1}{e^{2|s|h}+1}}\,t. \quad (13)$$

Formula inversă a transformatei Fourier conduce la soluția:

$$\varphi(x, y; t) = -\frac{1}{\rho\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\bar{I}(s)}{e^{2|s|h}+1}e^{isx}(e^{2|s|h}e^{|s|y} + e^{-|s|y})\cos\sqrt{g|s|\frac{e^{2|s|h}-1}{e^{2|s|h}+1}}\,t\,ds. \quad (14)$$

În cazul particular considerat

$$\bar{I}(s) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-isx}\,dx = \frac{2P}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{a}\cos sx\,dx = \frac{2Pa}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin sa}{sa}$$

și

$$\varphi(x, y; t) = -\frac{2Pa}{\pi\rho}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin sa}{sa}\frac{\cos sx}{e^{2sh}+1}(e^{2sh}e^{sy} + e^{-sy})\cos\sqrt{gs\frac{e^{2sh}-1}{e^{2sh}+1}}\,t\,ds, \quad (15)$$

iar pentru profilul suprafeței libere:

$$\eta(x; t) = -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{2Pa}{\pi\rho g}\lim_{y\to 0}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin sa}{sa}\frac{\cos sx}{e^{2sh}+1}(e^{2sh}e^{sy} + e^{-sy})\sqrt{gs\frac{e^{2sh}-1}{e^{2sh}+1}}\sin\sqrt{gs\frac{e^{2sh}-1}{e^{2sh}+1}}\,t\,ds. \quad (16)$$

Integralele converg pentru toți $y < 0$, exceptînd poate suprafața liberă.

În cazul impulsului concentrat pe suprafață în $x = 0$, se presupune că $a \to 0$, în timp ce $P \to \infty$, astfel ca impulsul total $2Pa$ să tindă către

o limită finită. Dacă impulsul total este egal cu unitatea, se obțin pentru φ și η expresiile:

$$\varphi(x, y; t) = -\frac{1}{\pi\rho}\int_0^{+\infty} \frac{\cos sx}{e^{2sh}+1}\left(e^{2sh}e^{sy}+e^{-sy}\right)\cos\sqrt{gs\frac{e^{2sh}-1}{e^{2sh}+1}}\,t\,ds, \quad (17)$$

$$\eta(x; t) = -\frac{1}{\pi\rho g}\lim_{y\to 0}\int_0^{\infty}\frac{\cos sx}{e^{2sh}+1}\left(e^{2sh}e^{sy}+\right. \quad (18)$$

$$\left.+e^{-sy}\right)\sqrt{gs\frac{e^{2sh}-1}{e^{2sh}+1}}\,\sin\sqrt{gs\frac{e^{2sh}-1}{e^{2sh}+1}}\,t\,ds.$$

Se constată că trecînd la limită pentru $h \to \infty$ se obțin expresiile lui φ și η deduse de J. J. Stoker pentru fluidul de adîncime infinită.

Soluțiile sînt date sub formă de integrală, dar se poate obține o integrare numerică.

Primită la redacție la 19 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. J. J. STOKER, *Water waves*, Interscience Publishers, Inc., New York (1966).

CALCULUL REZONANȚEI HIDRAULICE LA UZINE HIDROELECTRICE. I

de MIHAIL POPESCU
Institutul de cercetări hidrotehnice

Lucrarea este alcătuită din două părți. În prima parte se studiază rezonanța hidraulică la uzine hidroelectrice pentru cazul schemei hidraulice fundamentale, formată din galerie de aducțiune, castel de echilibru și conductă forțată, iar în partea a doua a lucrării, se analizează cazurile uzinelor hidroelectrice concepute pe scheme hidraulice complexe.

Ecuațiile generale ale mișcării apei în sistemul hidraulic analizat se tratează în ipoteza unor tipuri de perturbații periodice mici la centrală.

Pe modelul de calcul liniarizat în jurul regimului staționar se studiază răspunsul la perturbații armonice și se obțin frecvențele de rezonanță corespunzătoare amplitudinilor maxime ale variațiilor presiunii apei din conducta forțată în secțiunea turbinelor. Frecvențele astfel obținute sînt testate prin simulare numerică pe modelul matematic neliniar al sistemului hidraulic.

Pe baza rezultatelor teoretice obținute, se analizează posibilitatea de apariție a unor fenomene de rezonanță hidraulică la două uzine hidroelectrice din țara noastră și se calculează prin metode numerice presiunile maxime ce se pot dezvolta în sistem la aceste stări de rezonanță.

Studii teoretice și experimentale asupra fenomenului de rezonanță hidraulică din sistemele hidraulice sub presiune s-au efectuat încă de la începutul secolului nostru, însă ele au căpătat un caracter sistematic odată cu producerea unor accidente grave la uzine hidroelectrice, care au avut drept cauză principală apariția și dezvoltarea unor fenomene de rezonanță hidraulică cu manifestări violente în sistem.

Se acceptă în general că producerea rezonanței hidraulice într-un sistem sub presiune se datorează vibrațiilor induse în circuitul hidraulic respectiv de către mașini hidraulice sau diferite dispozitive hidraulice ale sistemului, cum ar fi vane, supape, regulatoare ș.a.

Prin vibrații induse se înțeleg vibrațiile transmise lichidului din sistem de către aceste dispozitive — cu rol perturbator, și nu vibrațiile mecanice ale acestora care au în general frecvențe mult mai mari decît frecvențele fenomenului de rezonanță hidraulică.

Consecințele producerii rezonanței într-un circuit hidraulic pot să meargă de la apariția unor situații obositoare (cum ar fi zgomote sau vibrații), pînă la spargerea unor conducte sau galerii datorită apariției unor presiuni negative (cavitație) sau pozitive de amplitudini mari, sau poate fi compromisă funcționarea hidraulică a întregului sistem datorită variațiilor mari ale unor parametri hidraulici ai mișcării.

Lipsa de informații precise asupra unor accidente produse la uzine hidroelectrice, ca urmare a apariției unor fenomene de rezonanță, este

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 1, 1982, P. 23–38

unul dintre principalele motive care au îngreuiat de-a lungul timpului dezvoltarea teoriei rezonanței hidraulice.

Dintre numeroasele accidente și situații de rezonanță hidraulică produse la uzine hidroelectrice, citate în literatura de specialitate, se menționează cîteva mai semnificative [2], [3].

AMENAJAREA HIDROTEHNICĂ LAC BLANC — LAC NOIR (FRANȚA)

Accidentul s-a produs în anul 1934, în perioada în care uzina hidroelectrică cu pompare Lac Blanc-Lac Noir era în faza de probe, premergătoare recepției.

Uzina era echipată cu patru turbine de 30 MW fiecare și trei pompe de 15 MW fiecare. Rezonanța hidraulică s-a manifestat prin apariția unor vibrații puternice la funcționarea uzinei în regim de pompare, în special în zona pompelor. Accidentul s-a produs la funcționarea uzinei cu o pompă care lucra la o înălțime de pompare de circa 100 m.

La probe luau parte mai mulți ingineri care încercau înlăturarea vibrațiilor de la pompă. Accidentul s-a produs prin spargerea conductei în dreptul unui capac de vizitare, după care dezastrul a fost total, sărind în aer acoperișul stației și făcînd victime omenești. Ulterior s-a apreciat că rezonanța hidraulică din sistem a fost generată de vibrațiile produse de o vană de ghidaj de la pompe.

UZINA HIDROELECTRICĂ KANDERGRUND (ELVEȚIA)

Dintre caracteristicile principale ale uzinei se menționează căderea $H = 312$ m și debitul instalat $Q = 6$ m^3/s. Uzina a fost construită între anii 1908—1911. După o lungă perioadă de exploatare, în anul 1945 în galeria de aducțiune (de lungime $L = 4214$ m) au apărut în trei zone de-a lungul galeriei fisuri orizontale de circa 20 m lungime și cîțiva centimetri deschidere.

Infiltrațiile din tunel au produs alunecări de teren în zonă, soldate cu mari pierderi materiale și victime omenești. Situația era cu totul inexplicabilă deoarece castelul de echilibru al uzinei, de dimensiuni mari, cu rezistență hidraulică relativ mică la bază, trebuia să oprească transmiterea undelor de presiune din conducta forțată în galeria de aducțiune.

Cauza accidentului s-a atribuit apariției unui fenomen de rezonanță hidraulică generat de vibrația unei supape de aer acționată cu arc.

SISTEMUL HIDROTEHNIC BERSIMIS II (CANADA)

Aducțiunea uzinei este alcătuită din galeria de aducțiune ($L_1 = 720$ m ; $d_1 = 11{,}6$ m), conducta forțată ($L_2 = 123$ m ; $d_2 = 11{,}6$ m) și 5 conducte de distribuție ($L_3 = 153$ m ; $d_3 = 5{,}20$ m). Starea de rezonanță a apărut la

uzină în anul 1961 și s-a manifestat prin variații mari de presiune în conducta forțată în diverse combinații de funcționare a turbinelor.

Aceasta este una din situațiile de rezonanță produse la uzine hidroelectrice care a fost foarte aprofundat studiată teoretic și practic. S-au efectuat măsurători cu înregistrare la uzină și s-a reprodus fenomenul prin calcul. În final s-a stabilit că rezonanța hidraulică a fost generată de cele cinci vane de la turbine.

Din concluziile studiului a rezultat că armonicele superioare din conducta forțată pot produce situații periculoase în tot sistemul și că în galeria de aducțiune pot pătrunde unde de presiune ocolind castelul de echilibru, chiar judicios amplasat și dimensionat. Fenomenul de rezonanță hidraulică a dispărut odată cu înlăturarea cauzei.

În toate aceste cazuri descrise mai sus se poate aprecia că vibrațiile care au generat fenomenul de rezonanță hidraulică s-au manifestat printr-o perturbație periodică în relația de debit dintr-o secțiune imediat amonte de turbine.

Se obișnuiește ca fenomenul de rezonanță hidraulică să se definească cu referire directă la frecvențele proprii ale circuitului hidraulic, însă, din punct de vedere practic esențial în studiul rezonanței hidraulice este să se evidențieze frecvențele de excitație care produc în circuitul hidraulic respectiv oscilații periodice de presiune și de debit care se manifestă cu vîrfuri mari de amplitudine la una dintre mărimile hidraulice caracteristice ale sistemului (de exemplu, presiunea apei într-un punct), [1].

În literatura de specialitate, problema rezonanței hidraulice s-a abordat prin diferite metode de calcul [2], [4], [9], prin analiza și descrierea producerii unor fenomene de rezonanță la uzine hidroelectrice în funcțiune [2], [3], [5] și prin studii experimentale de laborator [1].

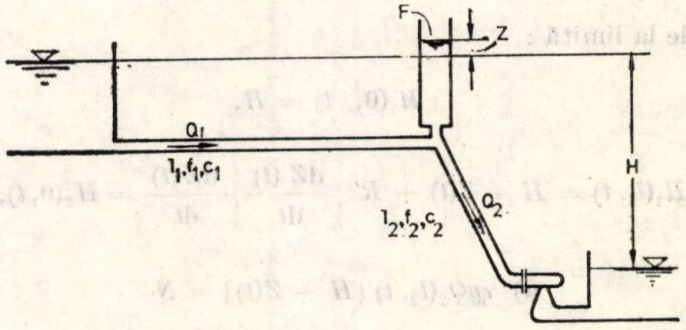


Fig. 1. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu castel de echilibru.

În lucrarea de față se dezvoltă o teorie a rezonanței hidraulice la uzine hidroelectrice [8], cu aplicație atît la schema hidraulică fundamentală (fig. 1), cît și la scheme hidraulice complexe (partea a II-a a lucrării),

tratînd ecuaţiile generale ale mişcării prin metoda caracteristicilor şi admiţînd diferite ipoteze de tipuri de factori perturbatori la centrală, ce pot genera fenomene de rezonanţă hidraulică în sistem.

Ca aplicaţie practică, cu ajutorul rezultatelor teoretice obţinute se analizează posibilităţile de apariţie a unor fenomene de rezonanţă hidraulică la două uzine hidroelectrice din ţara noastră şi se delimitează domeniile de frecvenţe periculoase ale unor factori perturbatori, iar în ipoteza apariţiei şi dezvoltării unor fenomene de rezonanţă se calculează prin metode numerice valorile presiunilor maxime ce pot apărea în sistem.

1. MODELUL MATEMATIC

Ecuaţiile generale ale mişcării apei în sistemul galerie de aducţiune — castel de echilibru — conductă forţată sînt următoarele (fig. 1):

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} + a_1 c_1^2 \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_1}{\partial x} + a_1 \frac{\partial Q_1}{\partial t} = 0,$$

$$F \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + Q_2(0,t) = Q_1(l_1,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial t} + a_2 c_2^2 \frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x} + a_2 \frac{\partial Q_2}{\partial t} = 0,$$

cu condiţiile la limită :

$$H_1(0,\ t) = H,$$

$$H_1(l_1, t) = H + Z(t) + R' \left| \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} \right| \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = H_2(0,t),$$

$$\text{a)}\ \eta g Q_2(l_2, t)\,[H + Z(t)] = N \tag{2}$$

(admiţînd reglajul uzinei pe putere constantă), sau :

$$\text{b)}\ Q_2(l_2, t) = \alpha \sqrt{H_2(l_2, t)}$$

(admiţînd o lege de debit la centrală).

Regimul staționar corespunzător este dat de relațiile :

$$\text{a) } H_1 = H_2 = H, \quad Z = 0, \quad Q_1 = Q_2 = \frac{N}{\eta\, g\, N}, \tag{3}$$

$$\text{b) } H_1 = H_2 = H, \; Z = 0, \; Q_1 = Q_2 = \alpha\sqrt{H}.$$

2. PROBLEMA REZONANȚEI

Se va presupune că în condițiile la limită de tip a), respectiv b), apar perturbații de forma :

$$\text{a) } \eta g Q_2(l_2, t)\,[H + Z(t)] = N + \varepsilon A \sin \omega t, \tag{4}$$

$$\text{b) } Q_2(l_2, t) = (\alpha + \varepsilon A \sin \omega t)\sqrt{H_2(l_2, t)}.$$

Ca urmare a unor astfel de perturbații se vor considera perturbațiile corespunzătoare ale regimului staționar, admițînd soluții de forma :

$$\text{a) } Q_1(x, t) = \frac{N}{\eta\, g\, H} + \varepsilon \tilde{Q}_1(x, t) + \ldots$$

$$\text{b) } Q_1(x, t) = \alpha\sqrt{H} + \varepsilon\, \tilde{Q}_1(x, t) + \ldots$$

$$H_1(x, t) = H + \varepsilon\, \tilde{H}_1(x, t) + \ldots$$

$$H_2(x, t) = H + \varepsilon\, \tilde{H}_2(x, t) + \ldots \tag{5}$$

$$\text{a) } Q_2(x, t) = \frac{N}{\eta\, g\, H} + \varepsilon\, \tilde{Q}_2(x, t) + \ldots$$

$$\text{b) } Q_2(x, t) = \alpha\sqrt{H} + \varepsilon\, \tilde{Q}_2(x. t) + \ldots$$

$$Z(t) = \varepsilon \tilde{Z}(t) + \ldots$$

Pentru noile necunoscute $\tilde{Q}_1$, $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$, $\tilde{Q}_2$, $\tilde{Z}$ se obțin ecuațiile liniare de primă aproximație (în cele ce urmează, pentru ușurarea calculelor, perturbațiile armonice se vor exprima în forma complexă $\varepsilon A e^{i\omega t}$) :

$$\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial t} + a_i c_i^2 \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial x} + a_i \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial t} = 0, \; i = 1, 2,$$

$$\tilde{H}_1(0, t) = 0,$$

$$F\frac{\mathrm{d}\tilde{Z}(t)}{\mathrm{d}t}+\tilde{Q}_2(0,t)=\tilde{Q}_1(l_1,t),$$

$$\tilde{H}_1(l_1,t)=\tilde{Z}(t)=\tilde{H}_2(0,t), \tag{6}$$

$$\text{a)}\quad \eta g H\,\tilde{Q}_2(l_2,t)+\frac{N}{H}\tilde{Z}(t)=A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$\text{b)}\quad \tilde{Q}_2(l_2,t)=\frac{\alpha}{2\sqrt{H}}\tilde{H}_2(l_2,t)+A\sqrt{H}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Căutăm acele frecvenţe ω pentru care $|\tilde{H}_2(l_2,t)|$ este maxim. Acestea sînt frecvenţele care pot genera situaţii periculoase în sistem.

3. METODA CARACTERISTICILOR

Făcînd schimbarea de variabile

$$u_i=\frac{1}{\sqrt{a_i}}(\tilde{H}_i+a_i c_i\tilde{Q}_i),\quad v_i=\frac{1}{\sqrt{a_i}}(a_i c_i\tilde{Q}_i-\tilde{H}_i) \tag{7}$$

deci

$$\tilde{H}_i=\frac{\sqrt{a_i}}{2}(u_i-v_i),\quad \tilde{Q}_i=\frac{1}{2c_i\sqrt{a_i}}(u_i+v_i) \tag{8}$$

ecuaţiile de propagare devin:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+c_i\frac{\partial u_i}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v_i}{\partial t}-c_i\frac{\partial v_i}{\partial x}=0,\quad i=1,2. \tag{9}$$

Introducînd funcţiile $\eta_i(t)=u_i(0,t)$, $\zeta_i(t)=v_i(l_i,t)$, rezultă:

$$\tilde{H}_i(x,t)=\frac{\sqrt{a_i}}{2}\left[\eta_i\left(t-\frac{x}{c_i}\right)-\zeta_i\left(t-\frac{l_i-x}{c_i}\right)\right],$$

$$\tilde{Q}_i(x,t)=\frac{1}{2c_i\sqrt{a_i}}\left[\eta_i\left(t-\frac{x}{c_i}\right)+\zeta_i\left(t-\frac{l_i-x}{c_i}\right)\right], \tag{10}$$

$$\tilde{Z}(t)=\frac{\sqrt{a_1}}{2}\left[\eta_1\left(t-\frac{l_1}{c_1}\right)-\zeta_1(t)\right]=\frac{\sqrt{a_2}}{2}\left[\eta_2(t)-\zeta_2\left(t-\frac{l_2}{c_2}\right)\right].$$

Pentru a putea scrie în noile variabile condițiile la limită, se vor folosi relațiile :

$$u_i(l_i, t) = \eta_i\left(t - \frac{l_i}{c_i}\right), \qquad v_i(0, t) = \zeta_i\left(t - \frac{l_i}{c_i}\right), \tag{11}$$

care rezultă din (9).

Observăm că în modelul matematic intervin și condiții inițiale.

Deoarece în continuare vom căuta răspunsul periodic al sistemului hidraulic numai la excitații periodice, nu ne vor interesa condițiile inițiale care influențează numai regimul tranzitoriu.

În noile variabile u_i, v_i condițiile la limită devin :

$$\frac{\sqrt{a_1}}{2}[u_1(0, t) - v_1(0,t)] = 0,$$

$$F\frac{\sqrt{a_2}}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_2(0, t) - v_2(0, t)] +$$

$$+\frac{1}{2\,c_2\sqrt{a_2}}[u_2(0, t) + v_2(0, t)] = \frac{1}{2\,c_1\sqrt{a_1}}[u_1(l_1, t) + v_1(l_1, t)],$$

$$\frac{\sqrt{a_1}}{2}[u_1(l_1, t) - v_1(l_1, t)] = \frac{\sqrt{a_2}}{2}[u_2(0, t) - v_2(0, t)],$$

$$\text{a)}\ \frac{1}{2\,c_2\sqrt{a_2}}[u_2(l_2, t) + v_2(l_2, t)] +$$

$$+\frac{Q}{H}\frac{\sqrt{a_2}}{2}[u_2(0, t) - v_2(0, t)] = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{12}$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{2\,c_2\sqrt{a_2}}[u_2(l_2, t) + v_2(l_2, t)] =$$

$$= \frac{\alpha}{2\sqrt{H}}\frac{\sqrt{a_2}}{2}[u_2(l_2, t) - v_2(l_2, t)] + A\sqrt{H}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Trecînd la variabilele η_i, ζ_i se obțin următoarele relații :

$$\eta_1(t) = \zeta_1\left(t - \frac{l_1}{c_1}\right),$$

$$F\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\eta_2(t) - \zeta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right)\right] + \frac{1}{c_2 a_2}\left[\eta_2(t) + \zeta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{c_1\sqrt{a_1 a_2}}\left[\eta_1\left(t-\frac{l_1}{c_1}\right)+\zeta_1(t)\right],$$

$$\sqrt{a_1}\left[\eta_1\left(t-\frac{l_1}{c_1}\right)-\zeta_1(t)\right]=\sqrt{a_2}\left[\eta_2(t)-\zeta_2\left(t-\frac{l_2}{c_2}\right)\right],$$

$$\text{a)}\ \frac{1}{c_2 a_2}\left[\eta_2\left(t-\frac{l_2}{c_2}\right)+\zeta_2(t)\right]+ \tag{13}$$

$$+\frac{Q}{H}\left[\eta_2(t)-\zeta_2\left(t-\frac{l_2}{c_2}\right)\right]=\frac{2A}{\sqrt{a_2}}\,e^{i\omega t},$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{c_2 a_2}\left[\eta_2\left(t-\frac{l_2}{c_2}\right)+\zeta_2(t)\right]=$$

$$=\frac{\alpha}{2\sqrt{H}}\left[\eta_2\left(t-\frac{l_2}{c_2}\right)-\zeta_2(t)\right]+\frac{2A\sqrt{H}}{\sqrt{a_2}}\,e^{i\omega t}.$$

4. RĂSPUNSUL PERIODIC

Vom căuta funcţiile η_i, ζ_i care verifică ecuaţiile de mai sus, sub forma $\eta_i(t) = e^{i\omega t}\tilde{\eta}_i(\omega)$, $\zeta_i(t) = e^{i\omega t}\,\tilde{\zeta}_i(\omega)$.

Pentru determinarea funcţiilor necunoscute $\tilde{\eta}_i(\omega)$, $\tilde{\zeta}_i(\omega)$ se obţine, din condiţiile la limită, următorul sistem de ecuaţii algebrice :

$$\tilde{\eta}_1(\omega) = e^{-i\omega\frac{l_1}{c_1}}\tilde{\zeta}_1(\omega),$$

$$i\,\omega\,F\,[\tilde{\eta}_1(\omega) - e^{-i\omega\frac{l_1}{c_1}}\tilde{\zeta}_1(\omega)] +$$

$$+\frac{1}{c_2 a_2}[\tilde{\eta}_2(\omega) + e^{-i\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\zeta}_2(\omega)] =$$

$$=\frac{1}{c_1\sqrt{a_1 a_2}}[e^{-i\omega\frac{l_1}{c_1}}\tilde{\eta}_1(\omega) + \tilde{\zeta}_1(\omega)]$$

$$\sqrt{a_1}\,[e^{-i\omega\frac{l_1}{c_1}}\tilde{\eta}_1(\omega) - \tilde{\zeta}_1(\omega)] =$$

$$= \sqrt{a_2}\,[\tilde{\eta}_2(\omega) - e^{-i\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\zeta}_2(\omega)], \tag{14}$$

$$\text{a)}\ \frac{1}{c_2 a_2}\,[e^{-i\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\eta}_2(\omega) + \tilde{\zeta}_2(\omega)] +$$

$$+\frac{Q}{H}\,[\tilde{\eta}_2(\omega) - e^{-i\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\zeta}_2(\omega)] = \frac{2A}{\sqrt{a_2}},$$

$$\text{b)}\ \frac{1}{c_2 a_2}\,[e^{-i\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\eta}_2(\omega) + \tilde{\zeta}_2(\omega)] =$$

$$= \frac{\alpha}{2\sqrt{H}}\,[e^{-i\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\eta}_2(\omega) - \tilde{\zeta}_2(\omega)] + \frac{2A\sqrt{H}}{\sqrt{a_2}}.$$

Pentru evidențierea frecvențelor de excitație care pot da efecte periculoase în sistemul hidraulic, vom calcula și analiza variația presiunii apei din conducta forțată, în secțiunea turbinelor, urmărind comportarea funcției $\tilde{H}_2(l_2, t)$.

Efectuînd calculele, rezultă:

$$\text{a)}\ |\tilde{H}_2(l_2, t)| = Ac_2a_2\left|\frac{f_1(\omega)}{i f_2(\omega) - \frac{Q}{H}\sin\omega\frac{l_1}{c_1}}\right|,$$

$$\text{b)}\ |\tilde{H}_2(l_2, t)| = Ac_2\,a_2\sqrt{H}\left|\frac{f_1(\omega)}{i f_2(\omega) - \frac{\alpha\, c_2a_2}{2\sqrt{H}}f_1(\omega)}\right| = \tag{15}$$

$$= A\,c_2\,a_2\sqrt{H}\left|\frac{f_1(\omega)}{i f_2(\omega) - \frac{c_2a_2}{2}\frac{Q}{H}f_1(\omega)}\right|,$$

unde

$$f_1(\omega) = \left(\omega F\sin\omega\frac{l_1}{c_1} - \frac{1}{c_1a_1}\cos\omega\frac{l_1}{c_1}\right)\sin\omega\frac{l_2}{c_2} -$$

$$-\frac{1}{c_2a_2}\sin\omega\frac{l_1}{c_1}\cos\omega\frac{l_2}{c_2},$$

(16)

$$f_2(\omega)\left(\omega F \sin \omega \frac{l_1}{c_1} - \frac{1}{c_1 a_1} \cos \omega \frac{l_1}{c_1}\right) \cos \omega \frac{l_2}{c_2} +$$

$$+ \frac{1}{c_2 a_2} \sin \omega \frac{l_1}{c_1} \sin \omega \frac{l_2}{c_2}.$$

Efectul rezonanței hidraulice în diferite puncte de pe traseul galeriei de aducțiune sau conductei forțate poate fi analizat — exemplu, cazul b) — cu următoarele relații :

$$|\widetilde{H}_1(x, \omega)| = A\sqrt{H}\left|\frac{\sin \omega \frac{x}{c_1}}{i f_2(\omega) - \frac{\alpha c_2 a_2}{2\sqrt{H}} f_1(\omega)}\right|,$$

(17)

$$|\widetilde{H}_2(x, \omega)| = A c_2 a_2 \sqrt{H}\left|\frac{f_x(\omega)}{i f_2(\omega) - \frac{\alpha c_2 a_2}{2\sqrt{H}} f_1(\omega)}\right|,$$

unde

$$f_x(\omega) = \left(\omega F \sin \frac{l_1}{c_1} - \frac{1}{c_1 a_1} \cos \omega \frac{l_1}{c_1}\right) \sin \omega \frac{x}{c_2} -$$

$$- \frac{1}{c_2 a_2} \sin \omega \frac{l_1}{c_1} \cos \omega \frac{x}{c_2}.$$

Observații. 1) În cazul a), în expresia lui $|\widetilde{H}_2(l_2, t)|$ este posibilă anularea numitorului ; aceasta se întîmplă dacă :

$$\omega \frac{l_1}{c_1} = k_1 \pi, \quad \omega \frac{l_2}{c_2} = (2k_2 + 1)\frac{\tau}{2},$$

unde k_1 și k_2 sînt numere întregi, sau notînd :

$$\frac{l_1}{c_1} = \frac{\tau_1}{2}, \quad \frac{l_2}{c_2} = \frac{\tau_2}{2}$$

dacă

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{2k_1}{2k_2 + 1}. \tag{18}$$

În acest caz, pentru $|\widetilde{H}_2(l_2, t)|$ calculele conduc la găsirea unei formule corespunzătoare. Acesta este cazul în care

$$\omega = \frac{k_1 \pi c_1}{l_1} = \frac{2 k_1 \pi}{\tau_1}$$

sînt frecvențele proprii ale sistemului hidraulic.

2) Cazul b) acoperă, în tratare liniară a problemei, și cazul admiterii unei legi de debit la centrală, ca funcție liniară de presiune [2], [4], [9].

5. VERIFICĂRI ȘI APLICAȚII

Pentru a ilustra posibilitățile practice de aplicare a metodei la studiul rezonanței hidraulice, s-au efectuat calcule pentru două uzine hidroelectrice din țara noastră.

5.1. U.H.E. SOMEȘ — MĂRIȘELU

Se menționează următoarele caracteristici principale ale uzinei:

$$l_1 = 8.130 \text{ m}; \; l_2 = 740 \text{ m}; \; F = 28{,}3 \text{ m}^2;$$

$$H = 450 \text{ m}; \; N = 215 \text{ MW}; \; d_1 = 4{,}40 \text{ m};$$

$$d_2 = 3{,}40 \text{ m}; \; R = 0{,}00416 \; Q_c^2; \; Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Uzina are o funcționare hidraulică stabilă la un reglaj pe putere constantă [6].

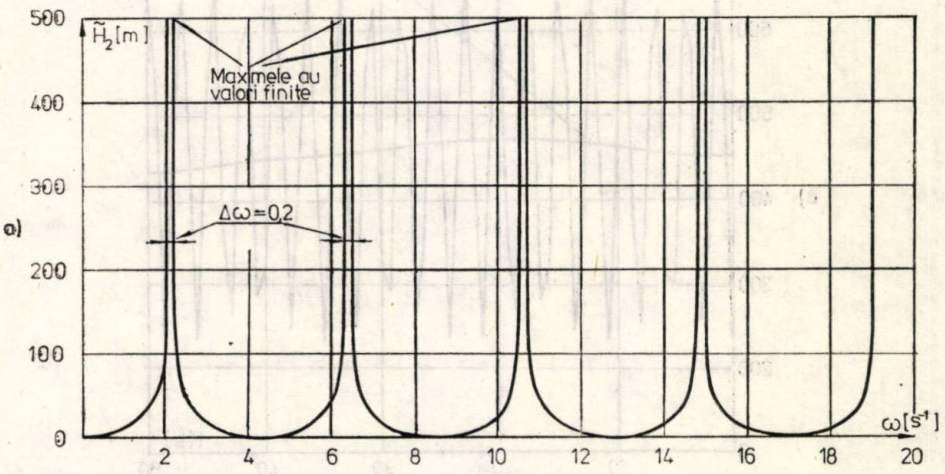


Fig. 2. — UHE Someș — Mărișelu. Graficul mărimii $|\widetilde{H}_2(l_2,t)|$ ca funcție de ω, în condițiile la limită (3).

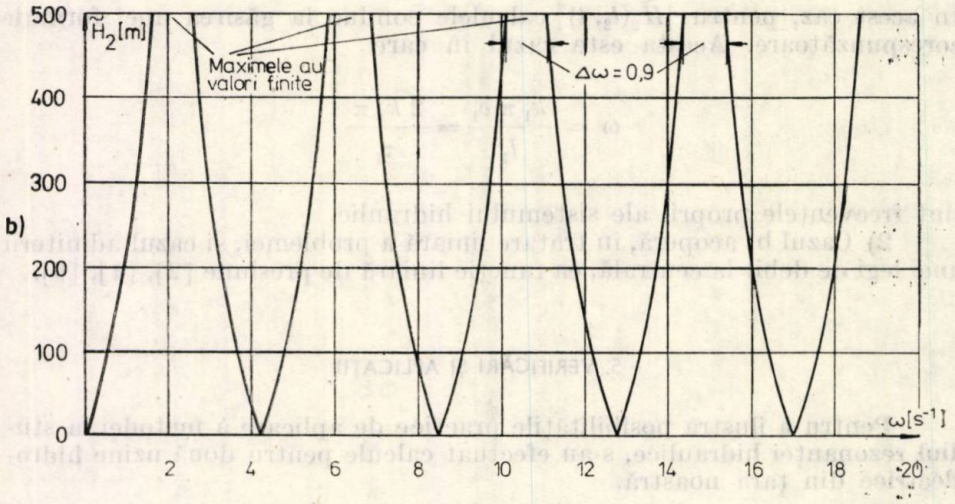


Fig. 2b.

Pentru evidenţierea frecvenţelor periculoase, în cazul admiterii unor ipoteze de excitaţie cu condiţii la limită de tip a) sau b), s-au calculat şi reprezentat grafic funcţiile $|H_2(l_2,t)|$, (fig. 2).

Au fost astfel puse în evidenţă domeniile de frecvenţe de excitaţie periculoase pentru această uzină.

Deoarece aceste frecvenţe au fost obţinute din modelul de calcul liniarizat, este important de ştiut care este efectul lor în sistemul hidraulic real.

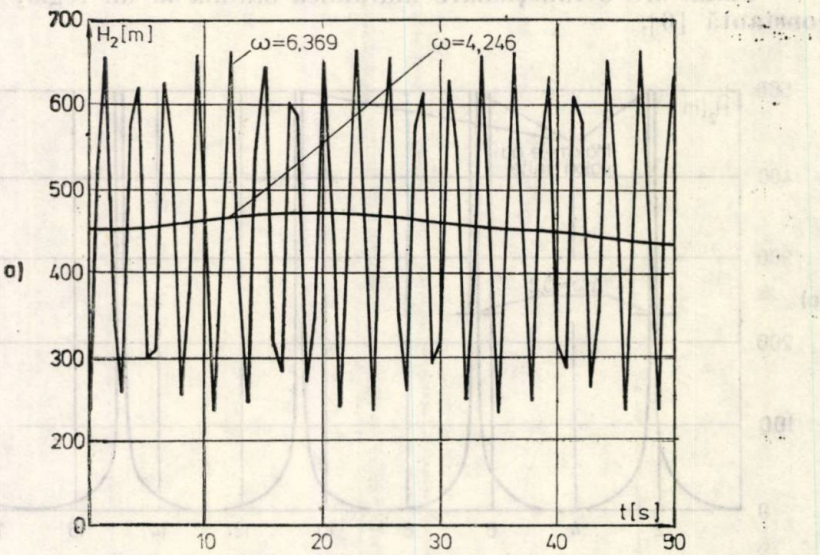


Fig. 3. — UHE Someş — Mărişelu. Curbele de variaţie a presiunii $H_2(l_2, t)$ ca funcţie de t, în condiţiile la limită (3).

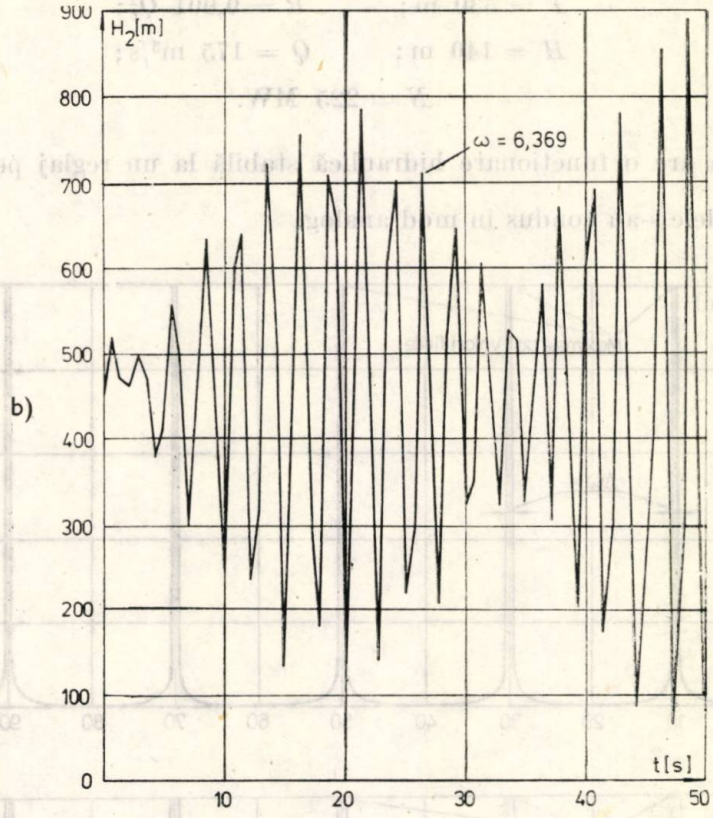


Fig. 3b.

În ipoteza apariției și dezvoltării unor fenomene de rezonanță hidraulică, din punct de vedere practic este important de cunoscut care sînt presiunile maxime care pot apare în sistem în aceste situații.

Folosind o metodă de calcul numeric, bazată pe metoda caracteristicilor [7], prin integrarea numerică a sistemului neliniar de ecuații (1), în cazul unor condiții la limită concrete de tip (2), s-a calculat comportarea sistemului hidraulic în cazul unor frecvențe de excitație care au rezultat ca periculoase din calculele anterioare. O parte a rezultatelor calculelor numerice prelucrate sub formă grafică sînt prezentate în figura 3 și ele arată că frecvențele detectate prin analiza liniară sînt într-adevăr periculoase.

5.2. U.H.E. BICAZ

Dintre caracteristicile uzinei se menționează următoarele :

$l_1 = 4.650$ m ; $f_1 = 38$ m² ;

$l_2 = 157$ m ; $f_2 = 28$ m² ;

$$F = 530 \text{ m}; \qquad R = 0{,}001\ Q_c^2;$$
$$H = 140 \text{ m}; \qquad Q = 175 \text{ m}^3/\text{s};$$
$$N = 225 \text{ MW}.$$

Uzina are o funcționare hidraulică stabilă la un reglaj pe putere constantă.

Calculele s-au condus în mod analog.

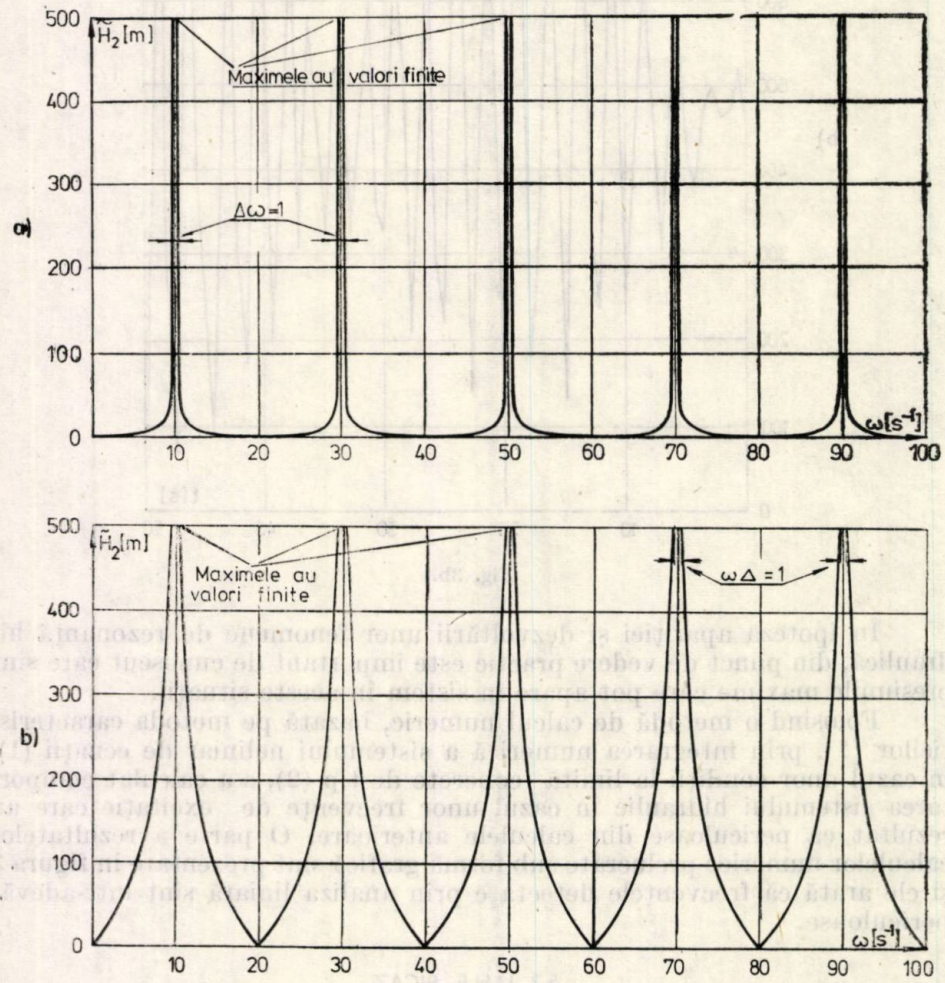


Fig. 4. — UHE Bicaz. Graficul mărimii $|\widetilde{H}_2(l_2, t)|$ ca funcție de ω, în condițiile la limită (3).

S-au evidențiat domeniile de frecvențe de excitație periculoasă pentru uzină (fig. 4) și s-au calculat presiunile maxime care pot să apară în conducta forțată în cazul apariției și dezvoltării unor fenomene de rezonanță în sistem (fig. 5).

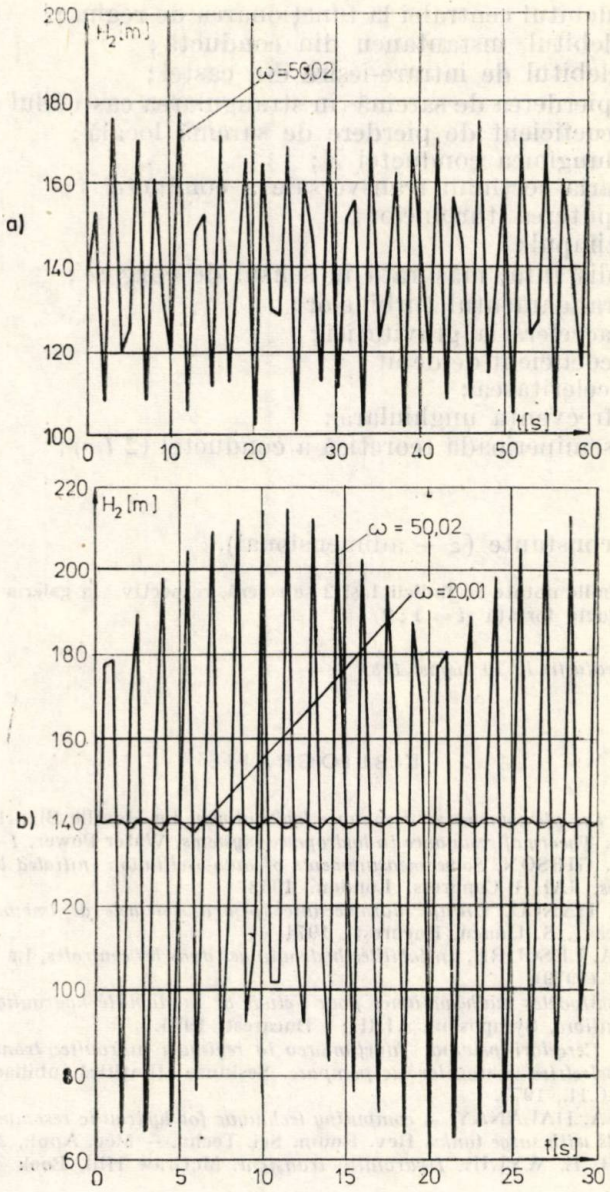


Fig. 5. — UHE Bicaz. Curbele de variație a presiunii $H_2(l_2, t)$ ca funcție de t, în condițiile la limită (3).

NOTAȚII

H — căderea centralei la funcționarea de regim;
H_i — înălțimea piezometrică instantanee din conducta i față de un plan orizontal de referință la nivelul turbinelor;
Z — cota nivelului apei din castelul de echilibru;

Q — debitul centralei la funcționarea de regim ;
Q_i — debitul instantaneu din conductă ;
Q_c — debitul de intrare-ieșire din castel ;
R — pierderea de sarcină în strangularea castelului de echilibru ;
R' — coeficient de pierdere de sarcină locală ;
l_i — lungimea conductei i ;
f_i — aria secțiunii transversale a conductei i ;
N — puterea turbinelor ;
t — timpul ;
x — distanța, măsurată în sensul de curgere ;
η — randamentul turbinelor ;
g — accelerația gravitației ;
α — coeficient de debit ;
c — celeritatea ;
ω — frecvența unghiulară ;
τ — semiperioada teoretică a conductei ($2\ l/c$) ;
$a_i = \dfrac{1}{gf_i}$;
A, ε — constante (ε — adimensional).

Notă. Mărimile notate cu indicii 1 și 2 se referă, respectiv, la galeria de aducțiune și conducta forțată ($i = 1 ; 2$)

Primită la redacție la 10 august 1981

BIBLIOGRAFIE

1. M. FANELLI, *Les phénomènes de resonance hydraulique*, La Houille Blanche, *4* (1975).
2. GH. JAEGER, *Theory of resonance in hydropower systems*, Water Power, *1—3* (1963).
3. I. McCAIG, W. GIBSON, *Some measurements of auto-oscillation initiated by valve characteristics*, IAHR Congress, London. 1963.
4. D. PAVEL, S. HÂNCU, *Utilaje hidromecanice pentru sistemele de îmbunătățiri funciare*, partea I, S. Hâncu, București, 1974.
5. J. PLICHON, A. LESCURE, *Instabilités hydrauliques dans les centrales*, La Houille Blanche, *2—3* (1979).
6. M. POPESCU, *Modèles mathématiques pour l'étude de la stabilité hydraulique des chambres d'équilibre*, Symposiom AIRH, Bucarest, 1976.
7. M. POPESCU, *Cercetări privind funcționarea la regimuri hidraulice tranzitorii a uzinelor hidroelectrice și stațiilor de pompare*. Sesiunea științifică jubiliară, volum editat de I.C.H., 1977.
8. M. POPESCU, A. HALANAY, *A computing technique for hydraulic resonance in hydropower plants with surge tanks*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., *3* (1981).
9. V. STREETER, E. WYLIE, *Hydraulic transient*, McGraw Hill, Book Co, New York, 1967.

INTRAREA OPTIMĂ TRIDIMENSIONALĂ RICOȘANTĂ CU ÎNCĂLZIRE MINIMĂ A VEHICULULUI

de AL. MARINESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică, București

În lucrare se studiază intrarea optimă ricoșantă tridimensională a unui vehicul spațial în atmosferă, cu minimum de căldură cedată acestuia.
Evoluția se efectuează urmînd o traiectore în spațiu, variația densității cu înălțimea fiind considerată după legea exponențială.
Problema variațională formulată ca în lucrarea [4] este o problemă de extremum condiționat. Astfel formulată problema devine o problemă bilocală, care se soluționează numeric cu ajutorul metodei matricei de tranziție. Se prezintă pe baza acestei metode aplicații numerice de interes practic.

1. INTRODUCERE

Optimizarea intrării vehiculelor spațiale în atmosfera planetară sub toate aspectele ei a făcut obiectul a numeroase preocupări.

În ceea ce privește optimizarea bidimensională se pot menționa lucrările [1] — [5].

După cum se știe, un aspect de interes practic al optimizării intrării este acela al minimizării căldurii totale cedate vehiculului. Acest aspect pentru intrarea optimă bidimensională a făcut obiectul lucrării [4].

În prezenta lucrare ne ocupăm tot de acest aspect pentru intrarea portantă ricoșantă tridimensională, care, în ideea reducerii cheltuielii de energie, prezintă un interes deosebit pentru manevrele de schimbare a înclinării planului orbitelor (manevre sinergetice).

Pentru determinarea legilor optime de variație a parametrilor mișcării și a variabilelor de control, problema variațională, formulată ca o problemă de extremum conditionat, se rezolvă riguros numeric cu ajutorul metodei matricei de tranziție.

În acest sens se folosesc ecuațiile exacte care guvernează mișcarea și un model cît mai apropiat de realitate al transferului de căldură depinzînd în esență de coeficientul echivalent de frecare C_f'.

2. NOTAȚII

z — altitudinea;
s — distanța de-a lungul traiectoriei;
R_0 — raza planetei;
l — lungime de referință;

S — suprafață de referință;
S_V — aria suprafeței vehiculului;
P — portanța;
R — rezistența la înaintare;
T — tracțiunea instalației de propulsie;
C_z — coeficientul de portanță;
C_x — coeficientul de rezistență la înaintare;
θ — unghiul de înclinare a traiectoriei față de orizontală;
γ — unghiul de înclinare laterală a vehiculului (ruliu);
η — unghiul dintre proiecția orizontală a vitezei și paralela locală;
φ — latitudinea;
λ — longitudinea;
σ_T — unghiul tracțiunii cu viteza în plan vertical;
ε_T — unghiul tracțiunii cu planul vertical;
β — constantă în definirea densității funcție de altitudine;
C_f' — coeficientul echivalent de frecare pe învelișul vehiculului;
$\mathcal{R}e$ — numărul Reynolds $= \dfrac{\rho V l}{\mu^*}$;
ρ — densitatea;
μ^* — vîscozitatea dinamică;
V — viteza;
g — accelerația gravitației;
μ — parametru gravitațional;
m — masa vehiculului;
$\dfrac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}t}$ — fluxul mediu;
Q — cantitatea totală de căldură cedată vehiculului

$$= S_V \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{\mathrm{d}q_m}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t;$$

i — indice pentru valori inițiale;
f — indice pentru valori finale;
c — indice pentru valori calculate.

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Pornind de la ecuația fundamentală a dinamicii

$$m \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}, \tag{1}$$

unde proiecțiile rezultantei forțelor exterioare $\vec{F}$ în direcția tangentelor liniilor de coordonate de versori $\vec{r}^*$, $\vec{\varphi}^*$, $\vec{\lambda}^*$ sînt F_r, F_φ, F_λ (fig. 1), iar com-

ponentele acceleraţiei a_r, a_φ, a_λ, ecuaţiile de mişcare în coordonate sferice se scriu [10].

$$ma_r = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - r\cos^2\varphi\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right] = F_r,$$

$$ma_\varphi = m\left[r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\right] = F_\varphi, \tag{2}$$

$$ma_\lambda = m\left[r\cos\varphi\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\cos\varphi - 2r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\right] = F_\lambda.$$

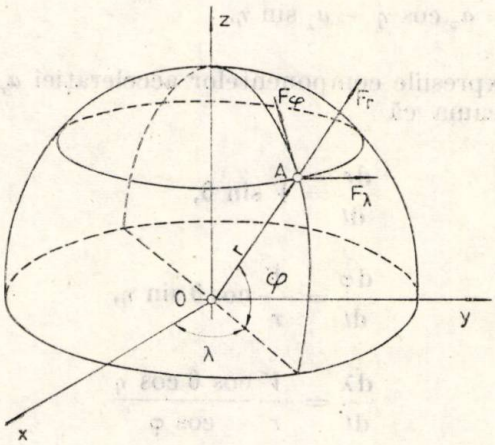


Fig. 1

Pentru practică însă, de cea mai mare utilitate sînt ecuaţiile de mişcare ale vehiculului într-un sistem legat de viteză.

Să considerăm cu aceeaşi origine A (în centrul de masă al vehiculului) a sistemului definit de versorii $\vec{r}$, $\vec{\varphi}^*$, $\vec{\lambda}^*$, sistemul legat de viteză definit de versorii $\vec{\tau}^*$, $\vec{n}^*$, $\vec{k}^*$ unde $\vec{\tau}^*$ este în direcţia tangentei la traiectorie (direcţia vitezei) $\vec{n}^*$ pe normala la traiectorie şi $\vec{k}^*$ normal pe planul conţinînd versorii $\vec{\tau}^*$, $\vec{n}^*$ (fig. 2).

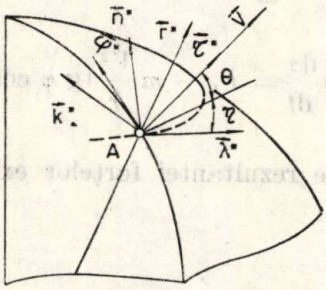


Fig. 2

Deci pentru a exprima ecuațiile de mișcare în sistemul legat de viteză proiecțiile accelerației a_r, a_φ, a_λ din sistemul $\vec{r}^*$, $\vec{\varphi}^*$, $\vec{\lambda}^*$ vor trebui ca de altfel și proiecțiile rezultantei forțelor exterioare $\vec{F}$, exprimate în sistemul $\vec{\tau}^*$, $\vec{n}^*$, $\vec{k}^*$.

Componentele accelerației a_τ, a_n, a_k în sistemul $\vec{\tau}^*$, $\vec{n}^*$, $\vec{k}^*$ funcție de componentele a_r, a_φ, a_λ din sistemul $\vec{r}^*$, $\vec{\varphi}^*$, $\vec{\lambda}^*$ devin

$$\begin{aligned} a_\tau &= a_r \sin\theta + a_\varphi \cos\theta \sin\eta + a_\lambda \cos\theta \cos\eta, \\ a_\eta &= a_r \cos\theta - a_\varphi \sin\theta \sin\eta - a_\lambda \sin\theta \cos\eta, \\ a_k &= a_\varphi \cos\eta - a_\lambda \sin\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

Înlocuind expresiile componentelor accelerației a_r, a_φ, a_λ din (2) în care vom ține seama că

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V \sin\theta, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V}{r} \cos\theta \sin\eta, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{V}{r} \frac{\cos\theta \cos\eta}{\cos\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

și notînd cu F_τ, F_n, F_k proiecțiile rezultantei forțelor exterioare $\vec{F}$ în sistemul legat de viteză, ecuațiile de mișcare în acest sistem iau forma

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= F_\tau, \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= F_n + m \frac{V^2}{r} \cos\theta, \\ mV \cos\theta \frac{d\eta}{dt} &= F_k - m \frac{V^2}{r} \operatorname{tg}\varphi \cos^2\theta \cos\eta. \end{aligned} \tag{5}$$

Cum componentele rezultantei forțelor exterioare $\vec{F}$ au expresiile (vezi fig. 3):
în direcția traiectoriei:

$$F_\tau = -\frac{\rho}{2} S V^2 C_x - m \frac{\mu}{r^2} \sin\theta + T \cos\varepsilon_T \cos\sigma_T,$$

normal pe traiectorie :

$$F_n = \frac{\rho}{2} S V^2 C_z \cos\gamma - m\frac{\mu}{r^2}\cos\theta + T\cos\varepsilon_T \sin\sigma_T,$$

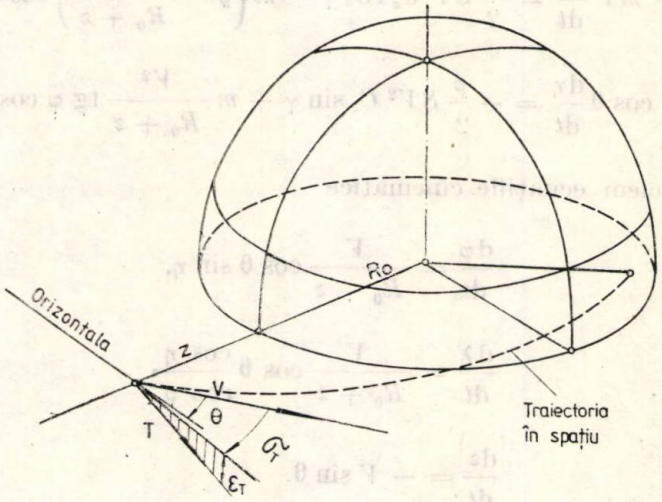


Fig. 3

normal pe planul $(\vec{\tau}^*, \vec{n}^*)$:

$$F_k = \frac{\rho}{2} SV^2 C_z \sin\gamma + T\frac{\sin\varepsilon_T}{\cos\theta},$$

ecuaţiile (5) devin, înlocuind şi efectuînd calculele,

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{\rho}{2} SV^2 C_x - m\frac{\mu}{r^2}\sin\theta + T\cos\varepsilon_T\cos\sigma_T,$$

$$mV\frac{d\theta}{dt} = \frac{\rho}{2} SV^2 C_z\cos\gamma - m\left(\frac{\mu}{r^2} - \frac{V^2}{r}\right)\cos\theta + T\cos\varepsilon_T\sin\sigma_T, \quad (6)$$

$$mV\cos\theta\frac{d\eta}{dt} = \frac{\rho}{2} SV^2 C_z \sin\gamma - m\frac{V^2}{r}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta + T\frac{\sin\varepsilon_T}{\cos\theta}.$$

Convenind ca unghiul θ să fie pozitiv la coborîre şi negativ la urcare, deoarece $\frac{\mu}{r^2} = g$, $T = 0$, $r = R_0 + z$ ecuaţiile de mişcare se scriu

în final

$$m\frac{dV}{dt} = -\frac{\rho}{2}SV^2C_x + mg\sin\theta,$$

$$-mV\frac{d\theta}{dt} = \frac{\rho}{2}SV^2C_z\cos\gamma - m\left(g - \frac{V^2}{R_0+z}\right)\cos\theta, \tag{7}$$

$$-mV\cos\theta\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\rho}{2}SV^2C_z\sin\gamma + m\frac{V^2}{R_0+z}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta,$$

la care asociem ecuaţiile cinematice

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{R_0+z}\cos\theta\sin\eta,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V}{R_0+z}\cos\theta\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}, \tag{8}$$

$$\frac{dz}{dt} = -V\sin\theta.$$

4. CONSIDERAŢII ASUPRA TRANSFERULUI LAMINAR DE CĂLDURĂ

În cele ce urmează vom prezenta mai întîi cîteva consideraţii privind transferul laminar de căldură pentru care avem în vedere două modele.

Mai întîi vom considera modelul $\frac{dq_m}{dt} \sim \rho V^3$ derivat din legea clasică

$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{C_f'}{4}\rho V^3, \tag{9}$$

care presupune că coeficientul echivalent de frecare $C_f' = \text{const}$.

Această aproximaţie folosită în studiul intrării pentru vehicule de tip corp bont (capsule) [4], [5], [6] nu este pe deplin acceptabilă, în special pentru intrări mai profunde.

Deoarece numărul Mach la care considerăm mişcarea este mai mare ca 10, unde numerele Reynolds atinse indică scurgere laminară, coeficientul C_f' nu variază substanţial cu numărul Mach, însă datorită variaţiei densităţii el variază cu numărul Reynolds.

În această idee, al doilea model de transfer laminar este mai indicat în special pentru intrări mai profunde, indiferent de configuraţia vehiculului.

Vom adopta pentru C_f' legea de variație (scurgere laminară)

$$C_f' \approx K \mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

K fiind o constantă depinzînd de configurația geometrică a vehiculului. Calculele arată că în timpul intrării în atmosferă variația mărimii $\left(\frac{V}{\mu^*}\right)^{\frac{1}{2}}$ este foarte mică comparativ cu variația mărimii $\rho^{\frac{1}{2}}$.

În figura 4 este reprezentată variația mărimii $\left(\frac{V}{\mu^*}\right)^{\frac{1}{2}}$ funcție de altitudine atît pentru intrarea ricoșantă, cît și pe arc singular unde viscozitatea dinamică a fost calculată cu variația temperaturii după ICAO Standard Atmosphere.

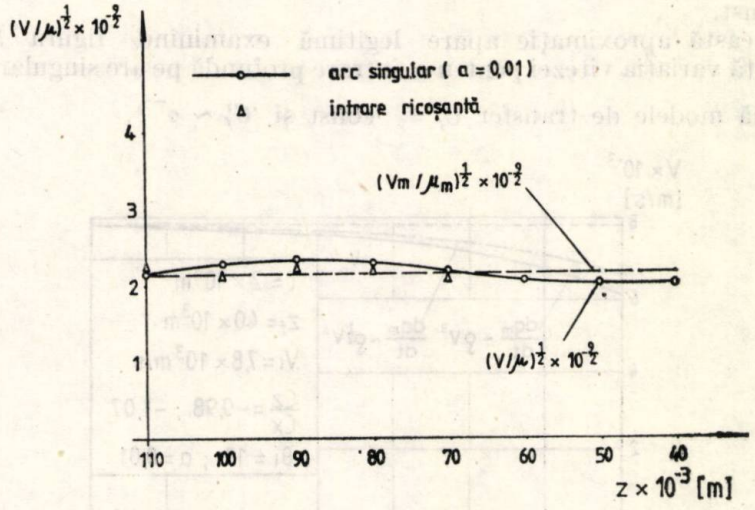


Fig. 4

Considerînd după cum se vede din figura 4 cu bună aproximație

$$\left(\frac{V}{\mu^*}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{V_m}{\mu_m^*}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \text{const.}, \tag{11}$$

unde V_m și μ_m^* sînt valori medii ale vitezei și viscozității dinamice pe durata intrării, putem scrie în final

$$C_f' \approx K\left(\frac{V_m l}{\mu_m^*}\right)^{-\frac{1}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Cu considerațiile de mai sus, $C_f' \sim \rho^{-\frac{1}{2}}$ și prin urmare

$$\frac{dq_m}{dt} \sim \rho^{\frac{1}{2}} V^3. \tag{13}$$

Formula (13) este identică cu aceea găsită pe o altă cale de Lees [5] și verificată prin formule aproximative din alte lucrări, [7], [8].

Aceasta arată că problema intrării optime cu minimum de căldură cedată vehiculului, ținînd seama de variația coeficientului C_f' cu numărul Reynolds, devine similară cu problema căldurii minime cedate în zona critică [3].

Similaritatea acestor probleme este în perfect acord cu conceptul lui Lees [5].

Pentru intrarea tridimensională ricoșantă cu minimum de căldură cedată vehiculului, deoarece ea este puțin profundă și influența numărului Reynolds nu este mare vom considera cu suficientă exactitate că $C_f' = \text{const}$.

Această aproximație apare legitimă examinînd figura 5, care reprezintă variația vitezei pentru o intrare profundă pe arc singular pentru cele două modele de transfer $C_f' = \text{const}$ și $C_f' \sim \rho^{-\frac{1}{2}}$.

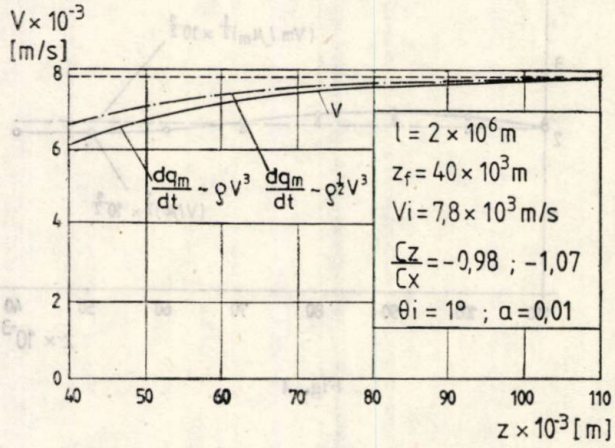


Fig. 5

Pentru altitudinile minime atinse în intrările ricoșante de 70 — 80 Km se vede că deosebirea dintre cele două modele este neglijabilă.

5. PROBLEMA VARIAȚIONALĂ

În studiul intrării optime vom folosi ecuațiile (7) și (8) pe care adoptînd legile

$$C_x = C_{x0} + kC_z^2, \quad \rho = \rho_0 e^{-\beta z}, \tag{14}$$

și notînd $a = \frac{\rho_0 S}{2m}$ le scriem sub forma

$$\Phi_v = \frac{dV}{dt} + a\, e^{-\beta z} V^2 (C_{x0} + k\, C_z^2) - g \sin\theta = 0,$$

$$\Phi_\theta = \frac{d\theta}{dt} + a\, e^{-\beta z} V C_z \cos\gamma - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{R_0 + z}\right)\cos\theta = 0, \qquad (15)$$

$$\Phi_\eta = \frac{d\eta}{dt} - a\, e^{-\beta z} V C_z \frac{\sin\gamma}{\cos\theta} + \frac{V}{R_0 + z}\cos\theta\cos\eta\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0,$$

$$\Phi_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{V}{R_0 + z}\cos\theta\sin\eta = 0,$$

$$\Phi_\lambda = \frac{d\lambda}{dt} - \frac{V}{R_0 + z}\cos\theta\frac{\cos\eta}{\cos\varphi} = 0, \qquad (15)$$

$$\Phi_z = \frac{dz}{dt} + V\sin\theta = 0.$$

Problema variațională care se pune este de a găsi legile optime de variație a parametrilor mișcării și a variabilelor de control C_z și γ astfel ca funcționala

$$Q = \frac{S_\nu C_f'}{4}\int_{t_i}^{t_f} \rho V^3\, dt \qquad (16)$$

să devină minimă cu condițiile (15).

Ținînd seama de (15) și (16) cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange λ_v, λ_θ, λ_η, λ_φ, λ_λ, λ_z alcătuim funcția

$$H = \rho_0\, e^{-\beta z} V^3 + \lambda_v\Phi_v + \lambda_\theta\Phi_\theta + \lambda_\eta\Phi_\eta + \lambda_\varphi\Phi_\varphi + \lambda_\lambda\Phi_\lambda + \lambda_z\Phi_z,$$

cu care ecuațiile lui Euler

$$\frac{\partial H}{\partial V} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \frac{dV}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \frac{d\theta}{dt}} = 0, \qquad (17)$$

. . . . . .

$$\frac{\partial H}{\partial \gamma} = 0$$

conduc în urma calculelor la sistemul de ecuații diferențiale :

$$\frac{d\lambda_v}{dt} = 3\rho_0 e^{-\beta z} V^2 + 2ae^{-\beta z} V C_{x0} \lambda_v + \left(\frac{1}{R_0 + z} + \frac{g}{V^2}\right) \cos\theta \lambda_\theta +$$

$$+ \frac{1}{R_0 + z}\left[\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi\lambda_\eta - \lambda_\lambda) - \sin\eta\lambda_\varphi\right]\cos\theta + \sin\theta\lambda_z,$$

$$\frac{d\lambda_\theta}{dt} = -g\cos\theta\lambda_v - \left(\frac{V}{R_0 + z} - \frac{g}{V^2}\right)\cos\theta\lambda_\theta - ae^{-\beta z} V C_z \frac{\operatorname{tg}\theta \sin\gamma}{\cos\theta}\lambda_\eta -$$

$$- \frac{V}{R_0 + z}\left[\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi\lambda_\eta - \lambda_\lambda) - \sin\eta\lambda_\varphi\right]\sin\theta + V\cos\theta\lambda_z,$$

$$\frac{d\lambda_\eta}{dt} = -\frac{V}{R_0 + z}\left[\frac{\sin\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi\lambda_\eta - \lambda_\lambda) + \cos\eta\lambda_\varphi\right]\cos\theta,$$

$$\frac{d\lambda_\varphi}{dt} = \frac{V}{R_0 + z}\frac{\cos\theta\cos\eta}{\cos^2\varphi}(\lambda_\eta - \sin\varphi\lambda_\lambda), \tag{18}$$

$$\frac{d\lambda_\lambda}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = -\beta[\rho_0 e^{-\beta z} V^3 + a e^{-\beta z} V^2 (C_{x0} + k C_z^2)\lambda_v] +$$

$$+ \frac{2g}{R_0 + z}\sin\theta\lambda_v - \frac{V}{(R_0 + z)^2} - \frac{2g}{V(R_0 + z)}\Bigg]\cos\theta\lambda_\theta -$$

$$- \frac{V}{(R_0 + z)^2}\left[\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi\lambda_\eta - \lambda_\lambda) - \sin\eta\lambda_\varphi\right]\cos\theta$$

și la ecuațiile algebrice

$$C_z = -\frac{1}{2kV\lambda_v}\left(\lambda_\theta\cos\gamma - \lambda_\eta\frac{\sin\gamma}{\cos\theta}\right),$$

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\lambda_\eta}{\lambda_\theta\cos\theta}. \tag{19}$$

În privința naturii extremului se poate ușor proba că deoarece funcția H depinde liniar de mărimile $\frac{dV}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, ... $\frac{dz}{dt}$ condițiile lui Legendre sînt îndeplinite și funcționala (16) este într-adevăr minimă de-a lungul extremalei. Soluționarea problemei propuse cere în fond soluționarea a 12 ecuații diferențiale (7), (8), (18) cu 12 funcții necunoscute V, θ, η, φ λ, z, λ_v, λ_θ, λ_η, λ_φ, λ_λ, λ_z.

Vom considera variabilele de stare și variabila independentă date la momentul inițial

$$\begin{aligned} V_i &= V(t_i); \quad \varphi_i = \varphi(t_i), \quad t_i = 0. \\ \theta_i &= \theta(t_i); \quad \lambda_i = \lambda(t_i), \\ \eta_i &= \eta_i(t_i); \quad z_i = z(t_i), \end{aligned} \tag{20}$$

La sfîrșitul evoluției avem $z_f = z_i$ (condiția de stop) mărimile t_f, V_f, θ_f, η_f, φ_f, λ_f fiind libere.

Din condițiile de transversalitate rezultă condițiile la limită

$$\lambda_{vf} = \lambda_{\theta f} = \lambda_{\eta f} = \lambda_{\varphi f} = \lambda_{\lambda f} = 0, \tag{21}$$

iar pentru λ_{zf} avem condiția

$$\left[H - \frac{\partial H}{\partial \dfrac{dV}{dt}} \frac{dV}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \dfrac{d\theta}{dt}} \frac{d\theta}{dt} - \ldots - \frac{\partial H}{\partial \dfrac{dz}{dt}} \frac{dz}{dt}\right] = 0, \tag{22}$$

de unde

$$\lambda_{zf} = -\frac{\rho_0 e^{-\beta z} V_f^2}{\sin \theta_f}, \tag{23}$$

λ_{vi}, $\lambda_{\theta i}$, $\lambda_{\eta i}$, $\lambda_{\varphi i}$, $\lambda_{\lambda i}$, λ_{zi}, fiind nespecificate.

6. CALCULUL LEGILOR OPTIME DE VARIAȚIE ALE PARAMETRILOR MIȘCĂRII ȘI VARIABILELOR DE CONTROL

Problema astfel formulată (problemă bilocală) a fost soluționată cu ajutorul metodei matricei de tranziție care este descrisă și aplicată în lucrarea [4].

Pentru calculul elementelor matricei de tranziție a fost stabilit sistemul de ecuații în perturbații.

Deoarece mărimile V, θ, η, φ, λ, z sînt inițial specificate, iar λ_v, λ_θ, λ_η, λ_φ, λ_λ, λ_z sînt nespecificate, atunci $\delta V = \delta\theta = \delta\eta = \delta\varphi = \delta\lambda = \delta z = 0$ și sistemul de ecuații în perturbații devine

$$\frac{d(\delta\lambda_v)}{dt} = 2ae^{-\beta z} V C_{x0} \delta\lambda_v + \left(\frac{1}{R_0 + z} + \frac{g}{V^2}\right) \cos\theta \, \delta\lambda_\theta +$$

$$+ \frac{1}{R_0 + z}\left[\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi \delta\lambda_\eta - \delta\lambda_\lambda) - \sin\eta \delta\lambda_\varphi\right] \cos\theta + \sin\theta \delta\lambda_z,$$

$$\frac{d(\delta\lambda_\theta)}{dt} = -g\cos\theta \, \delta\lambda_v - \left(\frac{V}{R_0 + z} - \frac{g}{V}\right) \sin\theta \, \delta\lambda_\theta -$$

$$- ae^{-\beta z} V \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos\theta} (C_z \sin\gamma \, \delta\lambda_\eta + \sin\gamma \, \lambda_\eta \delta C_z + C_z \cos\gamma \, \lambda_\eta \delta\gamma) -$$

$$- \frac{V}{R_0 + z}\left[\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi \, \delta\lambda_\eta - \delta\lambda_\lambda) - \sin\eta \, \delta\lambda_\varphi\right] \sin\theta + V\cos\theta \, \delta\lambda_z,$$

$$\frac{d(\delta\lambda_\eta)}{dt} = -\frac{V}{R_0+z}\left[\frac{\sin\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi\,\delta\lambda_\eta - \delta\lambda_\lambda) + \cos\eta\,\delta\lambda_\varphi\right]\cos\theta,$$

$$\frac{d(\delta\lambda_\varphi)}{dt} = \frac{V}{R_0+z}\frac{\cos\theta\cos\eta}{\cos^2\varphi}(\delta\lambda_\eta - \sin\varphi\,\delta\lambda_\lambda),$$

$$\frac{d(\delta\lambda_\lambda)}{dt} = 0,$$

$$\frac{d(\delta\lambda_z)}{dt} = -\beta\, a e^{-\beta z} V^2\left[(C_{x0} + kC_z^2)\delta\lambda_v + 2kC_z\lambda_v\delta C_z\right] +$$

$$+\frac{2g}{R_0+z}\sin\theta\,\delta\lambda_v - \left[\frac{V}{(R_0+z)^2} - \frac{2g}{V(R_0+z)}\right]\cos\theta\,\delta\lambda_\theta - \qquad (24)$$

$$-\frac{V}{(R_0+z)^2}\left[\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}(\sin\varphi\,\delta\lambda_\eta - \delta\lambda_\lambda) - \sin\eta\,\delta\lambda_\varphi\right]\cos\theta.$$

Acest sistem a fost integrat simultan cu sistemul de optimalitate compus din ecuațiile (15), (18) și (19) după ce înlocuind $\delta C_z = \delta C_z(\delta\lambda_v, \delta\lambda_\theta, \ldots \delta\lambda_z)$ și $\delta\gamma = \delta\gamma(\delta\lambda_v, \delta\lambda_\theta, \ldots \delta\lambda_z)$, calculate din (19) și avînd expresiile

$$\delta C_z = \left(\frac{\lambda_\theta\cos\gamma}{2k\,V\lambda_v^2} + \frac{\lambda_\eta\sin\gamma}{2kV\lambda_v^2\cos\theta}\right)\delta\lambda_v - \frac{\cos\gamma}{2k\,V\,\lambda_v}\delta\lambda_\theta - \frac{\sin\gamma}{2kV\lambda_v\cos\theta}\delta\lambda_\eta,$$

$$\delta\gamma = \frac{\lambda_\eta\cos^2\gamma}{\lambda_\theta^2\cos\theta}\delta\lambda_\theta - \frac{\cos^2\gamma}{\lambda_\theta\cos\theta}\delta\lambda_\eta, \qquad (25)$$

au fost obținute simplificări importante.

Trebuie specificat că în calculul perturbațiilor $\delta\lambda_{vc}(t_i)$ $\delta\lambda_{\theta c}(t_i), \ldots$ $\delta\lambda_{zc}(t_i)$, care corectează valorile multiplicatorilor λ_{vi}, $\lambda_{\theta i}$, $\ldots$ λ_{zi} alese inițial la întîmplare, mărimea ε din ecuația

$$\begin{vmatrix} \delta\lambda_{vc}(t_i) \\ \delta\lambda_{\theta c}(t_i) \\ \cdots \\ \delta\lambda_{zc}(t_i) \end{vmatrix} = -\varepsilon[T]^{-1}\begin{vmatrix} \lambda_{vc}(t_f) - \lambda_{vf} \\ \lambda_{\theta c}(t_f) - \lambda_{\theta f} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_{zc}(t_f) - \lambda_{zf} \end{vmatrix} \qquad (26)$$

unde $[T]$ este matricea de tranziție, se ia la prima iterație egală cu 5×10^{-1} descrescînd la iterațiile următoare pînă la 5×10^{-1} cînd $\lambda_{vc}(t_f)$ $\lambda_{\theta c}(t_f) \ldots \lambda_{zc}(t_f)$ ating valorile finale cu precizia dorită.

6. APLICAȚIE NUMERICĂ

Pentru a ilustra metoda s-au efectuat aplicații numerice cu următoarele date

$$V_i = 8000 \text{ m/s}, \qquad C_{x0} = 0{,}02,$$
$$\theta_i = 4°, \qquad k = 0{,}55,$$
$$z_i = 110\,000 \text{ m}, \qquad \beta = 1{,}395\,10^{-4} \text{ m}^{-1},$$
$$\gamma_i = 0°, \varphi_i = \lambda_i = 45°, \qquad \rho_0 = 0{,}125 \text{ kgs}^2 \text{ m}^{-4},$$

fără a mai recurge la artificiul de adimensionalizare utilizat în [4].

În urma calculelor au rezultat legile optime de variație ale parametrilor mișcării dintre care pentru θ, γ, z, C_z acestea sînt înscrise în graficele din figurile 6 și 7.

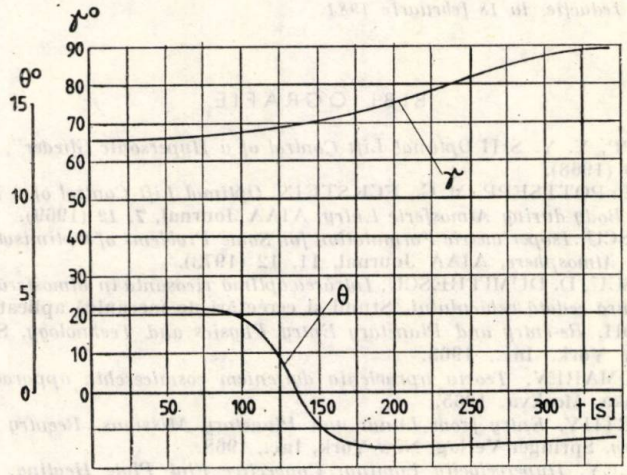


Fig. 6

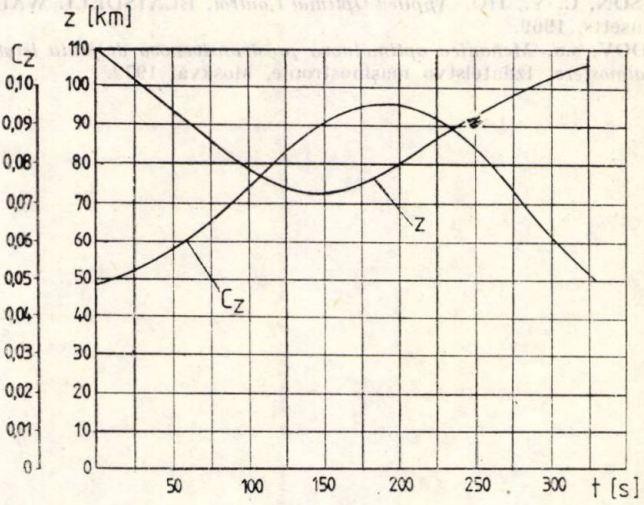


Fig. 7

7. CONCLUZII

Rezultatele calculelor arată că cel puțin unele din legile optime de variație ale parametrilor mișcării și variabilelor de control în cazul intrării optime tridimensionale ricoșante cu minimum de căldură cedată vehiculului au o alură asemănătoare cu cele obținute în cazul intrării optime bidimensionale.

Ceea ce trebuie remarcat în plus este variația unghiului de înclinare laterală γ care pornește la începutul evoluției cu o valoare aproape constantă crescînd apoi simțitor spre sfîrșitul acesteia.

De asemenea, se poate sublinia faptul că înălțimea minimă realizată se înscrie în domeniul valorilor menționate în paragraful 4 pentru care aproximația $C_f' = \text{const.}$ este legitimă.

Primită la redacție la 18 februarie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. L. POTTSEPP, Y. Y. SHI *Optimal Lift Control of a Hypersonic Glieder*", AIAA Journal, **6**, *6* (1968).
2. Y. Y. SHI, L. POTTSEPP, M. C., ECKSTEIN, *Optimal Lift Control of a Hypersonic Lifting Body during Atmosferic Entry*, AIAA Journal, **7**, *12* (1969).
3. A. MARINESCU, *Isoperimetric Formulation for Some Problems of Optimisation of the Entry into Atmosphere*, AIAA Journal, 11, 12 (1973).
4. A. MARINESCU, D. DUMITRESCU, *Intrarea optimă ricoșantă în atmosferă cu minimum de căldură cedată vehiculului*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **35**, *3* (1976).
5. W. H. T. LOH, *Re-entry and Planetary Entry Physics and Technology*, Springer Verlag, New York, Inc., 1968.
6. V. M. PONOMAREV, *Teoria upravlenia dvijeniem cosmiceschih apparatov*, Izdatelstvo Nauka, Moskva, 1965.
7. J. F. MCCARTHY, *Entry from Lunar and Planetary Missions. Reentry and Planetary Entry*, Springer Verlag, New York, Inc., 1968.
8. M. G. HANLEY, *Hypervelocity Laminar Convective Flat Plate Heating*, ARS Journal, **32**, *11* (1962).
9. A. E. BRYSON, C. Y., HO, *Applied Optimal Control*, BLAISDELL WALTHAM, Massachusetts, 1969.
10. L. M. SCADOV, ș.a. *Mehanica optimalnovo prostranstvenovo dvijenia letatelnih apparatov v atmosfere*, Izdatelstvo mașinostronie, Moskva, 1972.

PLACĂ ÎNCASTRATĂ PE CONTUR, RIGIDIZATĂ CU GRINZI PRINSE CONTINUU ȘI DISPUSE PE O DIRECȚIE

de GABRIEL D. POPA
Trustul de construcții Galați

Se stabilește metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru placa încastrată pe contur, rigidizată cu grinzi dispuse pe o direcție și prinse continuu. Conlucrarea elastică dintre placă, nervurile late, nervurile înguste și diafragme este luată în considerare prin egalarea săgeților pe muchiile în contact.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Vom considera structura, încastrată pe întreg conturul, alcătuită dintr-o placă de grosime constantă h rigidizată cu grinzile G_i, G_j, G_k, G_l, G_u, G_v, plasate excentric față de placă și dispuse după direcția axei de coordonate Oy (fig. 1).

Îmbinarea dintre placă (tablă) și grinzi (profiluri metalice) este presupusă continuă fiind realizată în mod obișnuit prin cordoane de sudură pe muchiile în contact ale tălpilor superioare ale profilurilor metalice cu tabla.

Convenind să numim nervuri late, grinzile cu secțiuni transversale oarecare la care lățimile tălpilor superioare nu pot fi neglijate în comparație cu deschiderile plăcii, nervuri înguste, grinzile cu secțiuni transversale simetrice față de axele verticale și la care lățimile tălpilor superioare pot fi neglijate față de deschiderile plăcii, diafragme, grinzile la care rigiditatea la torsiune nu este importantă în raport cu rigiditatea la încovoiere, precizăm că grinzile G_i, G_j sînt presupuse ca făcînd parte din categoria nervurilor late, grinzile G_k, G_l din categoria nervurilor înguste, iar grinzile G_u, G_v din categoria diafragmelor.

Pentru structura considerată, care reprezintă o placă ortotropă cu ortotropie structurală, se pune problema determinării stării de eforturi atît din placă, cît și din fiecare grindă în parte, ținînd seama de conlucrarea elastică dintre elementele componente. Rezolvarea problemei revine deci la stabilirea expresiilor corespunzătoare ale săgeților plăcii și grinzilor, provenite din încovoiere, precum și ale rotirilor grinzilor, provenite din torsiune, sub acțiunea încărcării exterioare de suprafață $p_0(x, y)$ ce acționează asupra plăcii.

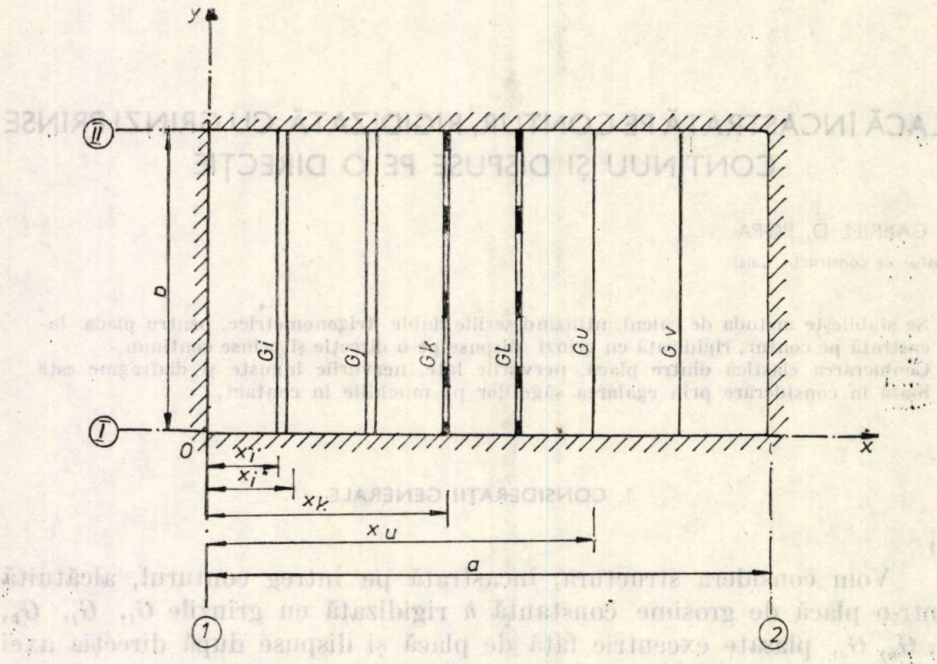


Fig. 1

După cum este cunoscut, din teoria clasică a plăcilor plane, expresia $w(x, y)$ a săgeților plăcilor trebuie să satisfacă ecuația cu derivate parțiale de ordinul al patrulea

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \tag{1.a}$$

Analog, din statica grinzii drepte, expresia $w(y)$ a săgeților grinzilor, provenite din încovoiere, trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară tot de ordinul al patrulea

$$\frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{q(y)}{EI}, \tag{1.b}$$

iar expresia $\theta(y)$ a rotirilor grinzilor, provenite din torsiune, trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară de ordinul al doilea

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = \frac{m(y)}{GJ}. \tag{2.a}$$

Dacă s-a stabilit expresia $w(x, y)$, a săgeților plăcii, eforturile aferente unității de lățime de placă se determină din relațiile

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{2.b}$$

iar dacă s-au stabilit expresiile $w(y)$, $\theta(y)$, ale săgeților și rotirilor grinzilor, eforturile secționale din aceste elemente se determină din relațiile

$$M = -EI\frac{d^2w}{dy^2}; \quad T = -EI\frac{d^3w}{dy^3}, \quad M_t = GJ\frac{d\theta}{dy}. \tag{3}$$

Prin principala ipoteză de lucru adoptată, constînd în schematizarea legăturilor dintre elementele structurii, vom admite că grinzile sînt legate pendular de placă pe liniile în contact ce corespund muchiilor tălpilor superioare ale grinzilor (fig. 2); în felul acesta condițiile de con-

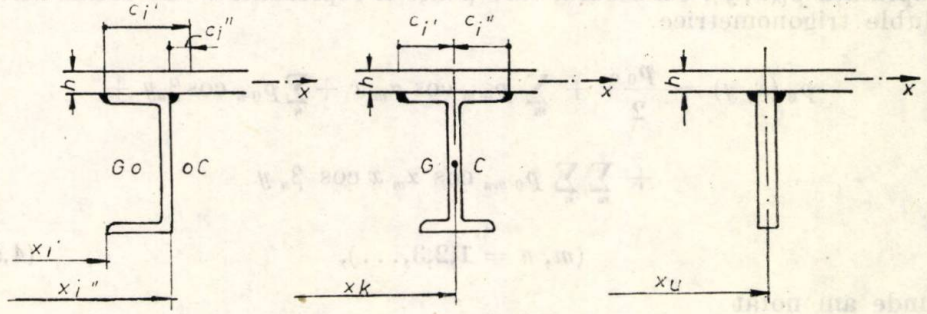


Fig. 2

lucrare elastică dintre placă și grinzi vor trebui să exprime egalitatea săgeților plăcii și grinzilor pe aceste linii.

Pentru efectuarea studiului se alege sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ astfel că planul xOy coincide cu planul median al plăcii, iar axa Oz este orientată în jos.

Caracteristicile geometrice și mecanice ale structurii studiate se definesc după cum urmează:

a, b — deschiderile de calcul ale platelajului,

α, β — rapoarte ale laturilor structurii,

E, μ, $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ — constantele elastice ale materialului,

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii,

I, J — momentul de inerție și caracteristica de torsiune ale grinzii curente.

În legătură cu caracteristicile de calcul ale grinzilor, așa cum rezultă din figura 2, mai trebuie precizat că:

— indicii' (prim) și ''(secund) indică faptul că mărimea respectivă este aferentă muchiei profilului aflată la stînga și respectiv la dreapta axei ce trece prin centrul de greutate G al secțiunii transversale a acestuia;

— mărimile $c_{i'}$, $c_{i''}$, $c_{k'}$, $c_{k''}$, se măsoară între muchiile corespunzătoare ale profilului și axa ce trece prin centrul de rotire C al secțiunii transversale a acestuia fiind pozitive dacă măsurarea s-a făcut în sensul pozitiv al axei Ox.

2. STABILIREA METODEI DE CALCUL

După suprimarea legăturilor pendulare dintre placă și muchiile tălpilor superioare ale grinzilor și înlocuirea acestora prin încărcări liniare, structura considerată se separă într-o placă izotropă, încastrată pe întreg conturul, și într-o familie de grinzi încastrate la capete.

Ținînd seama de modul de rezemare al structurii pe contur, stabilirea metodei de calcul se va face utilizînd seriile duble trigonometrice pare față de ambele coordonate x și y.

Referindu-ne mai întîi la placa izotropă, încastrată pe întreg conturul, constatăm că asupra acesteia acționează încărcarea exterioară de suprafață $p_0(x, y)$, cunoscută, care poate fi reprezentată sub forma seriei duble trigonometrice

$$p_0(x, y) = \frac{p_{0,0}}{2} + \sum_m p_{0,m} \cos \alpha_m x + \sum_n p_{0,n} \cos \beta_n y + \sum_m \sum_n p_{0,mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \qquad (m, n = 1,2,3,\ldots), \tag{4.a}$$

unde am notat

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}, \tag{4.b}$$

încărcările liniare $p_{i'}(y), p_{i''}(y), \ldots, p_{k'}(y), p_{k''}(y), \ldots, p_n(y), \ldots$ necunoscute, care pot fi reprezentate sub forma seriilor duble trigonometrice

$$p_{i'}(x, y) = \frac{p_{i',0}}{2a} + \frac{p_{i'0}}{a} \sum_m \cos \alpha_m x_i, \cos \alpha_m x + \frac{1}{a} \sum_n p_{i'',n} \cos \beta_n y + \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{i',n} \cos \alpha_m x_{i'} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$p_{i''}(x, y) = \frac{p_{i'',0}}{2a} + \frac{p_{i'',0}}{a} + \sum_m \cos \alpha_m x_{i''} \cos \alpha_m x + \frac{1}{a} \sum_n p_{i'',n} \cos \beta_n y + \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{i'',n} \cos \alpha_m x_{i''} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

. . . . . .

$$p_{k'}(x, y) = \frac{p_{k',0}}{2a} + \frac{p_{k',0}}{a} \sum_m \cos \alpha_m x_{k'} \cos \alpha_m x + \frac{1}{a} \sum_n p_{k',n} \cos \beta_n y_i + \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{k',n} \cos \alpha_m x_{k'} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$p_{k''}(x, y) = \frac{p_{k'',0}}{2a} + \frac{p_{k'',0}}{a} \sum_m \cos \alpha_m x_{k''} \cos\alpha_m x + \frac{1}{a} \sum_n p_{k'',n} \cos \beta_n y +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{k'',n} \cos\alpha_m x_{k''} \cos\alpha_m x \cos \beta_n y ,$$

. . . . . .

$$p_u (x, y) = \frac{p_{u,0}}{2a} + \frac{p_{u,0}}{a} \sum_m \cos\alpha_m x_u \cos\alpha_m x + \frac{1}{a} \sum_n p_{u,n} \cos \beta_m y +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{u,m} \cos\alpha_m x_u \cos\alpha_m x \cos \beta_n y$$

. . . . . .

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (4.c)$$

precum și reacțiunile liniare $p_1(y)$, $p_2(y)$, $p_{\mathrm{I}}(x)$, $p_{\mathrm{II}}(x)$, necunoscute, care pot fi reprezentate sub forma seriilor duble trigonometrice

$$p_1(x,y) = \frac{p_{1,0}}{2a} + \frac{p_{1,0}}{a} \sum_m \cos\alpha_m x + \frac{1}{a} \sum_n p_{1,n} \cos \beta_n y +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{1,n} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y ,$$

$$p_2(x, y) = \frac{p_{2,0}}{2a} + \frac{p_{2,0}}{a} \sum_m \cos m\pi \cos \alpha_m x + \frac{1}{a} \sum_m p_{2,n} \cos \beta_n y +$$

$$+ \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{2,n} \cos m\pi \cos\alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$p_{\mathrm{I}} (x, y) = \frac{p_{1,0}}{2b} + \frac{1}{b} \sum_m p_{\mathrm{I},m} \cos\alpha_m x + \frac{p_{\mathrm{I},0}}{b} \sum_m \cos \beta_m y +$$

$$+ \frac{2}{b} \sum_m \sum_n p_{\mathrm{I},m} \cos\alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$p_{\mathrm{II}} (x, y) = \frac{p_{\mathrm{II},0}}{2b} + \frac{1}{b} \sum_m p_{\mathrm{II},m} \cos\alpha_m x + \frac{p_{\mathrm{II},0}}{b} \sum_n \cos n\pi \cos \beta_n y +$$

$$+ \frac{2}{b} \sum_m \sum_n p_{\mathrm{II},m}, \cos n\pi \cos\alpha_m x \cos \beta_n y$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (4.d)$$

adică încărcarea totală

$$q(x, y)=\frac{q_0}{2}+\sum_m q_m \cos\alpha_m x+\sum_n q_n \cos\beta_n y+\sum_m\sum_n q_{mn}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y=$$

$$=\frac{p_{0,0}}{2}+\frac{1}{2a}(p_{i',0}+p_{i'',0}+\dots+p_{k',0}+p_{k'',0}+\dots+$$

$$+p_{u,0}+\dots+p_{1,0}+p_{2,0})+\frac{1}{2b}(p_{\mathrm{I},0}+p_{\mathrm{II},0})+$$

$$+\sum_m\Big[p_{0,m}+\frac{1}{a}(p_{i',0}\cos\alpha_m x_{i'}+p_{i'',0}\cos\alpha_m x_{i''}+\dots+$$

$$+p_{k',0}\cos\alpha_m x_{k'}+p_{k'',0}\cos\alpha_m x_{k''}+\dots+p_{u,0}\cos\alpha_m x_u+$$

$$+\dots+p_{1,0}+p_{2,0}\cos m\pi)+\frac{1}{b}(p_{\mathrm{I},m}+p_{\mathrm{II},m})\Big]\cos\alpha_m x+$$

$$+\sum_m\Big[p_{0,n}+\frac{1}{a}(p_{i',u}+p_{i'',n}+\dots+p_{k',n}+p_{k'',n}+\dots+$$

$$+p_{u,n}+\dots+p_{1,n}+p_{2,n})+\frac{1}{b}(p_{1,0}+p_{\mathrm{II},0}\cos n\pi)\Big]\cos\beta_n y+$$

$$+\sum_m\sum_n\Big[p_{0,mn}+\frac{2}{a}(p_{i',n}\cos\alpha_m x_{i'}+p_{i'',n}\cos\alpha_m x_{i''}+\dots+$$

$$+p_{k',n}\cos\alpha_m x_{k'}+p_{k'',n}\cos\alpha_m x_{k''}+\dots+p_{u,n}\cos\alpha_m x_u+$$

$$+\dots+p_{1,n}+p_{2,n}\cos m\pi)+$$

$$+\frac{2}{b}(p_{\mathrm{I},m}+p_{\mathrm{II},m}\cos n\pi)\Big]\cos\alpha_m x\cos\beta_n y$$

$$(m, n=1, 2, 3,\dots). \tag{4.e}$$

Întrucît încărcările liniare p_k, (y), $p_{k''}(y)$ provin de la tălpile superioare ale unei nervuri înguste, este justificată adoptarea următoarelor condiții de bază:

$$c_{k'}=-c_{k''}=c_k\,,\ \frac{c_k}{a}\to 0. \tag{4.f}$$

În conformitate cu prima condiție (4.f) devine posibilă gruparea necunoscutelor aferente muchiilor tălpilor superioare ale nervurilor înguste sub forma

$$p_{k',0} + p_{k'',0} = s_{k',0},$$

$$-p_{k',0} + p_{k'',0} = \frac{s_{k'',0}}{c_k}, \tag{4.g}$$

$$p_{k'n} + p_{k'',n} = s_{k',n},$$

$$-p_{k',n} + p_{k'',n} = \frac{s_{k'',n}}{c_k},$$

de unde rezultă

$$p_{k',0} = \frac{1}{2}\left(s_{k',0} - \frac{s_{k'',0}}{c_k}\right),$$

$$p_{k'',0} = \frac{1}{2}\left(s_{k',0} + \frac{s_{k'',0}}{c_k}\right), \tag{4.h}$$

$$p_{k',n} = \frac{1}{2}\left(s_{k',n} - \frac{s_{k'',n}}{c_k}\right),$$

$$p_{k'',n} = \frac{1}{2}\left(s_{k',n} + \frac{s_{k''n}}{c_k}\right),$$

și unde am notat :

$s_{k',0}$, $s_{k',n}$ — coeficienții de serie ai încărcărilor liniare ce acționează pe placă în dreptul nervurii înguste G_k ;

$s_{k'',0}$, $s_{k'',n}$ — coeficienții de serie ai momentului încovoietor liniar ce acționează pe placă în dreptul aceleiași nervuri.

În legătură cu notațiile de mai sus trebuie precizat că indicii '(prim) și ''(secund) ce intervin au aici numai rolul de a individualiza necunoscutele și nu mai au aici o legătură cu una sau alta din muchiile tălpii superioare ale nervurii înguste G_k.

Întrucît, din motive de echilibru, încărcarea medie pe placă, provenind de la încărcarea exterioară de suprafață, încărcările liniare aferente muchiilor nervurilor și reacțiunile liniare de pe contur, trebuie să fie nulă, se poate scrie :

$$p_{0,0} + \frac{1}{a}(p_{i',0} + p_{i'',0} + \ldots + s_{k',0} + \ldots + p_{u,0} + \ldots + p_{1,0} + p_{2,0}) +$$

$$+ \frac{1}{b}(p_{I,0} + p_{II,0}) = 0. \tag{4.i}$$

Înlocuind (4.i), (4.h) în (4.e) și ținînd seama de cea de-a doua condiție (4.f,) se trece la limită obținîndu-se expresiile definitive ale coeficienților de serie ai încărcării totale a plăcii izotrope:

$$q_0 = 0,$$

$$q_m = p_{0,m} + \frac{1}{a}(p_{i',0}\cos\alpha_m x_{i'} + p_{i'',0}\cos\alpha_m x_{i''} + \ldots +$$

$$+ s_{k',0}\cos\alpha_m x_k - s_{k'',0}\alpha_m \sin\alpha_m x_k + \ldots + p_{u,0}\cos\alpha_m x_u +$$

$$+ \ldots + p_{1,0} + p_{2,0}\cos m\pi) + \frac{1}{b}(p_{\mathrm{I},m} + p_{\mathrm{II},m}),$$

$$q_n = p_{0,n} + \frac{1}{a}(p_{i',n} + p_{i'',n} + \ldots + s_{k',n} + \ldots + \quad (4.j)$$

$$+ p_{u,n} + \ldots + p_{1,n} + p_{2,n}) + \frac{1}{b}(p_{\mathrm{I},0} + p_{\mathrm{II},0}\cos n\pi),$$

$$q_{mn} = p_{0,mn} + \frac{2}{a}(p_{i',n}\cos\alpha_m x_{i'} + p_{i'',n}\cos\alpha_m x_{i''} + \ldots +$$

$$+ s_{k',n}\cos\alpha_m x_k - s_{k'',n}\alpha_m \sin\alpha_m x_k + \ldots + p_{u,n}\cos\alpha_m x_u +$$

$$+ \ldots + p_{1,n} + p_{2,n}\cos m\pi) + \frac{2}{b}(p_{\mathrm{I},m} + p_{\mathrm{II},m}\cos n\pi).$$

Expresia $w(x, y)$, a săgeților plăcii, ce poate fi de asemenea reprezentată sub forma seriei duble trigonometrice

$$w(x, y) = \frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos\alpha_m x + \sum_n w_n \cos\beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn}\cos\alpha_m x \cos\beta_n y$$

$$(m, n = 1,2,3\ldots), \qquad (4.k)$$

care satisface condițiile de rotire nulă pe contur, trebuie să verifice ecuația (1. a) astfel că rezultă

$$w_m = \frac{q_m}{D\alpha_m^4}, \quad w_n = \frac{q_n}{D\beta_n^4}, \quad w_{mn} = \frac{q_{mn}}{DN_{mn}}, \qquad (4.l)$$

unde am notat

$$N_{mn} = (\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2. \qquad (4.m)$$

Aceeași expresie, a săgeților plăcii, trebuie să satisfacă și condițiile de săgeată nulă pe contur

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m + \sum_n w_n \cos \beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \beta_n y = 0 ,$$

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos m\pi + \sum_n w_n \cos \beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos m\pi \cos \beta_n y = 0,$$

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos \alpha_m x + \sum_n w_n + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \alpha_m x = 0 ,$$

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos \alpha_m x + \sum_n w_n \cos n\pi + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos n\pi \cos \alpha_m x = 0$$

$$(m = \overline{1, M}; \quad n = \overline{1, N})$$

sau

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m = 0 ; \quad \frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos m\pi = 0$$

$$(m = \overline{1, M}; \quad n = \overline{1, N}),$$

$$\frac{w_0}{2} + \sum_n w_n = 0 ; \quad \frac{w_0}{2} + \sum_n w_n \cos n\pi = 0$$

$$(m = \overline{1, M}; \quad n = \overline{1, N}),$$

$$w_n + \sum_m w_{mn} = 0 ; \quad w_n + \sum_m w_{mn} \cos m\pi = 0$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots ; \quad m = \overline{1, M}),$$

$$w_m + \sum_n w_{mn} = 0 ; \quad V_m + \sum_n w_{mn} \cos n\pi = 0$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots , \quad n = 1, N),$$

de unde rezultă

$$w_0 = -2 \sum_n w_n \quad (m = \overline{1, M}; \quad n = \text{par}) \qquad (4.\text{n})$$

și

$$\sum_m w_m \cos^2 \frac{m\pi}{2} = \sum_n w_n \cos^2 \frac{n\pi}{2},$$

$$\sum_m w_m \sin^2 \frac{m\pi}{2} = 0 ; \quad \sum_n w_n \sin^2 \frac{n\pi}{2} = 0$$

$$(m = \overline{1, M}; \quad n = \overline{1, N}), \qquad (4.\text{o})$$

$$\sum_m w_{mn} + w_n = 0,$$

$$\sum_m w_{mn} \cos m\pi = 0$$

$$n = (1,2,3,\ldots ; m = \overline{1, M}),$$

$$\sum_n w_{mn} + w_m = 0,$$

$$\sum_n w_{mn} \cos n\pi + w_m = 0$$

$$(m = 1, 2, 3,\ldots ; n = \overline{1, N}).$$

În particular, săgeţile plăcii pe liniile în contact cu grinzile se scriu :

$$w(x_{i'},y) = \frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos\alpha_m x_{i'} + \sum_n w_n \cos\beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos\alpha_m x_{i'} \cos\beta_n y,$$

$$w(x_{i''}y) = \frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos\alpha_m x_{i''} + \sum_n w_n \cos\beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos\alpha_m x_{i''} \cos\beta_n y,$$

. . . . . .

$$w(x_{k'},y) = \frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos\alpha_m x_{k'} + \sum_n w_n \cos\beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos\alpha_m x_{k'} \cos\beta_n y,$$

$$w(x_{k''},\dot{y}) = \frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos\alpha_m x_{k''} + \sum_n w_n \cos\beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos\alpha_m x_{k''} \cos\beta_n y,$$

. . . . . .

$$w(x_u,y) = \frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos\alpha_m x_u + \sum_n w_n \cos\beta_n y + \sum_m \sum_n w_{mn} \cos\alpha_m x_u \cos\beta_n y,$$

. . . . . .

$$(m = \overline{1, M} ; n = \overline{1, N}). \qquad (4.p)$$

Referindu-ne apoi la familia de grinzi, încastrate la capete, constatăm că asupra acesteia acţionează încărcările liniare $-p_{i'}(y)$, $-p_{i''}(y),\ldots$, $-p_{k'}y)$, $-p_{k''}(y),\ldots$, $-p_u(y),\ldots$, necunoscute, ce pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$-p_{i'}(y) = -\frac{p_{i',0}}{2} - \sum_n p_{i',n} \cos\beta_n y,$$

$$-p_{i''}(y) = -\frac{p_{i'',0}}{2} - \sum_n p_{i'',n} \cos\beta_n y,$$

$$-p_{k'}(y) = -\frac{p_{k',0}}{2} - \sum_n p_{k',n} \cos \beta_n y, \qquad (5.\text{ a})$$

$$-p_{k''}(y) = -\frac{p_{k'',0}}{2} - \sum_n p_{k'',n} \cos \beta_n y,$$

. . . . . .

$$-p_u(y) = -\frac{p_{u,0}}{2} - \sum_n p_{u,n} \cos \beta_n y,$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

precum şi reacţiunile concentrate $-P_{i'I}$; $-P_{i''I}$; $-P_{i'II}$, $P_{i''II}$, ..., $-P_{k'I}$, $-P_{k''I}$, $-P_{k'II}$, $-P_{k''II}$, ..., $-P_{uI}$, $-P_{uII}$, ... necunoscute, ce pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$-P_{i'I}(y) = -\frac{P_{i'I}}{b}(1 + 2\sum_n \cos \beta_n y),$$

$$-P_{i''I}(y) = -\frac{P_{i''I}}{b}(1 + 2\sum_n \cos \beta_n y),$$

$$-P_{i'II}(y) = -\frac{P_{i'II}}{b}(1 + 2\sum_n \cos n\pi \cos \beta_n y),$$

$$-P_{i''II}(y) = -\frac{P_{i''II}}{b}(1 + 2\sum_n \cos n\pi \cos \beta_n y),$$

. . . (5. b)

$$-P_{k'I}(y) = -\frac{P_{k'I}}{b}(1 + 2\sum_n \cos \beta_n y),$$

$$-P_{k''I}(y) = -\frac{P_{k''I}}{b}(1 + 2\sum_n \cos \beta_n y),$$

$$-P_{k'II}(y) = -\frac{P_{k'II}}{b}(1 + 2\sum_n \cos n\pi \cos \beta_n y),$$

$$-P_{k''II}(y) = -\frac{P_{k''II}}{b}(1 + 2\sum_n \cos n\pi \cos \beta_n y),$$

. . . . . .

$$-P_{u\mathrm{I}}(y) = -\frac{P_{u\mathrm{I}}}{b}(1 + 2\sum_n \cos\beta_n y),$$

$$-P_{u\mathrm{II}}(y) = -\frac{P_{u\mathrm{II}}}{b}(1 + 2\sum_n \cos n\pi \cos\beta_n y),$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

adică încărcările totale

$$q_i(y) = \frac{q_{i,0}}{2} + \sum_n q_{i,n}\cos\beta_n y =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}(p_{i',0} + p_{i'',0}) + \frac{1}{b}(P_{i'\mathrm{I}} + P_{i''\mathrm{I}} + P_{i'\mathrm{II}} + P_{i''\mathrm{II}})\right] -$$

$$-\sum_n \left\{p_{i',n} + p_{i'',n} + \frac{2}{b}[P_{i'\mathrm{I}} + P_{i''\mathrm{I}} + (P_{i'\mathrm{II}} + P_{i''\mathrm{II}})\cos n\pi]\right\}\cos\beta_n y,$$

. . . . . .

$$q_k(y) = \frac{q_{k,0}}{2} + \sum_n q_{k,n}\cos\beta_n y =$$

$$= -\left[\frac{s_{k',0}}{2} + \frac{1}{b}(P_{k'\mathrm{I}} + P_{k''\mathrm{I}} + P_{k'\mathrm{II}} + P_{k''\mathrm{II}})\right] -$$

$$-\sum_n \left\{s_{k',n} + \frac{2}{b}\left[P_{k'\mathrm{I}} + P_{k''\mathrm{I}} + (P_{k'\mathrm{II}} + P_{k''\mathrm{II}})\cos n\pi\right]\right\}\cos\beta_n y,$$

. . . . . .

$$q_u(y) = \frac{q_{u,o}}{2} + \sum_n q_{u,n}\cos\beta_n y =$$

$$= -\left[\frac{p_{u,o}}{2} + \frac{1}{b}(P_{u\mathrm{I}} + P_{u\mathrm{II}})\right] -$$

$$-\sum_n \left[p_{u,n} + \frac{2}{b}(P_{u\mathrm{I}} + P_{u\mathrm{II}}\cos n\pi)\right]\cos\beta_n y,$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (5.c)$$

precum și momentele de torsiune distribuite

$$m_i(y) = \frac{m_{i,0}}{2} + \sum_n m_{i,n} \cos \beta_n y =$$

$$= \frac{1}{2}(c_{i'} p_{i',0} + c_{i''} p_{i'',0}) \frac{1}{b} [c_{i'}(P_{i'I} + P_{i'II}) + c_{i''}(P_{i''I} + P_{i''II})] +$$

$$+ \sum_n \left\{ c_{i'} p_{i',n} + c_{i''} p_{i'',n} + \frac{2}{b} [c_{i'}(P_{i'I} + P_{i'II} \cos n\pi) + c_{i''}(P_{i''I} + \right.$$

$$\left. + P_{i''II} \cos n\pi)] \right\} \cdot \cos \beta_n y$$

. . . . . .

$$m_k(y) = \frac{m_{k,0}}{2} + \sum_n m_{k,n} \cos \beta_n y =$$

$$= -\frac{s_{k',0}}{2} + \frac{1}{b} [c_k (P_{k'I} + P_{k'II}) - c_k (P_{k''I} + P_{k''II})] +$$

$$+ \sum_n \left\{ -s_{k'',n} + \frac{2}{b} [c_k (P_{k'I} + P_{k'II} \cos n\pi) - c_k (P_{k''I} + \right.$$

$$\left. + P_{k''II} \cos n\pi)] \right\} \cos \beta_n y$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad (5.d)$$

Întrucît reacțiunile concentrate $-P_{k'I}$, $-P_{k''I}$, $-P_{k'II}$, $-P_{k''II}$ sînt aferente tălpilor superioare ale unei nervuri înguste, în conformitate cu prima condiție (4.f) devine posibilă gruparea necunoscutelor sub forma

$$P_{k'I} + P_{k''I} = S_{k'I}$$

$$-P_{k'I} + P_{k''I} = \frac{S_{k''I}}{c_k} \qquad (5.e)$$

$$P_{k'II} + P_{k''II} = S_{k'II}$$

$$-P_{k'II} + P_{k''II} = \frac{S_{k''II}}{c_k}$$

de unde rezultă

$$P_{k'\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left(S_{k'\mathrm{I}} - \frac{S_{k''\mathrm{I}}}{c_k}\right)$$

$$P_{k''\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left(S_{k'\mathrm{I}} + \frac{S_{k''\mathrm{I}}}{c_k}\right) \qquad (5.f)$$

$$P_{k'\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left(S_{k''\mathrm{I}} - \frac{S_{k''\mathrm{I}}}{c_k}\right)$$

$$P_{k''\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left(S_{k''\mathrm{II}} + \frac{S_{k''\mathrm{II}}}{c_k}\right)$$

unde am notat

$S_{k'\mathrm{I}}$ $S_{k'\mathrm{II}}$, — valorile reacțiunilor forțe concentrate la capetele nervurii înguste G_k;

$S_{k''\mathrm{I}}$, $S_{k''\mathrm{II}}$ — valorile reacțiunilor momente de torsiune concentrate la capetele aceleiași nervuri.

În legătură cu notațiile de mai sus trebuie și aici precizat că indicii ′(prim) și ″(secund) ce intervin nu mai au nici o legătură cu muchia din stînga și respectiv din dreapta ale nervurii înguste G_k.

Mai trebuie observat că întrucît forțele concentrate P reprezintă reacțiuni, la capetele grinzii dublu încastrate, din motive de echilibru se pot scrie condițiile de proiecții nule

$$\frac{1}{2}(p_{i',0} + p_{i'',0}) + \frac{1}{b}[(P_{i',\mathrm{I}} + P_{i''\mathrm{I}} + P_{i'\mathrm{II}} + P_{i''\mathrm{II}})] = 0$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2}s_{k',0} + \frac{1}{b}(S_{k'\mathrm{I}} + S_{k'\mathrm{II}}) = 0 \qquad (5.g)$$

. . . . . .

$$\frac{1}{2}p_{u,0} + \frac{1}{b}(P_{u\mathrm{I}} + P_{u\mathrm{II}}) = 0$$

și condițiile de momente de torsiune nule

$$\frac{1}{2}(c_{i'}\, p_{i',0} + c_{i''}\, p_{i'',0}) + \frac{1}{b}[c_{i'}\,(P_{i'\mathrm{I}} + P_{i'\mathrm{II}}) + c_{i''}\,(P_{i''\mathrm{I}} + P_{i''} \quad] = 0$$

. . . . . (5.h)

$$\frac{1}{2}s_{k'',0} + \frac{1}{b}(S_{k''\mathrm{I}} + S_{k''\mathrm{II}}) = 0.$$

Înlocuind (5.f), (5.g), (5.h) în (5.c), (5.d) se obțin expresiile definitive ale coeficienților de serie ai încărcărilor liniare totale ce acționează asupra grinzilor

$$q_{i,0} = 0\,;\; q_{i,n} = -\{p_{i',n},+\,p_{i'',n}+\frac{2}{b}[P_{i'\mathrm{I}}+P_{i''\mathrm{I}}+(P_{i'\mathrm{II}})+P_{i''\mathrm{II}}(\cos n\pi)]\}$$

. . . . . .

$$q_{k,0} = 0\,;\; q_{k,n} = -\left[s_{k',n}+\frac{2}{b}(S_{k'\mathrm{I}}+S_{k'\mathrm{II}}\cos n\pi)\right] \tag{5.i}$$

. . . . . .

$$q_{u,0} = 0\,;\; q_{u,n} = -\left[p_{u,n}+\frac{2}{b}(P_{u\mathrm{I}}+P_{u\mathrm{II}}\cos n\pi)\right]$$

. . . . . .

și ai momentelor de torsiune liniare totale ce acționează asupra nervurilor

$$m_{i,0} = 0\,;\; m_{i,n} = c_{i'}\,p_{i',n}+c_{i''}\,p_{i'',n}+\frac{2}{b}[c_{i'},(P_{i'\mathrm{I}}+P_{''\mathrm{II}}\cos n\,\pi)+$$

$$+\,c_{i''}\,(P_{i''\mathrm{I}}+P\cos n\pi)]\,,$$

. . . . . (5.j)

$$m_{k,0} = 0\,;\; m_{k,n} = -\left[s_{k'',n}+\frac{2}{b}(S_{k''\mathrm{I}}+S_{k''\mathrm{I}}\cos n\,\pi)\right],$$

. . . . . .

Expresiile $w_i(y),\ldots,w_k(y),\ldots,w_u(y),\ldots$, ale săgeților grinzilor ce pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$w_i\,(y) = \frac{w_{i,0}}{2}+\sum_n w_{i,n}\cos\beta_n\,y,$$

. . . . . .

$$w_k\,(y) = \frac{w_{k,0}}{2}+\sum_n w_{k,n}\cos\beta_n\,y\,, \tag{5.k}$$

. . . . . .

$$w_u(y) = \frac{w_{u,0}}{2} + \sum_n w_{u,n} \cos \beta_n y,$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

care satisfac condiţiile de rotire nulă din încovoiere la capete, trebuie să verifice ecuaţia (2.a), astfel că rezultă

$$w_{i,n} = \frac{q_{i,n}}{EI_i \beta_n^4}, \ldots, w_{k,n} = \frac{q_{k,n}}{EI_k \beta_n^4} \ldots, w_{u,n} = \frac{q_{u,n}}{EI_u \beta_n^4} \ldots, \tag{5.l}$$

Aceleaşi expresii, ale săgeţilor grinzilor trebuie să îndeplinească şi condiţiile de săgeată nulă la capete

$$\frac{w_{i,0}}{2} + \sum_n w_{i,n} = 0; \frac{w_{i,0}}{2} + \sum_n w_{i,n} \cos n\pi = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{w_{k,0}}{2} + \sum_n w_{k,n} = 0; \frac{w_{k,0}}{2} + \sum_n w_{k,n} \cos n\pi = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{w_{u,0}}{2} + \sum_n w_{u,n} = 0; \frac{w_{u,0}}{2} \sum_n w_{u,n} \cos n\pi = 0,$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

din care rezultă

$$w_{i,0} = -2 \sum_n w_{i,n}, \ldots, w_{n,0} = -2 \sum_n w_{k,n}, \ldots, w_{u,0} = -2 \sum_n w_{u,n}, \ldots$$

(n par) (5.m)

$$\sum_n w_{i,n} = 0, \ldots, \sum_n w_{k,n} = 0, \ldots, \sum_n w_{u,n} = 0, \ldots \tag{5.n}$$

(n impar).

Expresiile $\theta_i(y), \ldots \theta_k(y), \ldots$, ale rotirilor din torsiune ale nervurilor, ce pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice

$$\theta_i(y) = \frac{\theta_{i,0}}{2} + \sum_n \theta_{i,n} \cos \beta_n y,$$

. . .

$$\theta_k(y) = \frac{\theta_{k,0}}{2} + \sum_n \theta_{k,n} \cos \beta_n y, \tag{5.o}$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

trebuie să verifice ecuaţia (2, a) astfel că rezultă

$$\theta_{i,n} \frac{m_{i,n}}{GJ_i \beta_n^2}, \ldots \theta_{k,n} = \frac{m_{k,n}}{G_k J \beta_n^2}, \ldots \tag{5.p}$$

Aceleaşi expresii, ale rotirilor din torsiune ale nervurilor, trebuie să îndeplinească şi condiţiile de rotire nulă la capete

$$\frac{\theta_{i,0}}{2} + \sum_n \theta_{i,n} = 0; \frac{\theta_{i,0}}{2} + \sum_n \theta_{i,n} \cos n\pi = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\theta_{k,0}}{2} + \sum_n \theta_{k,n} = 0; \frac{\theta_{k,0}}{2} + \sum_n \theta_{k,n} \cos n\pi = 0$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

din care rezultă

$$\theta_{i,0} = -2 \sum_n \theta_{i,n}, \ldots, \theta_{k,0} = -2 \sum_n \theta_{k,n}, \ldots \tag{5.r}$$

(n par)

$$\sum_n \theta_{i,n} = 0, \ldots, \sum_n \theta_{k,n} = 0, \ldots$$

(n impar). (5.s)

În particular, săgeţile grinzilor pe liniile în contact cu placa se scriu

$$w_{i'}(y) = \frac{1}{2}(w_{i,0} - c_{i'}\theta_{i,0}) + \sum_n (w_{i,n} - c_{i'}, \theta_{i,n}) \cos \beta_n y,$$

$$w_{i''}(y) = \frac{1}{2}(w_{i,0} - c_{i''}\theta_{i,0}) + \sum_n (w_{i,n} - c_{i''}\theta_{i,n}) \cos \beta_n y,$$

. . . . . (5.t)

$$w_{k'}(y) = \frac{1}{2}(w_{k,0} - c_k\theta_{k,0}) + \sum_n (w_{k,n} - c_k\theta_{k,n}) \cos \beta_n y,$$

$$w_{k''}(y) = \frac{1}{2}(w_{k,0} + c_k\theta_{k,0}) + \sum_n (w_{k,n} + c_k\theta_{k,n}) \cos \beta_n y,$$

. . .

$$w_u(y) = \frac{1}{2} w_{u,0} + \sum_n w_{u,n} \cos \beta_n y,$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Compatibilitatea poziţiei deformate a plăcii cu poziţiile deformate ale grinzilor se exprimă prin egalarea săgeţilor acestor elemente pe liniile în contact.

$$w(x_{i'}, y) = w_{i'}(y); \; w(x_{i''}, y) = w_{i''}(y),$$

. . . . . .

$$w(x_{k'}, y) = w_{k'}(y); \; w(x_{k''}, y) = w_{k''}(y),$$

. . . . . .

$$w(x_u, y) = w_u(y),$$

. . . . . .

astfel că în conformitate cu (4.p) și (5.t) se obțin condițiile

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos \alpha_m x_{i'} = \frac{1}{2}(w_{i,0} - c_{i'} \theta_{i,0}),$$

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_n \cos \alpha_m x_{i''} = \frac{1}{2}(w_{i,0} - c_{i''} \theta_{i,0}),$$

. . . . . .

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos \alpha_m x_{k'} = \frac{1}{2}(w_{k,0} - c_k \theta_{k,0}),$$

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m w_m \cos \alpha_m x_{k''} = \frac{1}{2}(w_{k,0} + c_k \theta_{k,0}), \qquad (\alpha)$$

. . . . . .

$$\frac{w_0}{2} + \sum_m + w_m \cos \alpha_m x_u = \frac{1}{2} w_{u,0},$$

. . . . . .

$$(m = \overline{1, M}, \quad n = \overline{1, N}),$$

și

$$w_n + \sum_m w_{mn} \cos \alpha_m x_{i'} = w_{i,n} - c_{i'} \theta_{i,n},$$

$$w_n + \sum_m w_{mn} \cos \alpha_m x_{i''} = w_{i,n} - c_{i''} \theta_{i,n}, \qquad (3)$$

. . .

$$w_n + \sum_m w_{mn} \cos \alpha_m x_k = w_{k,n} - c_k \theta_{k,n},$$

$$w_n + \sum_m w_{mn} \cos \alpha_m x_k = w_{k,n} + c_k \theta_{k,n},$$

. . . . . .

$$w_n + \sum_m w_{mn} \cos \alpha_m x_u = w_{un},$$

. . . . . .

$$(n = 1, 2, 3, \ldots; \; m = \overline{1, M}).$$

Compatibilitatea poziției deformate a plăcii cu modul de rezemare pe contur precum și compatibilitatea sistemului de forțe ce acționează

asupra plăcii se exprimă prin scrierea grupată a relaţiilor (4.o), (4i) obţinîndu-se condiţiile

$$w_n + \sum_m w_{mn} = 0\,; \quad w_n + \sum_m w_{mn} \cos n\,\pi = 0 \qquad (\beta_1)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots\,;\ m = \overline{1, M}),$$

$$w_m + \sum_n w_{mn} = 0\,; \quad w_m + \sum_m w_{mn} \cos n\,\pi = 0$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots\,;\ \beta = \overline{1, N}),$$

$$p_{0,0} + \frac{1}{a}(p_{i,0} + p_{i'',0} + \ldots + s_{k',0} + \ldots + \qquad (\gamma)$$

$$+ p_{u,0} + \ldots + p_{1,0} + p_{2,0}) +$$

$$+ \frac{1}{b}(p_{\mathrm{I},0} + p_{\mathrm{II},0}) = 0,$$

$$\sum_m w_m \cos^2 \frac{m\pi}{2} = \sum_n w_n \cos^2 \frac{n\pi}{2}, \qquad (\delta)$$

$$\sum_m w_m \sin^2 \frac{m\pi}{2} = 0\,; \quad \sum_n w_n \sin^2 \frac{n\pi}{2} = 0$$

$$(n = \overline{1, M}\,;\ n = \overline{1\,N}).$$

Compatibilitatea poziţiilor deformate ale grinzilor cu modul de rezemare la capete precum şi compatibilitatea sistemelor de forţe ce acţionează asupra grinzilor se exprimă prin scrierea grupată a relaţiilor (5.g), (5.h), (5.n), (5.a)) obţinîndu-se condiţiile

$$P_{i'\mathrm{I}} + P_{i'\mathrm{II}} + P_{i''\mathrm{II}} + P_{i''\mathrm{II}} = -\frac{b}{2}(p_{i'0}\,, + p_{i'',0}\,),$$

$$c_{i'}(P_{i'\mathrm{I}} + P_{i'\mathrm{II}}) + c_{i''} + P_{i''\mathrm{I}}(P_{i''\mathrm{II}}) = -\frac{b}{2}(c_{i'}\,p_{i',0} + c_{i''}\,p_{i'',0}),$$

$$\sum_n W_{i,n} = 0\,; \sum_n \theta_{in} = 0 \quad (n \text{ impar}),$$

. . . . . .

$$S_{k'\mathrm{I}} + S_{k'\mathrm{II}} = -\frac{b}{2} s_{k',0},$$

$$S_{k''\mathrm{I}} + S_{k''\mathrm{II}} = -\frac{b}{2} s_{k'',0},$$

$$\sum_n w_{k,n} = 0 \; ; \; \sum_n \theta_{k,n} = 0 \; (n \text{ impar}), \qquad (\varepsilon)$$

. . . . . .

$$P_{u\mathrm{I}} + P_{u\mathrm{II}} = -\frac{b}{2} p_{u,0},$$

$$\sum_n w_{u,n} = 0 \; (n \text{ impar}),$$

. . . . . .

$$(n = \overline{1, N}).$$

Ţinînd seama succesiv de (α), (4.n), (4,o), (5.m), (5.1), (5.p), (4.g) (5.i), (5.j) se obţine sistemul de ecuaţii canonice

$$[\delta_{rt,0}]\{p_{t,0}\} + \{\Delta_{r,0}\} = 0$$

$$(r, t = i', i'', \ldots, k', k'', \ldots, u, \ldots;$$

$$p_{t,0} = p_{i',0}, p_{i'',0}, \ldots, s_{k',0}, s_{k'',0}, \ldots, p_{u,0} \ldots),$$

unde am notat

$$\delta_{i'i',0} = \sum_m \frac{\cos^2 \alpha_m x_{i'}}{\alpha_m^4} + aD \sum_n \gamma_{i'i',n},$$

$$\delta_{i'i'',0} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_{i'} \cos\alpha_m x_{i''}}{\alpha_m^4} + aD \sum_n \gamma_{i'i'',n},$$

$$\delta_{i'j',0} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_{i'} \cos\alpha_m x_{j'}}{\alpha_m^4},$$

$$\delta_{i'k',0} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_{i'}, \cos\alpha_m x_k}{\alpha_m^4},$$

$$\delta_{i'k'',0} = -\sum_m \frac{\cos\alpha_m x_i, \sin\alpha_m x_k}{\alpha_m^3},$$

$$\delta_{i'u,0} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_i, \cos\alpha_m x_u}{\alpha_m^4},$$

$$\gamma_{i'i',n} = \frac{1}{EI_i\beta_n^4} + \frac{c_{i'}^2}{GJ_i\beta_n^2},$$

$$\gamma_{i'i''n} = \frac{1}{EI_i\beta_n^4} + \frac{c_{i'}c_{i'}}{GJ_i\beta_n^2},$$

$$\gamma_{i''i'',n} = \frac{1}{EI_i\beta_n^4} + \frac{c_{i''}}{GJ_i\beta_n^2},$$

$$\Delta_{i',0} = \sum_m \frac{[ap_{0,m} + p_{i,0} + p_{2,0}\cos m\pi + \alpha(p_{I,m} + p_{II,m})]\cos\alpha_m x_{i'}}{\alpha_m^4} -$$

$$- a\sum_n \left[\frac{q_n}{\beta_n^4} + D(\gamma_{i'i',n}p_{i',n} + \gamma_{i'i'',n}p_{i'',n})\right],$$

$$\delta_{k'k',0} = \sum_m \frac{\cos^2\alpha_m x_k}{\alpha_m^4} + \frac{aD}{EI_k}\sum_n \frac{1}{\beta_n^4},$$

$$\delta_{k'k'',0} = -\sum_m \frac{\cos\alpha_m x_k \sin\alpha_m x_k,}{\alpha_m^3},$$

$$\delta_{k'l',0} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_k \cos\alpha_m x_l}{\alpha_m^4},$$

$$\delta_{k'l''0} = -\sum_m \frac{\cos\alpha_m x_k \sin\alpha_m \alpha_l}{\alpha_m^3},$$

$$\delta_{k'u,0} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_k \cos\alpha_m x_u}{\alpha_m^4},$$

$$\Delta_{k',0} = \sum_m \frac{[ap_{0,m} + p_{1,0} + p_{2,0}\cos m\pi + \alpha(p_{I,m} + p_{IIm})]\cos\alpha_m x_k}{\alpha_m^4} -$$

$$- a\sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\left(q_n + \frac{D}{EI_k}s_{k,n}\right),$$

$$\delta_{k''k'',0} = \sum_m \frac{\sin^2\alpha_m x_k}{\alpha_m^2} + \frac{aD}{GJ_k} \sum_n \frac{1}{\beta_n^2},$$

$$\delta_{k''l',0} = -\sum_m \frac{\sin \alpha_m x_k \cos \alpha_m x_1}{\alpha_m^3},$$

$$\delta_{k''l'',0} = \sum_m \frac{\sin \alpha_m x_k \sin \alpha_m x_1}{\alpha_m^2},$$

$$\delta_{k''u,0} = -\sum_m \frac{\sin\alpha_m x_k \cos\alpha_m x_u}{\alpha_m^3},$$

$$\Delta_{k'',0} = -\sum_m \frac{[ap_{0,m}+p_{1,0}+p_{2,0}\cos m\pi + \alpha(p_{1,m}+p_{II,m})]\sin \alpha_m x_k}{\alpha_m^3} -$$

$$-\frac{aD}{GJ_k} \sum_n \frac{s_{k'',n}}{\beta_n^2},$$

$$\delta_{uu,0} = \sum_m \frac{\cos^2\alpha_m x_u}{\alpha_m^4} + \frac{aD}{EI_u} \sum_n \frac{1}{\beta_n^4},$$

$$\delta_{uv,0} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_u \cos\alpha_m x_v}{\alpha_m^4},$$

$$\Delta_{u,0} = \sum_m \frac{[ap_{0,m} + p_{1,0} + p_{2,0}\cos n\pi + \alpha(p_{1,m} + p_{II,m})]\cos\alpha_m x_u}{\alpha_m^4} -$$

$$-a \sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\left(q_n + \frac{D}{EI_k} p_{u,n}\right)$$

$$(m = \overline{1, M};\ n = \overline{1, N},\quad n \text{ par}). \tag{6.b}$$

Ţinînd seama succesiv de (β), (β_1), (4.0), (5.1), (5.p), (4.j), (5.i), (5.j) se obţine sistemul de ecuaţii canonice

$$[\delta_{rt,n}]\{p_{t,n}\} + \{\Delta_{r,n}\} = 0 \tag{7.a}$$

$$(r, t = i', i'', \ldots, k', k'', \ldots, u, \ldots, 1, 2;$$

$$p_{t,n} = p_{i',n}, p_{i'',n}, \ldots, s_{k',n}, s_{k'',n}, \ldots, p_{u,n}, \ldots, p_{1,n}\, p_{2,n};$$

$$n = 1,\ n = 2,\ n = 3, \ldots, n = N),$$

unde am notat

$$\delta_{i'i',n} = \sum_m \frac{\cos^2 \alpha_m x_{i'}}{N_{mn}} + \frac{aD}{2} \gamma_{i'i',n} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{i'i'',n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_{i'} \cos \alpha_m x_{i''}}{N_{mn}} + \frac{aD}{2} \gamma_{i'i'',n} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{i'j',n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_{i'} \cos \alpha_m x_{j'}}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{i'k',n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_{i'} \cos \alpha_m x_k}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{i'k'',n} = \sum_m \frac{\alpha_m \cos \alpha_m x_i, \sin \alpha_m x_k}{N_{mn}},$$

$$\delta_{i'u,n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_i, \cos \alpha_m x_u}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{i'1,n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_{i'}}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{i',2n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_i, \cos m\pi}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\Delta_{i',n} = \sum_m \frac{\left[\frac{a}{2}(p_{0,mn} + \alpha(p_{I,m} + p_{II,m} \cos n\pi)\right] \cos \alpha_m x_{i'}}{N_{mn}} +$$

$$+ \frac{ap_{0,n} + \alpha(p_{I,0} + p_{II,0} \cos n\pi)}{2\beta_n^4} + D[(P_{i'I} + P_{i'II} \cos n\pi) \gamma_{i'i',n} +$$

$$+ (P_{i''I} + P_{i''II} \cos n\pi) \gamma_{i'i'',n}],$$

$$\delta_{k'k',n} = \sum_m \frac{\cos^2 \alpha_m x_k}{N_{mn}} + \frac{aD}{2EI_k \beta_n^4} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{k'k'',n} = -\sum_m \frac{\alpha_m \cos \alpha_m x_k \sin \alpha_m x_k}{N_{mn}},$$

$$\delta_{k'l',n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_k \cos \alpha_m x_1}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{k'l'',n} = -\sum_m \frac{\alpha_m \cos \alpha_m x_k \sin \alpha_m x_l}{N_{mn}},$$

$$\delta_{k'u,n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_k \cos \alpha_m x_u}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{k'1,n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_k}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\delta_{k'2,n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_k \cos m\pi}{N_{mn}} + \frac{1}{2\beta_n^4},$$

$$\Delta_{k',n} = \sum_m \frac{\left[\frac{a}{2} p_{0,mn} + \alpha (p_{I,m} + p_{II,m} \cos n\pi)\right] \cos \alpha_m x_k}{N_{mn}} +$$

$$+ \frac{a p_{0,n} + \alpha (p_{I,0} + p_{II,0} \cos n\pi)}{2\beta_n^4} + \frac{D}{EI_k \beta_n^4} (S_{k'I} + S_{k'II} \cos n\pi),$$

$$\delta_{k''k'',n} = \sum_m \frac{\alpha_m^2 \sin^2 \alpha_m x_k}{N_{mn}} + \frac{aD}{2GJ_k \beta_n^2},$$

$$\delta_{k''l',n} = -\sum_m \frac{\alpha_m \sin \alpha_m x_k \cos \alpha_m x_l}{N_{mn}},$$

$$\delta_{k''l'',n} = \sum_m \frac{\alpha_m^2 \sin \alpha_m x_k \sin \alpha_m x_l}{N_{mn}},$$

$$\delta_{k''u,n} = -\sum_m \frac{\alpha_m \sin \alpha_m x_k \cos \alpha_m x_u}{N_{mn}},$$

$$\delta_{k''1,n} = -\sum_m \frac{\alpha_m \sin \alpha_m x_k}{N_{mn}},$$

$$\delta_{k''2,n} = -\sum_m \frac{\alpha_m \sin \alpha_m x_k \cos m\pi}{N_{mn}},$$

$$\Delta_{k'',n} = -\sum_m \frac{\left[\frac{a}{2} p_{0,mn} + \alpha (p_{I,m} + p_{II,m} \cos n\pi)\right] \alpha_m \sin \alpha_m x_k}{N_{mn}} +$$

$$+ \frac{\alpha D}{GJ_k \beta_n^2} (S_{k''I} + S_{k''II}) \cos n\pi,$$

$$\delta_{uu,n} = \sum_m \frac{\cos^2 \alpha_m x_u}{N_{mn}} + \frac{aD}{2\,EI_u\,\beta_n^4} + \frac{1}{2\,\beta_n^4},$$

$$\delta_{uv,n} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_u \cos\alpha_m x_v}{N_{mn}} + \frac{1}{2\,\beta_n^4},$$

$$\delta_{u1,n} = \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_u}{N_{mn}} + \frac{1}{2\,\beta_n^4},$$

$$\delta_{u2,n} = \sum_m \frac{\cos\alpha_m x_u \cos m\pi}{N_{mn}} + \frac{1}{2\,\beta_n^4},$$

$$\Delta_{u,n} = \sum_m \frac{\left[\frac{a}{2} p_{0,mn} + \alpha\,(p_{\mathrm{I},m} + p_{\mathrm{II},m} \cos n\pi)\right] \cos \alpha_m x_u}{N_{mn}} +$$

$$+ \frac{ap_{0,n} + \alpha\,(p_{\mathrm{I},0} + p_{\mathrm{II},0} \cos n\pi)}{2\,\beta_n^4} + \frac{\alpha D}{EI_u\ \beta_n^4}\,(P_{u\mathrm{I}} + P_{u\mathrm{II}} \cos\ n\pi),$$

$$\delta_{11,n} = \sum_m \frac{1}{N_{mn}} + \frac{1}{2\,\beta_n^4},$$

$$\delta_{12,n} = \sum_m \frac{\cos m\pi}{N_{mn}} + \frac{1}{2\,\beta_n^4},$$

$$\Delta_{1,n} = \sum_m \frac{\left[\frac{a}{2} p_{0,mn} + \alpha\,(p_{\mathrm{I},m} + p_{\mathrm{II},m} \cos n\pi)\right]}{N_{mn}} +$$

$$+ \frac{ap_{0,n} + \alpha\,(p_{\mathrm{I},0} + p_{\mathrm{II},0} \cos n\pi)}{2\,\beta_n^4},$$

$$\delta_{22,n} = \sum_m \frac{1}{N_{mn}} + \frac{1}{2\,\beta_n^4},$$

$$\Delta_{2,n} = \sum_m \frac{\left[\frac{a}{2} p_{0,mn} + \alpha\,(p_{\mathrm{I},m} + p_{\mathrm{II},m} \cos n\pi)\right] \cos m\pi}{N_{mn}} +$$

$$+ \frac{ap_{0,n} + \alpha\,(p_{\mathrm{I},0} + p_{\mathrm{II},0} \cos n\pi)}{2\,\beta_n^4}$$

$$(m = \overline{1,\ M}). \qquad (7.\ b)$$

Ținînd seama succesiv de (γ), (4.0), (4.j), se obține sistemul de ecuații canonice

$$\delta_{\mathrm{I\,I},m}\, p_{\mathrm{I},m} + \delta_{\mathrm{I\,II},m}\, p_{\mathrm{II},m} + \Delta_{\mathrm{I},m} = 0,$$

$$\delta_{\mathrm{II\,I},m}\, p_{\mathrm{II},m} + \delta_{\mathrm{II\,II},m}\, p_{\mathrm{II},m} + \Delta_{\mathrm{II},m} = 0 \qquad (8.a)$$

$$(m = 1,\ m = 2,\ m = 3, \ldots,\ m = M),$$

unde am notat

$$\delta_{\mathrm{I\,I},m} = \sum_n \frac{1}{N_{mn}} + \frac{1}{2\alpha_m^4},$$

$$\delta_{\mathrm{I\,II},m} = \sum_n \frac{\cos n\pi}{N_{mn}} + \frac{1}{2\,\alpha_m^4},$$

$$\Delta_{\mathrm{I},m} = \frac{b}{2}\left(\sum_n \frac{\bar{q}_{mn}}{N_{mn}} + \frac{\bar{q}_m}{\alpha_m^4} \right),$$

$$\delta_{\mathrm{II\,II},m} = \sum_n \frac{1}{N_{mn}} + \frac{1}{2\alpha_m^4},$$

$$\Delta_{\mathrm{II},m} = \frac{b}{2}\left(\sum_n \frac{\bar{q}_{mn}\cos n\pi}{N_{mn}} + \frac{\bar{q}_m}{\alpha_m^4} \right),$$

$$\bar{q}_{mn} = q_{mn} - \frac{2}{b}(p_{\mathrm{I},m} + p_{\mathrm{II},m}\cos n\pi),$$

$$\bar{q}_m = q_m - \frac{1}{b}(p_{\mathrm{I},m} + p_{\mathrm{II},m})$$

$$(n = \overline{1, N}). \qquad (8.b)$$

Ținînd seama succesiv de (δ), (4.0), (4.j) obținem

$$p_{1,0} = \frac{1}{2}(A + C)\quad p_{2,0} = \frac{1}{2}(A - C), \qquad (9.a)$$

$$p_{\mathrm{I},0} = \frac{1}{2}(B + D);\ p_{\mathrm{II},0} = \frac{1}{2}(B - D),$$

unde am notat

$$A = a\left(-\sum_m \frac{\bar{\bar{q}}_m}{\alpha_m^4} + \sum_n \frac{q_n - q_0}{\beta_n^4}\right)\left(\sum_m \frac{1}{\alpha_m^4} + \sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\right)^{-1},$$

$$B = b\left(-\sum_m \frac{\bar{\bar{q}}_m - \bar{\bar{q}}_0}{\alpha_m^4} - \sum_n \frac{\bar{\bar{q}}_n}{\beta_n^4}\right)\left(\sum_m \frac{1}{\alpha_m^4} \sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\right)^{-1}$$

$$(m = \overline{1, M},\ \text{par};\ n = \overline{1, N}, \text{par}),$$

$$C = -a\left(\sum_m \frac{\bar{\bar{q}}_m}{\alpha_m^4}\right)\left(\sum_m \frac{1}{\alpha_m^4}\right)^{-1};\ D = -b\left(\sum_m \frac{\bar{\bar{q}}_n}{\beta_n^4}\right)\left(\sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\right)^{-1} \quad (9.b)$$

$$(m = \overline{1, M},\ \text{impar};\ n = \overline{1, N},\ \text{impar}),$$

$$\bar{\bar{q}}_0 = p_{0,0} + \frac{1}{a}\left(p_{i',0} + p_{i'',0} + \dots + s_{k',0} + \dots + p_{u,0} + \dots\right)$$

$$\bar{\bar{q}}_m = q_m - \frac{1}{a}\left(p_{1,0} + p_{2,0}\cos m\,\pi\right),$$

$$\bar{\bar{q}}_n = q_n - \frac{1}{b}\left(p_{I,0} + p_{II,0}\cos n\pi\right).$$

Ţinînd seama succesiv de (ε), (5.1), (5.p), (5.i), (5,j) obţinem

$$P_{i'I} = -\frac{b}{4}\left(p_{i',0} + \frac{B_i - c_{i''}A_i}{c_{i'} - c_{i''}}\right),$$

$$P_{i'II} = -\frac{b}{4}\left(p_{i',0} - \frac{B_i - c_{i''}A_i}{c_{i'} - c_{i''}}\right),$$

$$P_{i''I} = -\frac{b}{4}\left(p_{i'',0} - \frac{B_i - c_{i'}A_i}{c_{i'} - c_{i''}}\right),$$

$$P_{i''II} = -\frac{b}{4}\left(p_{i'',0} + \frac{B_i - c_i, A_i}{c_{i'} - c_{i''}}\right),$$

. . . . . .

$$S_{k'I} = -\frac{b}{4}\left(s_{k',0} + A_k\right),$$

$$S_{k'II} = -\frac{b}{4}\left(s_{k',0} - A_k\right),$$

$$S_{k''\,\mathrm{I}} = -\frac{b}{4}(s_{k'',0} + B_k),$$

$$S_{k''\,\mathrm{II}} = -\frac{b}{4}(s_{k''0} - B_k),$$

. . . . . .

$$P_{u\,\mathrm{I}} = -\frac{b}{4}(p_{u,0} + A_u),$$

$$P_{u\,\mathrm{II}} = -\frac{b}{4}(p_{u,0} - A_u),$$

. . . . . (10.a)

unde am notat

$$A_i = \left(\sum_n \frac{p_{i',n} + p_{i'',n}}{\beta_n^4}\right)\left(\sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\right)^{-1},$$

$$B_i = \left(\sum_n \frac{c_{i'}\,p_{i',n} + c_{i''}\,p_{i'',n}}{\beta_n^2}\right)\left(\sum_n \frac{1}{\beta_n^2}\right)^{-1},$$

$$A_k = \left(\sum_n \frac{s_{k',n}}{\beta_n^4}\right)\left(\sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\right)^{-1}, \qquad (10.b)$$

$$B_k = \left(\sum_n \frac{s_{k'',n}}{\beta_n^2}\right)\left(\sum_n \frac{1}{\beta_n^2}\right)^{-1},$$

$$A_u = \left(\sum_n \frac{p_{u,n}}{\beta_n^4}\right)\left(\sum_n \frac{1}{\beta_n^4}\right)^{-1}$$

$$(n = \overline{1, N};\ n \text{ impar}).$$

Sistemele de ecuații (6.a), (7.a), (8.a), (9.a), (10.a) sînt simultane și se rezolvă prin aproximații succesive utilizînd unul din procedeele cunoscute. Se observă că în fiecare ciclu de aproximare:

1°. Sistemul (6.a) trebuie rezolvat o singură dată considerînd $m = \overline{1, M}$ n, par, $n = \overline{1, N}$;

2°. Sistemul (7.a) trebuie rezolvat de N ori adică făcînd succesiv $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ..., $n = N$ și considerînd de fiecare dată $m = \overline{1, M}$;

3°. Sistemul (8.a) trebuie rezolvat de M ori adică făcînd succesiv $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, $m = M$ și considerînd de fiecare dată $n = \overline{1, N}$;

4°. Sistemul (9.a) trebuie rezolvat o singură dată considerînd m par, $m = \overline{1, M}$, n par, $n = \overline{1, N}$ și m impar $m = \overline{1, M}$, n impar, $n = \overline{1, N}$;

5°. Sistemul (10.a) trebuie rezolvat o singură dată considerînd n impar, $n = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M}$.

Ținînd seama de relațiile de legătură stabilite, după determinarea necunoscutelor din sistemele de ecuații canonice, problema pusă la începutul acestei lucrări este complet determinată.

Primită la redacție la 9 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1 I. BELEȘ, *Placa ortotropă cu diafragme*, St. cerc. mec. apl., **38**, *3* (1976)

2. G. D. POPA, *Aplicarea metodei seriilor simple trigonometrice la calculul plăcilor rigidizate cu nervuri dispuse pe o singură parte*, Bul. științ. al Institutului de construcții București **20**, *3—4* (1977).

3. — *Metoda de calcul utilizînd seriile duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu diafragme excentrice dispuse pe două direcții ortogonale*, Bul. științ. al Institutului de construcții București, **21**, *3—4* (1978).

4. — *Extinderea soluției prin serii duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri dispuse pe o singură parte*, St. cerc. mec. apl., **39**, *2* (1980).

5. — *Metodă de calcul utilizînd seriile duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri excentrice înguste dispuse pe două direcții*, St. cerc. de mec. apl., **39**, *5* (1980).

6. — *Metodă de calcul utilizînd seriile duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri excentrice dispuse pe două direcții*, St. cerc. de mec. apl., **40**, *2* (1981).

7. — *Calculul rețelelor de grinzi ținînd seama de conlucrarea elastică cu placa prinsă punctiform în noduri*, Bul. științ. al Institutului de construcții București , **22**, *1—2* (1979).

8. — *Plaque encastrée sur les deux bords opposés parallèles aux poutres raideurs continuellement réunies* (sub tipar).

9. — *Plaque encastréé sur les deux bords opposés parallèles aux poutres raideurs ponctuellement réunies* (sub tipar)

10. M. V. SOARE, *Contribuții la calculul plăcilor ortotrope cu nervuri de rigidizare pe o singură parte*, St. cerc. de mec. apl., **33**, *4* (1974), **34**, *1* (1975).

11. — *Plăci plane*, Secțiunea VI din Manual pentru calculul construcțiilor, Ediția a 2-a, Edit. tehnică, București 1977.

12. — *O metodă generală de rezolvare a plăcilor ortotrope dreptunghiulare*, St. cerc. de mec. apl., **39**, *2* (1980).

13. WAH THEIN, L. R. CALCOTE, *Structural Analysis by Finite Difference Calculus*, Van Nostrand Rheinhold Company, New York, 1970.

CALCULUL PLĂCILOR CIRCULARE REZEMATE PE MEDII ELASTICE

de GHEORGHE MOMANU
Universitatea din Galați

Pentru plăcile circulare rezemate pe medii elastice, schematizate prin modelele Winkler și Boussinesq, încărcate axial simetric, se prezintă un procedeu de calcul numeric, cu ajutorul diferențelor finite. Procedeul prezentat are avantajul că evită utilizarea funcțiilor complicate ce intervin în soluțiile analitice și permite, în același timp, întocmirea cu ușurință a unui program de calcul automat.

1.0. PRELIMINARII

Plăcile plane circulare rezemate pe medii elastice se întîlnesc frecvent în practica inginerului constructor (la realizarea fundațiilor stîlpilor, fundurilor de rezervoare etc.).

Calculul efectiv al acestor plăci, indiferent de modelul adoptat pentru schematizarea mediului elastic, este dificil și laborios, [1], [2], [4], [5], necesitînd utilizarea unor funcții complicate.

În cele ce urmează este prezentat un procedeu de calcul care înlătură inconvenientele menționate. El se bazează pe utilizarea diferențelor finite și are, pe lîngă altele, și avantajul de a permite întocmirea cu ușurință a unui program de calcul automat.

Acest procedeu este aplicabil plăcilor circulare încărcate axial simetric, incomplete (inelare) și complete, atît în cazul rezemării obișnuite, cît și în cazul rezemării pe medii elastice schematizate prin modelele Winkler (al coeficientului de pat) și Boussinesq (al semispațiului elastic).

2.0. TRANSCRIEREA ÎN DIFERENȚE FINITE A ECUAȚIEI DIFERENȚIALE A PLĂCII CIRCULARE

Ecuația diferențială a plăcii circulare de grosime constantă, δ, încărcată axial simetric este [4]:

$$\frac{d^2w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}=\frac{Z(r)}{K}, \tag{1}$$

unde w este săgeata plăcii, $Z(r)$ sarcina ce acționează placa și $K=\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ rigiditatea plăcii (E și μ fiind modulul de elasticitate, respectiv coeficientul de contracție transversală, ai materialului din care este alcătuită placa).

Folosind o reţea de puncte echidistante (echidistanţa fiind $t = \frac{R}{n}$, fig. 1) şi utilizînd metoda parabolei, [3], pentru exprimarea prin diferenţe finite a derivatelor funcţiei w, ecuaţia (1), transcrisă în diferenţe finite pentru nodul curent i, capătă forma, [2]:

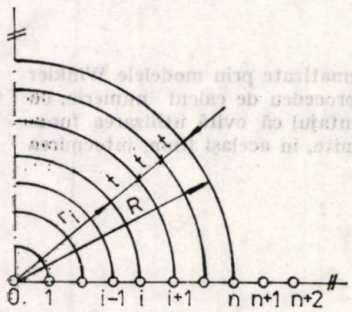


Fig. 1

$$(1 - \lambda_i)\, w_{i-2} - 2\left[2\,(2 - \lambda_i) + \frac{\lambda_i^2}{2}\,(2 + \lambda_i)\right] w_{i-1} + 2(3 + \lambda_i^2)\, w_i - 2\left[2\,(2 + \lambda_i) + \frac{\lambda_i^2}{2}(2 + \lambda_i)\right] w_{i+1} + (1 + \lambda_i)\, w_{i+2} = \frac{Z_i\, t^4}{K}, \tag{2}$$

unde

$$\lambda_i = \frac{t}{r_i} \tag{3}$$

cu notaţiile din figura 1.

Scrierea ecuaţiei (2), în toate nodurile reţelei alese, prezintă unele particularităţi, după cum placa este incompletă (inelară) sau completă.

2.1. CAZUL PLĂCII INELARE

La placa inelară (fig. 2), pentru fiecare nod al reţelei situat pe placă' poate fi scrisă cîte o ecuaţie de tipul (2).

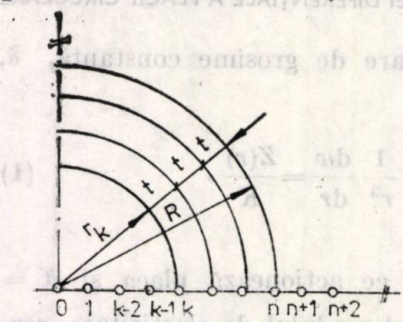


Fig. 2

Rezultă astfel un sistem de s ecuaţii avînd $s + 4$ necunoscute (unde s este numărul de noduri, de la k la n, situate pe coroana circulară ce formează placa, fig. 2).

Numărul de necunoscute ce depăşeşte numărul de ecuaţii, care poate fi scris, provine din faptul că prin scrierea ecuaţiei (2) în nodurile k şi n, ce se găsesc pe cele două frontiere ale plăcii, se introduc ca necunoscute şi săgeţile din nodurile $k = 2$, $k - 1$ şi, respectiv, $n + 1$ şi $n + 2$, puncte ce nu aparţin plăcii.

Completarea sistemului cu cele patru ecuaţii care mai sînt necesare se face cu ajutorul condiţiilor iniţiale privind marginile sau reazimele plăcii, exprimate în funcţie de w.

Condițiile inițiale pot fi exprimate privitor la :

$$w,$$

$$\theta = \frac{dw}{dr}, \tag{4 a}$$

$$M_r = -K\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \mu\frac{dw}{dr}\right), \tag{4b}$$

$$M_\theta = -K\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \mu\frac{d^2w}{dr^2}\right), \tag{4c}$$

$$T_r = -K\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right), \tag{4 d}$$

care transcrise în diferențe finite referitor la nodul i capătă forma :

$$w_i,$$

$$\theta_i = \frac{-w_{i-1} + w_{i+1}}{2t}, \tag{5a}$$

$$M_{r_i} = -\frac{K}{t^2}\left[\left(1 - \mu\frac{\lambda_i}{2}\right)w_{i-1} - 2w_i + \left(1 + \mu\frac{\lambda_i}{2}\right)w_{i+1}\right], \tag{5b}$$

$$M_{\theta_i} = -\frac{K}{t^2}\left[\left(\mu - \frac{\lambda_i}{2}\right)w_{i-1} - 2\mu w_i + \left(\mu + \frac{\lambda_i}{2}\right)w_{i+1}\right], \tag{5c}$$

$$T_{r_i} = -\frac{K}{t^3}\left[-\frac{w_{i-2}}{2} + \left(1 + \lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2}\right)w_{i-1} - 2\lambda_i w_i - \right.$$

$$\left. -\left(1 - \lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2}\right)w_{i+1} + \frac{w_{i+2}}{2}\right]. \tag{5d}$$

Rezolvarea sistemului de $s + 4$ ecuații (acum cu tot atîtea necunoscute) conduce la determinarea săgeților plăcii în nodurile rețelei alese; apoi, cu ajutorul relațiilor (5) pot fi determinate celelalte mărimi ce caracterizează starea de eforturi și deformații în aceleași puncte ale plăcii.

2.2. CAZUL PLĂCII COMPLETE

La placa completă poate fi scrisă cîte o ecuație de tipul (2) pentru orice nod al rețelei alese, cu excepția nodului O (originea), unde $\lambda_i = \lambda_0 = \infty$ deoarece $r_i = r_0 = 0$.

Pentru ca ecuația (2) să poată fi scrisă și în origine, funcția $w = w(r)$ va fi exprimată prin desvoltarea sa în serie în jurul acestui punct; în mod corespunzător vor fi exprimate și derivatele de ordinul $1 \div 4$ ale acestei funcții, cele care intervin în ecuația (1).

La dezvoltarea în serie se ține seama că funcția $w = w(r)$ este pară:

$$w(r) = w(-r) \tag{6}$$

și, prin urmare, derivatele sale de ordin impar sînt nule.

Se obține astfel, pentru funcția $w = w(r)$, expresia:

$$w = w_0 + w_0'' \frac{r^2}{2!} + w_0^{IV} \frac{r^4}{4!} + \ldots + w_0^{2p} \frac{r^{2p}}{(2p)!}, \tag{7}$$

iar pentru derivatele sale, expresiile:

$$\frac{dw}{dr} = w_0'' r + w_0^{IV} \frac{r^3}{3!} + \ldots + w_0^{2p} \frac{r^{2p-1}}{(2p-1)!}, \tag{8a}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = w_0'' + w_0^{IV} \frac{r^2}{2!} + \ldots + w_0^{2p} \frac{r^{2p-2}}{(2p-2)!}, \tag{8b}$$

$$\frac{d^3w}{dr^3} = w_0^{IV} r + \ldots + w_0^{2p} \frac{r^{2p-3}}{(2p-3)!}, \tag{8c}$$

$$\frac{d^4w}{dr^4} = w_0^{IV} + \ldots + w_0^{2p} \frac{r^{2p-4}}{(2p-4)!}. \tag{8d}$$

Ținînd seama de expresiile (8a, b, c, d), ecuația (1) devine, după ordonarea termenilor:

$$\left[\frac{r^{2p-4}}{(2p-4)!} + 2\frac{r^{2p-4}}{(2p-3)!} - \frac{r^{2p-4}}{(2p-2)!} + \frac{r^{2p-4}}{(2p-1)!}\right] w_0^{2p} +$$

$$+ \ldots + \left(1 + 2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) w_0^{IV} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\right) w_0'' = \frac{Z_0}{K}. \tag{9}$$

Trecînd apoi în expresia (9) la limită, $r \to 0$, se obține:

$$\frac{8}{3} w_0^{IV} = \frac{Z_0}{K}. \tag{10}$$

Transcriind în diferențe finite ecuația (10) și ținînd, în același timp, seama de condiția de simetrie (6) care face ca:

$$w_{-2} = w_2 \tag{11a}$$

și

$$w_{-1} = w_1 \tag{11b}$$

se obține :

$$\frac{16}{3}(3w_0 - 4w_1 + w_2) = \frac{Z_0}{K}t^4. \tag{12}$$

Ecuațiile (2) și (12), scrise în fiecare nod al rețelei, $0,1 \ldots n$, conduc la un sistem de $n + 1$ ecuații avînd $n + 3$ necunoscute (matricea coeficienților acestui sistem este dată în [2]).

Cele două ecuații care mai sînt necesare pentru completarea sistemului se obțin din condițiile inițiale privind marginile și reazimele plăcii, cu ajutorul relațiilor (5).

După rezolvarea sistemului de ecuații rezultat se obțin, tot cu ajutorul relațiilor (5), eforturile, respectiv rotirea, în orice nod al rețelei alese, exceptînd originea.

Pentru origine expresiile eforturilor și rotirii, scrise în diferențe finite, se obțin urmînd aceeași cale utilizată la transcrierea în diferențe finite în origine a ecuației (2), anume : în relațiile (4) se înlocuiesc derivatele funcției w cu expresiile date de relațiile (8) ; se trece apoi la limită, $r \to 0$; se transcriu în diferențe finite relațiile obținute.

În urma acestor operații, ținînd seama în același timp și de relațiile (11), se obține :

$$w_0, \tag{13a}$$

$$\theta_0 = 0,$$

$$M_{r_0} = M_{\theta_0} = 2\frac{K}{t^2}(1 + \mu)(w_0 - w_1), \tag{13b}$$

$$T_{r_0} = 0. \tag{13c}$$

3.0. DOMENII DE UTILIZARE ȘI PROCEDURĂ DE CALCUL

Procedeul de calcul prezentat poate fi aplicat atît plăcilor avînd reazeme obișnuite, cît și plăcilor rezemate pe medii elastice, schematizate prin unul din modelele : Winkler sau Boussinesq. Deosebirea între un caz și celălalt constă numai în modul în care sarcinile Z_i ce acționează placa intervin în scrierea ecuațiilor (2) și (12).

În cazul plăcilor cu reazeme obișnuite, forțele ce le acționează sînt cunoscute (ele făcînd, în general, parte din datele inițiale ale problemei).

La plăcile rezemate pe medii elastice, o parte a sarcinilor, reacțiunea mediului, este necunoscută, urmînd a fi determinată.

Reacțiunea mediului depinde de sarcinile efective ce acționează placa, de caracteristicile mecano-elastice ale plăcii și de caracteristicile elastice ale mediului de reazim.

Cum mediile de reazem au, în general, comportări foarte complexe care nu pot fi exprimate decît cu mari dificultăți prin formule matema-

tice simple, ușor de folosit în practică, aceste medii se schematizează, pentru calcul, prin diverse modele, ceea ce face, în ultimă instanță, ca atît modalitatea de calcul, cît și valoarea reacțiunii mediului să depindă de modelul schematic utilizat.

3.1. CALCULUL PLĂCILOR REZEMATE OBIȘNUIT

În acest caz forțele ce acționează placa sînt efectiv cunoscute, prin urmare :

$$Z_i = q_i . \tag{14}$$

Scriind ecuațiile (2), respectiv (12), și adăugînd la acestea ecuațiile corespunzătoare condițiilor inițiale, date de (5), se obține sistemul complet de ecuații a cărui rezolvare conduce la determinarea săgeților în toate punctele rețelei trasată pe placă ; cu relațiile (5) pot fi determinate apoi celelalte mărimi ce caracterizează starea de eforturi și deformații în aceleași puncte ale plăcii.

3.2. CALCULUL PLĂCILOR REZEMATE PE MEDII SCHEMATIZATE PRIN MODELUL WINKLER

Modelul Winkler, a cărui utilizare este încă frecventă, schematizează mediul elastic printr-o serie de resoarte dispuse unul lîngă altul (fig. 3).

Forța cu care se încarcă resortul deformat (reprezentînd reacțiunea mediului elastic în acel punct) este proporțională cu scurtarea lui :

$$p_i = kw_i, \tag{15}$$

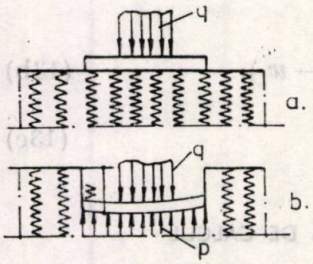


Fig. 3

k fiind coeficientul de pat (considerat a fi o constantă a mediului).

Cu expresia (15) pentru reacțiunea mediului, forța Z_i din ecuația (2) capătă forma :

$$Z_i = q_i - p_i = q_i - kw_i. \tag{16}$$

Avînd pe Z_i exprimat în funcție de sarcina cunoscută, q_i, și de săgeata plăcii, calculul se conduce în continuare ca la § 3.1.

Se observă că în acest caz, comparativ cu cazul plăcilor rezemate obișnuit, coeficienții necunoscutelor principale ale sistemului de ecuații dat de expresiile (2) și (12), se măresc cu cantitatea constantă :

$$C = \frac{kt^4}{K}. \tag{17}$$

3.3. CALCULUL PLĂCILOR REZEMATE PE MEDII SCHEMATIZATE PRIN MODELUL BOUSSINESQ

Modelul Boussinesq schematizează mediul de reazem sub forma unui semispațiu elastic, omogen și izotrop.

La un astfel de mediu, o forță concentrată, normală la planul ce limitează semispațiul, produce, într-un punct situat pe acest plan la

distanța r de punctul de aplicație al forței, o deplasare, după direcția normalei la plan, dată de expresia :

$$w = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \frac{P}{r}, \tag{18}$$

unde E_0 și μ_0 sînt : modulul de elasticitate și coeficientul de contracție transversală (a lui Poisson) ai mediului elastic.

Pentru o sarcină distribuită pe un domeniu $[D]$ (fig. 4), expresia (18) rămîne valabilă pentru deplasarea elementară, dw, cauzată de sarcina elementară $dP = p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$:

$$dw = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \frac{p(\xi, \eta) d\xi\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} \tag{19}$$

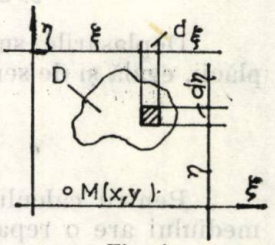


Fig. 4

deplasarea totală fiind :

$$w = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \iint_D \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}}. \tag{20}$$

Reacțiunea mediului, presupusă la modelul Winkler a fi, în orice punct, proporțională cu deplasarea verticală a suprafeței plăcii este, în realitate, necunoscută ; calculul plăcii necesită determinarea ei.

Pentru a face acest lucru se va admite ipoteza că între placă și mediu, în poziția finală de echilibru, există un contact continuu, altfel spus, cele două suprafețe deformate (a plăcii și a mediului) sînt conforme.

Această ipoteză, destul de apropiată de realitate pentru medii elastice de natura terenului (care admit deformații relativ mari), se exprimă, pentru necesitățile problemei de față, prin egalitatea deplasărilor celor două suprafețe, în același punct :

$$w_i^p = w_i^m, \tag{21}$$

indicii p și m însemnînd *placă* și *mediu*.

Condiția (21) scrisă în fiecare nod al rețelei alese, conduce la un sistem de ecuații din a cărui rezolvare rezultă valorile reacțiunii mediului în punctele respective.

Odată determinată reacțiunea mediului, calculul plăcii se conduce apoi ca la § 3.1, sarcina Z_i avînd valoarea :

$$Z_i = q_i - p_i. \tag{22}$$

Problema care rămîne acum de rezolvat este aceea de a calcula, în nodurile rețelei alese, deplasările celor două suprafețe, în acest scop cele două elemente, placa și mediul, vor fi luate și analizate pe rînd, în poziția de echilibru.

a. Calculul deplasărilor suprafeței plăcii

Placa este solicitată de sarcina cunoscută, q, și de reacțiunea mediului, p, necunoscută (fig. 5).

Deplasările plăcii, în nodurile rețelei alese (w_i), se obțin, în funcție de p_i, scriind ecuațiile (2), respectiv (12), precum și pe cele privind condițiile inițiale (5) și rezolvînd sistemul rezultat în raport cu w_i.

b. Calculul deplasărilor suprafeței mediului elastic

Deplasările suprafeței mediului elastic sînt produse de acțiunea plăcii, egală și de sens contrar reacțiunii mediului, (fig. 5) :

$$p^* = -p. \tag{23}$$

Pentru calculul acestor deplasări se va face ipoteza că reacțiunea mediului are o repartiție în trepte, fiind uniform repartizată pe fiecare coroană circulară avînd raza medie r_j și lățimea $r_j \pm \frac{t}{2}$ (fig. 6).

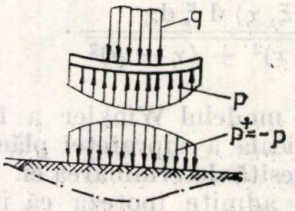


Fig. 5

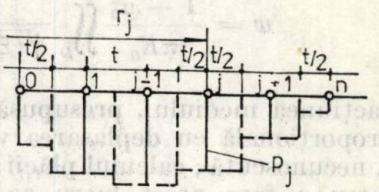


Fig. 6

Calculul deplasărilor punctelor suprafeței mediului se face prin suprapunerea efectelor, utilizînd procedeul coeficienților de influență :

$$\begin{aligned}
w_0^m &= \beta_{00} p_0 + \beta_{01} p_1 + \dots + \beta_{0j} p_j + \dots + \beta_{0n} p_n, \\
w_1^m &= \beta_{10} p_0 + \beta_{11} p_1 + \dots + \beta_{1j} p_j + \dots + \beta_{1n} p_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
w_i^m &= \beta_{i0} p_0 + \beta_{i1} p_1 + \dots + \beta_{ij} p_j + \dots + \beta_{in} p_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
w_n^m &= \beta_{n0} p_0 + \beta_{n1} p_1 + \dots + \beta_{nj} p_j + \dots + \beta_{nn} p_n,
\end{aligned} \tag{24}$$

unde β_{ij} este deplasarea produsă în nodul i de forța unitară $p_j = 1$, normală la suprafață și uniform distribuită pe coroana circulară de rază medie r_j.

Cu notațiile din figura 7, pe baza relației (20) și ținînd seama, în același timp, de simetria existentă, calculul coeficienților β_{ij} se face cu expresia :

$$\beta_{ij} = 2\frac{1-\mu_0^2}{\pi E_0}\int_0^{\pi}\int_{r_j-\frac{t}{2}}^{r_j+\frac{t}{2}} \frac{1\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta}{\sqrt{(\rho\cos\theta - x_i)^2 + (\rho\sin\theta)^2}} \qquad (25)$$

valabilă pentru $i = 0 \ldots n$ și $j = 1 \ldots n-1$; pentru $j = 0$ și $j = n$, ținînd seama de notațiile din figura 6 și de faptul că lățimea coroanelor circulare respective este de numai $\frac{t}{2}$, limitele celei de-a doua integrale vor fi : 0 și $\frac{t}{2}$, respectiv $r_n - \frac{t}{2}$ și r_n.

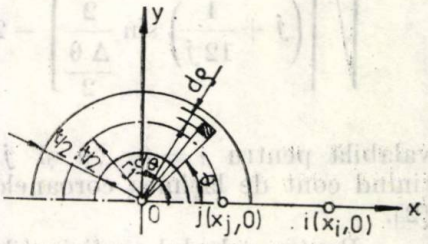


Fig. 7

Trebuie remarcat că pentru integrala din expresia (25) nu există o primitivă care să permită un calcul exact. Se va recurge, din acest motiv, la o integrare numerică aproximativă; în acest scop coroana circulară de rază r_j se împarte în $2N$ elemente egale, de arie ΔA și unghiu la centru $\Delta\theta = \frac{2\pi}{2N} = \frac{\pi}{N}$. Spre a evita ca în cazul cînd $i = j$, valoarea numitorului expresiei de sub semnul integrală din (25) — numitor ce reprezintă distanța d_{iG_k} dintre nodul i și centrul de greutate geometric al elementului de arie de ordinul k — să devină prea mică (fig. 8), împărțirea coroanei în elemente de arie se face astfel încît raza vectoare a centrului de greutate al elementului de ordinul k să facă cu axa ox unghiul :

$$\theta_k = \Delta\theta\left(k + \frac{1}{2}\right). \qquad (26)$$

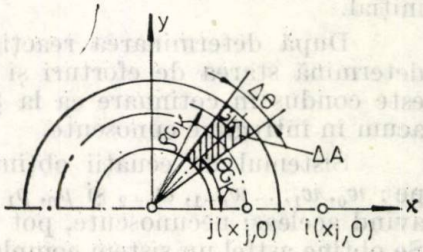


Fig. 8

Ținînd seama apoi că atît r_j cît și x_i pot fi exprimați în funcție de pasul t al rețelei și de rangul punctelor considerate :

$$r_j = j\cdot t \text{ și } x_i = i\cdot t, \qquad (27\text{ a,b})$$

iar raza circumferinței pe care se găsesc situate centrele de greutate ale elementelor de arie ΔA_k este :

$$\rho_{G_k} = \left(r_j + \frac{t^2}{12 r_j}\right)\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = t\left(j + \frac{1}{12j}\right)\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}, \qquad (28)$$

din (25) se obține pentru β_{ij} expresia:

$$\beta_{ij} = 2\,\frac{1-\mu_0^2}{\pi E_0}\cdot\Delta\theta\cdot t\cdot j\times \tag{29}$$

$$\times\sum_{k=0}^{k=N-1}\frac{1}{\sqrt{\left[\left(j+\frac{1}{12\,j}\right)\sin\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right]^2-2i\left(j+\frac{1}{12\,j}\right)\sin\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cos\Delta\theta\left(k+\frac{1}{2}\right)+i^2}},$$

valabilă pentru $i = 0 \ldots n$ și $j = 1 \ldots n-1$; pentru $j = 0$ și $j = n$, ținînd cont de lățimea coroanelor respective, se obțin expresii similare, [2].

Pentru calculul coeficienților β_{ij}, după punerea lor sub forma (29), poate fi întocmit cu ușurință un program de calcul automat, după cum este arătat în [2] (unde sînt prezentate tabele cu valorile acestor coeficienți pentru o rețea alcătuită din 20 de noduri considerată a fi suficientă pentru necesitățile practice obișnuite).

Odată cunoscute valorile coeficienților β_{ij}, introducîndu-le în expresiile (24), se obțin deplasările suprafeței mediului elastic în funcție de presiunea exercitată de placă asupra acestuia; în baza ipotezei (21), egalînd acum aceste deplasări cu deplasările suprafeței plăcii (calculate după cum s-a arătat la pct. a) se obține un sistem de ecuații ale cărui soluții reprezintă valorile reacțiunii mediului în nodurile rețelei alese inițial.

După determinarea reacțiunii mediului, calculul mărimilor ce determină starea de eforturi și deformații în aceleași noduri ale rețelei este condus în cotinuare ca la § 3.1, sarcinile ce acționează placa fiind acum în întregime cunoscute.

Sistemul de ecuații obținut la punctul a, avînd ca necunoscute pe: $w_0, w_1 \ldots w_{n+1}, w_{n+2}$ și $p_0, p_1 \ldots p_n$, împreună cu sistemul dat de (24), avînd aceleași necunoscute, pot fi considerate simultan în același sistem. Se obține astfel un sistem complet avînd numărul de ecuații egal cu cel al necunoscutelor și a cărui rezolvare conduce la obținerea simultană a valorilor reacțiunii mediului și a deplasărilor plăcii în nodurile rețelei.

4.0. ECUAȚIA DE ECHILIBRU GLOBAL

Placa fiind în echilibru, rezultanta forțelor ce-o acționează este nulă; prin urmare suma proiecțiilor tuturor forțelor ce-o acționează, pe direcția normalei la placă este de asemenea nulă:

$$\int_A q\,\mathrm{d}A = \int_S p\,\mathrm{d}S, \tag{30}$$

unde A este aria pe care este distribuită sarcina dată, q, iar S cea pe care este distribuită reacţiunea mediului, p.

Sub forma prezentată, utilizarea ecuaţiei integrale (30) prezintă mari dificultăţi; folosind însă ipoteza că reacţiunea mediului este repartizată uniform pe lăţimea oricărei coroane circulare, ea se poate scrie, pentru placa completă:

$$Q = \int_A q \, dA = p_0 S_0 + p_1 S_1 + \ldots + p_j S_j + \ldots + p_n S_n, \tag{31}$$

unde S_0, S_1, S_j, S_n sînt ariile coroanelor circulare.

Sau, ţinînd seama că:

$$S_0 = \pi \left(\frac{t}{2}\right)^2 ; \ldots S_j = 2\pi r_j t ; \ldots S_n = \pi t \left(2r_n - \frac{t}{4}\right), \tag{32}$$

şi înlocuind pe r_j şi r_n cu expresiile date de (27), se obţine:

$$Q = 2\pi t^2 \left[\frac{p_0}{8} + \sum_{j=1}^{j=n-1} j p_j + \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right) p_n\right], \tag{33}$$

care, pentru mediile elastice schematizate prin modelul Winkler, se scrie:

$$Q = 2\pi t^2 k \left[\frac{w_0}{8} + \sum_{j=1}^{j=n-1} j w_j + \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{4}\right) w_n\right]. \tag{34}$$

Relaţiile (33) şi (34) pot fi folosite fie pentru verificarea rezultatelor obţinute, fie pentru completarea sistemului de ecuaţii dat de relaţiile (2) şi (12), în locul ecuaţiilor care în mod obişnuit rezultă din condiţiile iniţiale.

5.0. CONCLUZII

a. Plăcile circulare rezemate pe medii elastice, încărcate axial simetric, sînt întîlnite frecvent în activitatea inginerului constructor, dar procedeele de calcul cunoscute sînt laborioase şi nu se pretează utilizării tehnicii automate de calcul, mai ales cînd mediul elastic este schematizat prin modelul Boussinesq, model care este din ce în ce mai mult utilizat de cercetători, în detrimentul modelului Winkler.

b. Procedeul numeric de calcul expus mai înainte are avantajul de a putea fi aplicat cu ușurință atît plăcilor rezemate obișnuit, cît și celor rezemate pe medii elastice schematizate prin modelele Winkler și Boussinesq, pretîndu-se în același timp utilizării tehnicii de calcul automat.

Primită la redacție la 16 martie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. M. I. GORBUNOV-POSADOV, *Calculul construcțiilor pe mediu elastic*, Edit. tehnică, București, 1960.
2. GH. MOMANU, *Plăci curbe subțiri rezemate pe medii elastice avînd aplicații la fundațiile construcțiilor*, Teză de doctorat, Conducător științific: Prof. dr. doc. șt. D. I. Mangeron, Institutul politehnic din Iași, 1980.
3. M. SOARE, *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul plăcilor curbe subțiri*, Edit. tehnică, București, 1968.
4. M. SOARE, *Plăci plane*, Manual pentru calculul construcțiilor. Edit. tehnică, București, 1977.
5. S. P. TIMOSHENKO, S. WOINOVSKI-KRIEGER, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Edit. tehnică, București, 1968.

METODE SPECTRALE ÎN DINAMICA AUTOVEHICULELOR

de T. SIRETEANU, S. PĂRĂIAN și I. ROȘU
Institutul de fizica și tehnologia materialelor

Lucrarea cuprinde o tratare sistematică a problemelor privind aplicarea teoriei spectrale în dinamica autovehiculelor, algoritmii prezentați permițînd adoptarea unui program de calcul unitar pentru evaluarea numerică a caracteristicilor dinamice ale sistemelor oscilante ce modelează suspensiile autovehiculelor și a răspunsului acestora pentru diferite variante constructive de suspensii. Metodele prezentate au fost utilizate pentru studiul vibrațiilor verticale și de tangaj ale autoturismului Dacia 1300.

1. ECUAȚII DE MIȘCARE

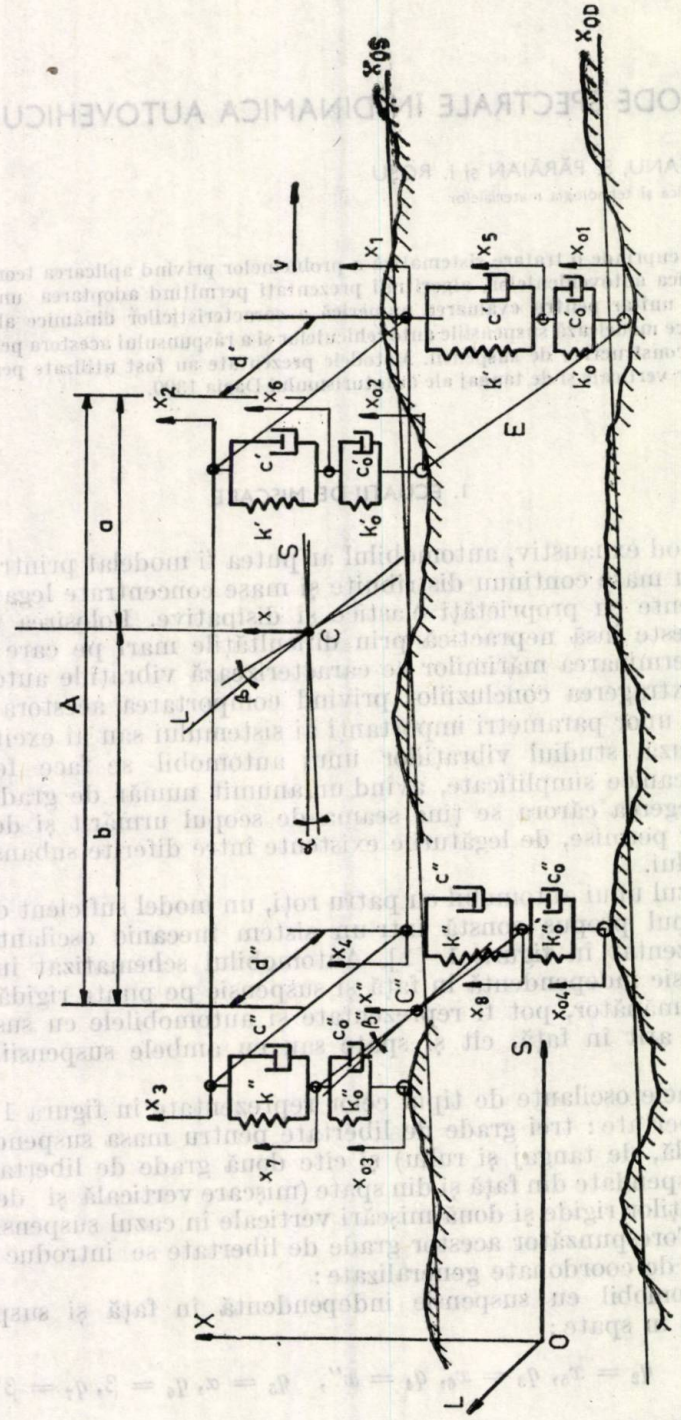
În mod exhaustiv, automobilul ar putea fi modelat printr-un sistem mecanic cu mase continuu distribuite și mase concentrate legate între ele prin elemente cu proprietăți elastice și disipative. Folosirea unui astfel de model este însă nepractică prin dificultățile mari pe care le implică atît în determinarea mărimilor ce caracterizează vibrațiile automobilelor, cît și în extragerea concluziilor privind comportarea acestora în raport cu variația unor parametri importanți ai sistemului sau ai excitației. Din această cauză, studiul vibrațiilor unui automobil se face folosindu-se modele mecanice simplificate, avînd un anumit număr de grade de libertate, în alegerea cărora se ține seama de scopul urmărit și de mărimea deplasărilor permise, de legăturile existente între diferite subansamble ale automobilului.

În cazul unui automobil cu patru roți, un model suficient de complet pentru scopul propus constă într-un sistem mecanic oscilant de tipul celui reprezentat în figura 1 [1]. Automobilul schematizat în figura 1 are suspensie independentă în față și suspensie pe punte rigidă în spate. În mod asemănător, pot fi reprezentate și automobilele cu suspensii independente atît în față, cît și spate sau cu ambele suspensii pe punți rigide.

Sistemele oscilante de tipul celor reprezentate în figura 1 au șapte grade de libertate: trei grade de libertate pentru masa suspendată (mișcare verticală, de tangaj și ruliu) și cîte două grade de libertate pentru masele nesuspendate din față și din spate (mișcare verticală și de legănare în cazul punților rigide și două mișcări verticale în cazul suspensiilor independente). Corespunzător acestor grade de libertate se introduc următoarele sisteme de coordonate generalizate:

— automobil cu suspensie independentă în față și suspensie pe punte rigidă în spate:

$$q_1 = x, \quad q_2 = x_5, \; q_3 = x_6, \; q_4 = x'', \quad q_5 = \alpha, \; q_6 = \beta, \; q_7 = \beta'', \qquad (1.1)$$



x_{OS}
x_{OD}
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
x_7
x_8
x_{o1}
x_{o2}
x_{o3}
x_{o4}
c'
c'_o
k'
k'_o
c''
c''_o
k''
k''_o
d'
d''
C'
C''
x'
x''
β'
β''
α
β
v
S
E
L
C
A
a
b
X
O

Fig. 1

— automobil cu suspensie pe punte rigidă atît în față cît și în spate:

$$q_1 = x,\ q_2 = x',\ q_3 = x'',\ q_4 = \alpha,\quad q_5 = \beta,\ q_6 = \beta',\ q_7 = \beta'', \tag{1.2}$$

— automobil cu ambele suspensii independente:

$$q_1 = x,\ q_2 = x_5,\ q_3 = x_6,\ q_4 = x_7,\ q_5 = x_8,\ q_6 = \beta',\ q_7 = \beta''. \tag{1.3}$$

În ipoteza oscilațiilor unghiulare mici, între deplasările x_1, x_2-..., ..., x_8 și coordonatele generalizate $q_1, q_2, \ldots, q_7$ pot fi scrise relații liniare care exprimă legăturile geometrice existente în sistemele mecanice considerate.

Din punct de vedere al analizei numerice, este convenabil ca ecuațiile de mișcare ale sistemelor mecanice utilizate în modelarea vibrațiilor automobilului să fie scrise sub formă matriceală. Scrierea matriceală a ecuațiilor de mișcare prezintă și avantajul compactității relațiilor matematice ce intervin în cadrul acestei modelări.

Se introduc următoarele notații:

— vectorul deplasărilor verticale:

$$\mathbf{x} = [\,x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\, x_7, x_8]^T,$$

— vectorul coordonatelor generalizate:

$$\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7]^T,$$

— veclorul forțelor dinamice din suspensie și pneuri:

$$\mathbf{f}' = [\,f_1', f_2', f_3', f_4' f_5', f_6', f_7', f_8']^T,$$

— vectorul acțiunii drumului asupra automobilului:

$$\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04}]^T,$$

unde T indică operația de transpunere a matricelor.

Cu aceste notații, legăturile geometrice existente în sistemele mecanice considerate pot fi puse sub forma generală

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{q}, \tag{1.4}$$

unde $\mathbf{A}$ este o matrice 8×7 ale cărei elemente au expresiile:

$$\begin{gathered} a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{52} = a_{63} = a_{74} = a_{84} = 1, \\ a_{15} = a_{25} = -a,\ a_{35} = a_{45} = b,\ a_{16} = -a_{26} = d', \\ a_{36} = -a_{46} = d'',\ a_{77} = -a_{87} = E/2, \end{gathered} \tag{1.5}$$

pentru un automobil cu suspensie independentă în față și suspensie pe punte rigidă în spate;

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{52} = a_{62} = a_{73} = a_{83} = 1,$$

$$a_{14} = a_{24} = -a,\ a_{34} = a_{44} = b,\ a_{15} = -a_{25} = d', \tag{1.6}$$

$$a_{35} = -a_{45} = d'',\ a_{56} = -a_{66} = a_{77} = -a_{87} = E/2,$$

pentru un automobil cu suspensie pe punte rigidă atît în față, cît și în spate;

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{41} = a_{52} = a_{63} = a_{74} = a_{85} = 1,$$

$$a_{16} = a_{26} = -a,\ a_{36} = a_{46} = b, \tag{1.7}$$

$$a_{17} = -a_{27} = d',\ a_{37} = -a_{47} = d'',$$

pentru un automobil cu ambele suspensii independente.

Toate celelalte elemente ale matricei **A** nespecificate în relațiile de mai sus sînt nule.

De asemenea, vectorul forțelor dinamice din suspensie și pneuri poate fi pus sub forma

$$\mathbf{f}' = -[\mathbf{K}'\mathbf{x} + \mathbf{C}'\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_0\dot{\mathbf{x}}_0], \tag{1.8}$$

unde matricele $\mathbf{K}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{K}_0$ și $\mathbf{C}_0$ au expresiile

$$\mathbf{K}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_S & -\mathbf{K}_S \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{K}_P \end{array}\right], \qquad \mathbf{C}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_S & -\mathbf{C}_S \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}_P \end{array}\right], \tag{1.9}$$

$$\mathbf{K}_0 = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{K}_P \end{array}\right] \qquad \mathbf{C}_0 = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{C}_P \end{array}\right], \tag{1.10}$$

$\mathbf{K}_S$, $\mathbf{C}_S$ fiind matricele coeficienților de rigiditate și amortizare ai suspensiei, iar $\mathbf{K}_P$, $\mathbf{C}_P$ matricele coeficienților de rigiditate și amortizare ai pneurilor:

$$\mathbf{K}_S = \begin{bmatrix} k' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k'' \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C}_S = \begin{bmatrix} c' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 & 0, \\ 0 & 0 & c'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'' \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} k_0' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_0'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_0'' \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}_P = \begin{bmatrix} c_0' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_0'' \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

Matricea **O** este o matrice 4×4, avînd toate elementele nule.

Proprietățile inerțiale ale sistemelor mecanice utilizate pentru modelarea vibrațiilor automobilelor sînt conținute în matricea **M** a maselor și momentelor de inerție masice. Corespunzător celor trei variante de suspensii considerate, matricea **M** este o matrice diagonală ale cărei elemente, au, respectiv, expresiile :

$$m_{11} = m,\ m_{22} = m_{33} = m',\ m_{34} = m'',$$

$$m_{55} = I_\alpha,\ m_{66} = I_\beta,\ m_{77} = I_{\beta''}; \tag{1.13}$$

$$m_{11} = m,\ m_{22} = m',\ m_{33} = m'',$$

$$m_{44} = I_\alpha,\ m_{55} = I_\beta,\ m_{66} = I_{\beta'},\ m_{77} = I_{\beta''}; \tag{1.14}$$

$$m_{11} = m,\ m_{22} = m_{33} = m',\ m_{44} = m_{55} = m'',$$

$$m_{66} = I_\alpha,\ m_{77} = I_\beta. \tag{1.15}$$

În relațiile de mai sus, m reprezintă masa suspendată a automobilului, m' și m'' masele nesuspendate din față și respectiv spate, iar I_α, I_β, $I_{\beta'}$ și $I_{\beta''}$ sînt momentele de inerție masice ale masei suspendate și maselor nesuspendate în raport cu axele de rotație specificate în figura 1.

Legăturile (1.4) fiind olonome, pentru stabilirea ecuațiilor de mișcar ale sistemelor mecanice considerate se pot aplica ecuațiile lui Lagrange [2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} = g_l,\ l = 1, 2, \ldots, 7, \tag{1.16}$$

în care energia cinetică este dată de relația

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}, \tag{1.17}$$

iar componentele g_l ale vectorului forțelor generalizate $\mathbf{g}$ au expresiile

$$g_l = \sum_{k=1}^{8} f_k \frac{\partial x_k}{\partial q_l},\ l = 1, 2, \ldots, 7, \tag{1.18}$$

unde $\mathbf{f} = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8]^T$ este vectorul forțelor dinamice care acționează asupra masei suspendate și maselor nesuspendate în punctele în care se consideră deplasările verticale $x_1, \ldots, x_8$. Componentele acestui vector se exprimă în funcție de componentele vectorului forțelor dinamice din suspensie și punți prin relația

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}\,\mathbf{f}', \tag{1.19}$$

unde

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{array}\right], \tag{1.20}$$

I fiind o matrice 4×4 cu elementele diagonale egale cu 1 și celelalte elemente nule.

Ținînd seama de (1.8)—(1.12) relația (1.19) devine

$$\mathbf{f} = -[\mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_0\dot{\mathbf{x}}_0], \tag{1.21}$$

în care s-a notat

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}\,\mathbf{K}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_S & -\mathbf{K}_S \\ \hline -\mathbf{K}_S & \mathbf{K}_S + \mathbf{K}_P \end{array}\right], \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}\mathbf{C}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_S & -\mathbf{C}_S \\ \hline -\mathbf{C}_S & \mathbf{C}_S + \mathbf{C}_P \end{array}\right]. \tag{1.22}$$

Ținînd seama de (1.4) relația (1.18) se scrie sub forma

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}^T\mathbf{f}. \tag{1.23}$$

Introducînd (1.17) și (1.23) în (1.16) rezultă

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^T\mathbf{f}. \tag{1.24}$$

Din (1.4) și (1.21) se obține expresia

$$\mathbf{f} = -[\mathbf{K}\,\mathbf{A}\,\mathbf{q} + \mathbf{C}\,\mathbf{A}\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_0\mathbf{x}_0 + \mathbf{C}_0\dot{\mathbf{x}}_0], \tag{1.25}$$

care, introdusă (1.24), conduce la ecuația de mișcare

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}^T\mathbf{C}\,\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}^T\mathbf{K}\,\mathbf{A}\mathbf{q} = -[\mathbf{A}^T\mathbf{C}_0\dot{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{K}_0\mathbf{x}_0]. \tag{1.26}$$

Întrucît acțiunea drumului asupra automobilului este modelată printr-un proces aleator vectorial $\{\mathbf{x}_0^v(t)\}$, răspunsul sistemului va fi, de asemenea, un proces aleator vectorial $\{\mathbf{q}(t)\}$.

Mărimile fizice care prezintă interes deosebit în dinamica automobilelor pentru analiza vibrațiilor induse de denivelările drumurilor sînt:

— accelerațiile verticale, de ruliu și de tangaj ale masei suspendate (pentru problema confortului);

— forțele dinamice care acționează asupra maselor nesuspendate (pentru problema aderenței);

— forțele dinamice care iau naștere în suspensie (pentru problema solicitărilor dinamice ale diferitelor subansamble ale suspensiei);

— deplasările relative dintre masele nesuspendate și suprafața drumului (importante din punct de vedere al siguranței în exploatare);

— deplasările relative dintre masa suspendată și masele nesuspendate (importante pentru geometria suspensiei).

Toate aceste mărimi se exprimă prin relații liniare simple în funcție de componentele procesului aleator vectorial al deplasărilor generalizate $\{\mathbf{q}(t)\}$.

2. FUNCȚII DE TRANSFER

Pentru determinarea caracteristicilor statistice ale proceselor aleatoare care descriu comportarea în timp a mărimilor de interes practic, specificate la sfîrșitul paragrafului 1, este necesar calculul funcțiilor de transfer corespunzătoare excitației induse de acțiunea drumului și răspunsului considerat (deplasări, viteze, accelerații sau forțe).

Matricea de transfer $\mathbf{H}_{qx_0}(f)$ a deplasărilor generalizate se obține introducînd în (1.26) o excitație de forma $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0 \exp(i2\pi ft)$ și căutînd răspunsul sub forma $\mathbf{q}(t) = \mathbf{H}_{qx_0}(f)\,\mathbf{x}_0 \exp(i2\pi ft)$. Procedînd în acest mod, rezultă

$$[-4\pi^2 f^2\mathbf{M} + i2\pi f\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A}]\,\mathbf{H}_{qx_0}(f)\mathbf{x}_0 \exp(i2\pi ft) =$$

$$= -[i2\pi f\mathbf{A}^T\mathbf{C}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{K}_0]\mathbf{x}_0 \exp(i2\pi ft),$$

de unde se obține

$$\mathbf{H}_{qx_0}(f) = -[4\pi^2 f^2\mathbf{M} + i2\pi f\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A}]^{-1}[i2\pi f\mathbf{A}^T\mathbf{C}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{K}_0], \tag{2.1}$$

cu condiția ca operația de inversare a matricei $\mathbf{L}(f) = -4\pi^2 f^2\mathbf{M} + i2\pi f\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{K}\mathbf{A}$ să fie posibilă pentru orice f. În cazul sistemelor stabile această condiție este întotdeauna satisfăcută [3].

Matricele de transfer ale vitezelor și accelerațiilor generalizate rezultă sub forma [4]:

$$\mathbf{H}_{\dot{q}x_0}(f) = i2\pi f\,\mathbf{H}_{qx_0}(f), \qquad \mathbf{H}_{\ddot{q}x_0}(f) = -4\pi^2 f^2\mathbf{H}_{qx_0}(f). \tag{2.2}$$

Utilizînd relația (1.4), se obține matricea de transfer corespunzătoare deplasărilor verticale:

$$\mathbf{H}_{xx_0}(f) = \mathbf{A}\,\mathbf{H}_{qx_0}(f). \tag{2.3}$$

De asemenea,

$$\mathbf{H}_{\dot{x}x_0}(f) = i2\pi f\mathbf{H}_{xx_0}, \quad \mathbf{H}_{\ddot{x}x_0}(f) = -4\pi^2 f^2\mathbf{H}_{xx_0}. \tag{2.4}$$

Matricea de transfer $\mathbf{H}_{f'x_0}(f)$, corespunzătoare forțelor dinamice din suspensie și pneuri, rezultă din (1.8), (2.3) și (2.4) sub forma

$$\mathbf{H}_{f'x_0}(f) = -[\mathbf{K}'\mathbf{A} + i2\pi f\mathbf{C}'\mathbf{A}]\,\mathbf{H}_{qx_0}(f) + \mathbf{K}_0 + i2\pi f\mathbf{C}_0. \tag{2.5}$$

Pentru determinarea matricei de transfer a deplasărilor relative, se introduce vectorul $\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8]^T$, ale cărui componente sînt date de relațiile

$$z_1 = x_1 - x_5, \quad z_2 = x_2 - x_6, \quad z_3 = x_3 - x_7, \quad z_4 = x_4 - x_8,$$
$$z_5 = x_5 - x_{01}, \quad z_6 = x_6 - x_{02}, \quad z_7 = x_7 - x_{03}, \quad z_8 = x_8 - x_{04}. \tag{2.6}$$

Aceste relații pot fi scrise matriceal sub forma

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{x} - \mathbf{D}_0\mathbf{x}_0. \tag{2.7}$$

Prin urmare, matricea de transfer a deplasărilor relative are expresia

$$\mathbf{H}_{zx_0}(f) = \mathbf{D}\,\mathbf{H}_{xx_0}(f) - \mathbf{D}_0. \tag{2.8}$$

Pentru vitezele relative se obține

$$\mathbf{H}_{\dot{z}x_0}(f) = \mathrm{i}2\pi f\,\mathbf{H}_{zx_0}(f). \tag{2.9}$$

Determinarea expresiilor analitice ale funcțiilor de transfer ce constituie elementele matricelor $\mathbf{H}_{qx_0}$, $\mathbf{H}_{xx_0}$, $\mathbf{H}_{f'x_0}$ sau H_{zx_0}, este extrem de laborioasă în cazul general, fiind preferat calculul numeric al acestora pentru un șir convenabil de valori ale frecvenței f. În acest mod, calculul se reduce la o serie de operații algebrice cu matrice, care pot fi efectuate rapid cu ajutorul unui calculator numeric. Datele pentru programul de calcul sînt matricele $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}_S$, $\mathbf{K}_P$, $\mathbf{C}_S$, $\mathbf{C}_P$ și $\mathbf{A}$ care definesc sistemul mecanic considerat, pasul de eșantionare a frecvenței f și valoarea maximă a acesteia.

3. CARACTERIZAREA STATISTICĂ A EXCITAȚIEI

Acțiunea drumului asupra unui automobil poate fi modelată printr-un proces aleator vectorial ale cărui componente reprezintă deplasările impuse roților în punctele de contact ale acestora cu suprafața drumului. Presupunînd că ecartamentul față este același cu cel spate, rezultă că roțile situate pe aceeași parte a automobilului (stînga sau dreapta) urmăresc același profil. Dacă se notează cu $\{x_{0D}(s)\}$ și $\{x_{0S}(s)\}$ funcțiile aleatoare care descriu profilele căilor de rulare dreapta și stînga în funcție de distanța s, acțiunea drumului asupra unui automobil care circulă cu viteza constantă v este reprezentată de procesul aleator vectorial

$$\{\mathbf{x}_0^v(t)\} = [\{x_0^v(t)\}_1, \{x_0^v(t)\}_2, \{x_0^v(t)\}_3, \{x_0^v(t)\}_4]^T,$$

ale cărui componenente pot fi puse sub forma (vezi fig. 1)

$$\begin{aligned}
\{x_0^v(t)\}_1 &= \{x_{0D}(vt)\} = \{x_{0D}^v(t)\},\\
\{x_0^v(t)\}_2 &= \{x_{0S}(vt)\} = \{x_{0S}^v(t)\},\\
\{x_0^v(t)\}_3 &= \{x_{0S}(v(t-T_v))\} = \{x_{0S}^v(t-T_v)\},\\
\{x_0^v(t)\}_4 &= \{x_{0D}(v(t-T_v))\} = \{x_{0D}^v(t-T_v)\},
\end{aligned} \tag{3.1}$$

unde $T_v = A/v$, A fiind ampatamentul automobilului.

Pentru tronsoane dintr-o anumită categorie de drum și o viteză constantă de parcurgere a acestora, ipoteza de staționaritate a procesului aleator vectorial $\{\mathbf{x}_0^v(t)\}$ poate fi adoptată cu o bună aproximație. Adoptarea acestei ipoteze are la bază faptul că, în general, suprafețele drumurilor prezintă o omogenitate satisfăcătoare a repartiției și formei denivelărilor pentru același tip de acoperire (beton, asfalt, piatră cubică, piatră de rîu etc.). Această omogenitate se manifestă atît pe direcție longitudinală, cît și transversală, cu excepția posibilă a porțiunilor situate în vecinătatea marginei drumului.

Fără a restrînge generalitatea, se poate considera că funcțiile aleatoare $\{x_{0D}(s)\}$ și $\{x_{0S}(s)\}$ au media nulă, ceea ce se poate oricînd realiza prin raportarea profilelor căilor de rulare la axele de medie nulă, adică prin centrarea celor două funcții aleatoare. În acest caz

$$\mu_{x_0}^v = E[\{\mathbf{x}_0^v(t)\}] = 0, \tag{3.2}$$

iar matricele de corelație și de covarianță ale procesului aleator vectorial $\{\mathbf{x}_0^v(t)\}$ coincid. În (3.2) E este operatorul de valoare medie.

O serie de rezultate experimentale [5] au arătat că se poate considera cu o bună aproximație

$$R_S(l) = R_D(l) = R_0(l),\ R_{DS}(l) = R_{SD}(l) = R_m(l), \tag{3.3}$$

unde $R_S(l), R_D(l)$ sînt funcțiile de autocorelație ale căilor de rulare stînga, respectiv dreapta, iar $R_{DS}(l)$ și $R_{SD}(l)$ sînt funcțiile de intercorelație ale celor două căi de rulare.

Utilizînd relațiile (3.3) matricea densităților spectrale ale acțiunii drumului asupra unui autovehicul care se deplasează cu viteza constantă v poate fi pusă sub forma [5]

$$\mathbf{G}_{x_0}^v(f) = (1/v)\, G_0(f/v)\, \Gamma_0(f/v), \tag{3.4}$$

unde

$$\Gamma_0(f/v) = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_0(f/v) & \gamma_0(f/v)e^{-i2\pi fT_v} & e^{-i2\pi fT_v} \\ \gamma_0(f/v) & 1 & e^{-i2\pi fT_v} & \gamma_0(f/v)e^{-i2\pi fT_v} \\ \gamma_0(f/v)e^{i2\pi fT_v} & e^{i2\pi fT_v} & 1 & \gamma_0(f/v) \\ e^{i2\pi fT_v} & \gamma_0(f/v)e^{i2\pi fT_v} & \gamma_0(f/v) & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_0(n) = 4\int_0^\infty R_0(l)\cos 2\pi\, nl\,dl, \quad G_m(n) = 4\int_0^\infty R_m(l)\cos 2\pi\, nl\,dl, \tag{3.5}$$

$$\gamma_0(n) = G_m(n)/G_0(n),$$

n fiind numărul de undă al denivelărilor drumului.

Din relațiile (3.4) — (3.5) rezultă că acțiunea drumului asupra automobilului poate fi caracterizată statistic prin intermediul a două funcții care se determină experimental: densitatea spectrală $G_0(n)$ a microprofilului longitudinal al drumului și funcția de coerență $\gamma_0(n)$ a celor două căi de rulare.

Această modelare a acțiunii drumului asupra automobilului permite analiza vibrațiilor verticale, de tangaj și de ruliu ale automobilului, cînd acesta parcurge drumul respectiv cu viteza constantă v.

4. CARACTERIZAREA STATISTICĂ A RĂSPUNSULUI

Obținerea matricelor de transfer $\mathbf{H}_{qx_0}(f)$, $\mathbf{H}_{xx_0}(f)$, $\mathbf{H}_{zx_0}(f)$ și $\mathbf{H}_{f'x_0}(f)$ ale sistemelor oscilante ce modelează suspensiile automobilelor în modul descris în §2, și generarea matricei densităților spectrale $G^v_{x_0}(f)$ a acțiunii drumului așa cum s-a arătat în §3, permite utilizarea relației [6]

$$G^v_u(f) = \overline{H_{ux_0}(f)}\, G_{x_0}(f)\, H^T_{ux_0}(f) \tag{4.1}$$

pentru calculul elementelor matricelor densităților spectrale ale răspunsului automobilelor. În (4.1) prin u s-a notat generic oricare dintre mărimile care caracterizează răspunsul automobilului menționate în §1.

Conform relațiilor (3.4) și (4.1), matricele densităților spectrale corespunzătoare proceselor aleatoare vectoriale $\{\mathbf{q}(t)\}$ (coordonatele generalizate), $\{\mathbf{x}(t)\}$ (deplasările verticale), $\{\mathbf{z}(t)\}$ (deplasările relative) și $\{\mathbf{f}'(t)\}$ (forțele dinamice) au expresiile

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^v_q(f) &= (1/v)\,\overline{\mathbf{H}_{qx_0}(f)}\;\Gamma_0(f/v)\,\mathbf{H}^T_{qx_0}(f)\,\mathbf{G}_0(f/v), \\ \mathbf{G}^v_x(f) &= (1/v)\,\overline{\mathbf{H}_{xx_0}(f)}\;\Gamma_0(f/v)\,\mathbf{H}^T_{xx_0}(f)\,\mathbf{G}_0(f/v), \\ \mathbf{G}^v_z(f) &= (1/v)\,\overline{\mathbf{H}_{zx_0}(f)}\;\Gamma_0(f/v)\,\mathbf{H}^T_{zx_0}(f)\,\mathbf{G}_0(f/v), \\ \mathbf{G}^v_{f'}(f) &= (1/v)\,\overline{\mathbf{H}_{f'x_0}(f)}\;\Gamma_0(f/v)\,\mathbf{H}^T_{f'x_0}(f)\,\mathbf{G}_0(f/v). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Matricele densităților spectrale ale vitezelor și accelerațiilor se obțin ținînd seama de relațiile existente între densitățile spectrale ale unui proces aleator și cele ale derivatelor sale [4]. Rezultă

$$\mathbf{G}_{\dot{q}}^{v}(f) = 4\pi^2 f^2 \mathbf{G}_{q}^{v}(f), \quad \mathbf{G}_{\ddot{q}}^{v}(f) = 16\pi^4 f^4 \mathbf{G}_{q}^{v}(f), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{G}_{\dot{x}}^{v}(f) = 4\pi^2 f^2 \mathbf{G}_{x}^{v}(f), \quad \mathbf{G}_{\ddot{x}}^{v}(f) = 16\pi^4 f^4 \mathbf{G}_{x}^{v}(f), \quad \mathbf{G}_{z}^{v}(f) = 4\pi^2 f^2 \mathbf{G}_{z}^{v}(f).$$

Din punct de vedere al caracterizării statistice atît a intensității regimului de vibrații aleatoare ale automobilului, cît și a dependenței dintre diferite componente ale proceselor aleatoare vectoriale $\{\mathbf{q}(t)\}$, $\{\mathbf{x}(t)\}$, $\{\mathbf{z}(t)\}$, $\{\mathbf{f}'(t)\}$ sau ale derivatelor acestora, un interes deosebit îl prezintă matricele de corelație instantanee care se obțin din relațiile [6]:

$$\mathbf{R}_{q}^{v}(0) = \int_0^\infty \mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{q}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f, \quad \mathbf{R}_{\dot{q}}^{v}(0) = 4\pi^2 \int_0^\infty f^2\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{q}(f)]\,\mathrm{d}f,$$

$$\mathbf{R}_{\ddot{q}}^{v}(0) = 16\pi^4 \int_0^\infty f^4\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{q}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f, \quad \mathbf{R}_{x}^{v}(0) = \int_0^\infty \mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{x}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{R}_{\dot{x}}^{v}(0) = 4\pi^2 \int_0^\infty f^2\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{x}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f, \quad \mathbf{R}_{\ddot{x}}^{v}(0) = 16\pi^4 \int_0^\infty f^4 \mathrm{Re}[\mathbf{G}_{x}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f,$$

$$\mathbf{R}_{z}^{v}(0) = \int_0^\infty \mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{z}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f, \quad \mathbf{R}_{\dot{z}}^{v}(0) = 4\pi^2 \int_0^\infty f^2\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{z}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f,$$

$$\mathbf{R}_{f'}^{v}(0) = \int_0^\infty \mathrm{Re}\,[\mathbf{G}_{f'}^{v}(f)]\,\mathrm{d}f,$$

unde prin Re [**G**] se înțelege partea reală a matricei **G**. Matricele de corelație instantanee sînt simetrice. Elementele diagonale ale acestor matrice sînt mediile pătratice ale componentelor proceselor aleatoare considerate, iar din elementele nediagonale se obțin coeficienții de corelație a valorilor simultane ale acestor componente conform formulei [6]

$$\rho_{u_k u_m}(\tau) = R_{u_k u_m}(\tau) / \sqrt{R_{u_k}(0)\, R_{u_m}(0)}, \tag{4.5}$$

scrisă pentru $\tau = 0$.

Relațiile (4.2) — (4.4) permit elaborarea unui program de calcul unitar pentru evaluarea numerică a tuturor caracteristicilor statistice de ordinul al doilea ale vibrațiilor aleatoare ale automobilelor avînd diferite variante constructive de suspensii. În funcție de problema abordată (evaluarea nivelului de vibrații, determinarea solicitărilor dinamice ale diferitor subansamble ale suspensiei, optimizarea caracteristicilor de

amortizare și rigiditate, analiza vibrațiilor cuplate etc.) volumul de calcul poate fi redus, evaluînd numai unele caracteristici statistice, de exemplu : mediile pătratice ale accelerațiilor verticale, de tangaj și de ruliu ale masei suspendate, mediile pătratice ale forțelor dinamice din suspensie și pneuri, coeficienții de corelație dintre vibrațiile față-spate și stînga-dreapta ale masei suspendate etc.

5. EXEMPLU DE CALCUL

Pentru exemplificarea metodelor de calcul prezentate se consideră sistemul mecanic oscilant cu patru grade de libertate dat în figura 2, avînd valorile constantelor geometrice,de masă, de rigiditate și de amortizare corespunzătoare automobilelor Dacia 1300 (vezi tabelul 1).

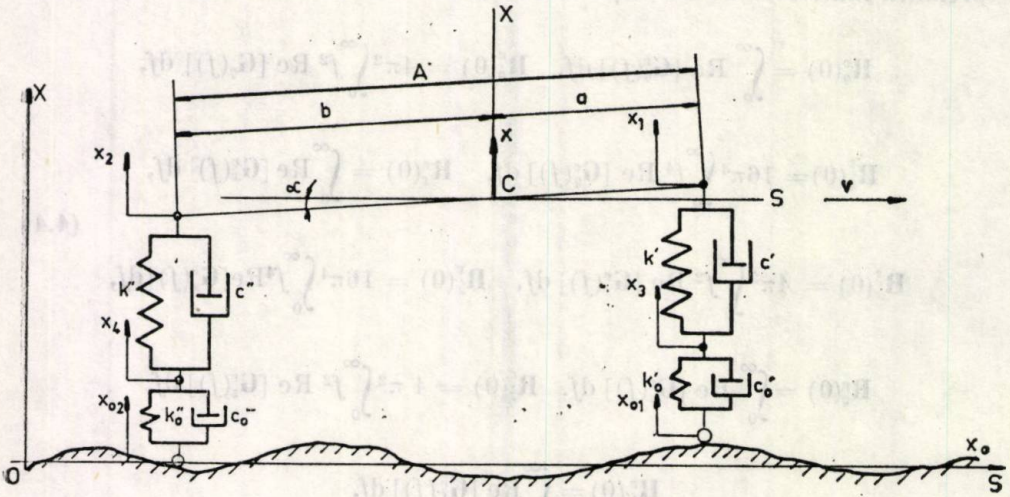


Fig. 2

Tabelul 1

Parametrii sistemului oscilant al autoturismului Dacia 1300

m [kg]	1150	A [m]	2,441	k' [daN/m]	1137
m' [kg]	31,5	E [m]	1,312	k'' [daN/m]	1410
m'' [kg]	70	a [m]	1,223	k_0' [daN/m]	16700
I_α [kg·m²]	913	b [m]	1,218	k_0'' [daN/m]	21800
I_β [kg·m²]	212	d' [m]	0,49	c' [daN·s/m]	83,5
I_β'' [kg·m²]	22	d'' [m]	0,49	c'' [daN·s/m]	168,5

Utilizarea unui astfel de model permite determinarea caracteristicilor statistice ale accelerațiilor verticale și de tangaj, ale forțelor dinamice la roți și evaluarea coeficienților de corelație dintre vibrațiile față-spate

și sus-jos. Aceste caracteristici furnizează informațiile necesare privind gradul de confort și aderență roată-sol conferite de suspensie, precum și influența cuplajului dintre vibrațiile diferitor subansamble ale automobilului.

Calculele au fost efectuate pentru următoarele tipuri de drumuri: drum asfaltat DA(v = 70 km/h), drum pavat cu piatră cubică DPC (v = = 60 km/h) și drum de țară DT (v = 40 km/h). Pentru densitățile spectrale ale microprofilului longitudinal al drumurilor respective s-au utilizat expresiile analitice date în [7]. Rezultatele obținute sînt sistematizate în tabelele 2 și 3.

Tabelul 2

Tipul de drum	$\sigma_{\ddot{x}}$ [g]	$\sigma_{\ddot{\alpha}}$ [rad/s^2]	$\sigma_{\ddot{x}_1}$ [g]	$\sigma_{\ddot{x}_2}$ [g]	$\sigma_{\ddot{x}_3}$ [g]	$\sigma_{\ddot{x}_4}$ [g]	$\sigma_{f'_3}$ [daN]	$\sigma_{f'_4}$ [daN]
D A v = 70 km/h	0,82	0,620	0,092	0,127	1,52	1,47	51,7	55,5
D P C v = 60 km/h	0,122	0,972	0,140	0,196	3,05	2,94	97,8	102,5
D T v = 40 km/h	0,132	1,19	0,169	0,221	3,93	3,84	127,5	129,3

Tabelul 3

Tipul de drum	$\rho_{\ddot{x}\ddot{\alpha}}$	$\rho_{\ddot{x}_1\ddot{x}_2}$	$\rho_{\ddot{x}_1\ddot{x}_3}$	$\rho_{\ddot{x}_2\ddot{x}_4}$
D A v = 70 km/h	−0,317	0,085	−0,091	−0,001
D P C v = 60 km/h	−0,344	0,032	−0,104	0,0001
D T v = 40 km/h	−0,334	−0,101	−0,097	−0,002

Datele din tabelul 2 permit analiza comparativă a confortului și aderenței conferite de suspensia unui autovehicul la deplasarea pe diferite tipuri de drumuri. Faptul că mediile pătratice ale accelerațiilor verticale ale caroseriei sînt mai mici în față decît în spate, evidențiază avantajele suspensiei independente în raport cu cea pe punte rigidă.

Din tabelul 3 se constată că există o anumită corelație statistică între vibrațiile verticale ale centrului de greutate și vibrațiile unghiulare de tangaj, în timp ce vibrațiile verticale față-spate și sus-jos sînt practic necorelate din punct de vedere statistic.

Primită la redacție la 14 mai 1981

BIBLIOGRAFIE

1. R. V. ROTENBERG, *Podveska avtomobilia*, Moskva, Mașinostroenie, 1972.
2. V. VÎLCOVICI, ST. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, București, Edit. Tehnică, 1968.
3. Y. K. LIN, *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*, New York, McGraw-Hill, 1967.
4. J. S. BENDAT, A. G. PIERSOL, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, New York, Willey-Interscience, 1971.
5. C. J. DODDS, J. D. ROBSON, *The description of road surface roughness*, Journal of Sound and Vibration, **31** (1973), *2*, p. 175.
6. J. D. ROBSON, *The response relationships of random vibration analysis*, Journal of Sound and Vibration, **73** (1980), *2*, p. 312.
7. S. PĂRĂIAN, T. SIRETEANU, I. ROȘU, *Determinarea densităților spectrale ale acțiunii drumurilor pe baza analizei experimentale a vibrațiilor automobilelor*, St. cerc. mec. apl., **40**, *5* (1981).

UN ALGORITM PENTRU ANALIZA ŞI SINTEZA PE CALCULATOR A PARAMETRILOR GEOMETRICI AI ROŢILOR-FAŢĂ CU SUSPENSIE INDEPENDENTĂ DE LA AUTOMOBILE. ANALIZA PARAMETRILOR ROŢILOR-FAŢĂ DE LA DACIA 1300

de N. TRUICĂ

Institutul de fizica şi tehnologia materialelor, Bucureşti

Sînt definite geometric mecanismele patrulatere spaţiale articulate ale suspensiei şi direcţiei şi unghiurile de stabilitate a direcţiei. Este evidenţiată deplasarea unghiulară a portfuzetei în jurul axei pivoţilor. Sînt calculate coordonatele punctului în care roata face contact cu planul de rulare Q, ale punctului în care axa pivotului intersectează planul Q, ale centrului instantaneu de rotaţie al roţilor-faţă în timpul virării automobilului. Lucrarea se încheie cu analiza parametrilor geometrici ai roţilor-faţă de la autoturismul Dacia 1300.

§ 1. INTRODUCERE

Ataşăm masei suspendate reperul $(0, \vec{i}_k)$, situat în planul median longitudinal al automobilului, format din punctul O şi versorii $\vec{i}_k$, $k = 1, 2, 3$, astfel orientat încît $\vec{i}_1$ să fie paralel şi de acelaşi sens cu vectorul vitezei automobilului la mersul înainte, iar $\vec{i}_3$ să fie perpendicular pe planul de rulare Q şi îndreptat de jos în sus; versorii $\vec{i}_k$ formează un triedru ortonormat drept.

Mecanismul suspensiei şi direcţiei roţii faţă stînga Dacia 1300, prezentat schematic în epura din figura 1, este format din următoarele elemente:

— *braţul inferior AM şi braţul superior BN*, prinse de masa suspendată prin articulaţiile cilindrice A şi B, ale căror axe de rotaţie sînt paralele cu versorul $\vec{i}_1$. În interiorul acestor două articulaţii se montează elementele viscoelastice numite *flexiblocuri*. Montarea flexiblocurilor se face astfel încît pentru o anumită poziţie a celor două braţe, momentele de torsiune care solicită articulaţiile A şi B să fie nule. Punctele M şi N sînt centrele unor articulaţii sferice, numite *articulaţia rotulei inferioare*, respectiv *articulaţia rotulei superioare*.

— de articulaţiile M şi N se prinde *portfuzeta*. Notăm cu C punctul în care axa de rotaţie a fuzetei intersectează planul median al roţii şi cu F centrul articulaţiei sferice de care se prinde *bieleta de direcţie*. Celălalt capăt al bieletei (*piciorul*) se prinde de cremaliera mecanismului de direcţie prin articulaţia sferică E. Fuzeta şi roata automobilului sînt solidare, axa lor de rotaţie fiind perpendiculară pe planul median al roţii.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 1, 1982, P. 109–124

— amortizorul și arcul elicoidal se montează concentric, între articulațiile sferice G și H, H fiind solidară cu brațul superior, iar G cu masa suspendată.

În cele ce urmează vom considera următoarele ipoteze: punctele C, M, N și F ale portfuzetei formează un tetraedru rigid; distanțele dintre articulațiile A și M; B, H și N; E și F sînt constante; articulațiile A, B și G, solidare cu masa suspendată a automobilului, sînt puncte fixe, în raport cu reperul $(O, \vec{i}_k)$.

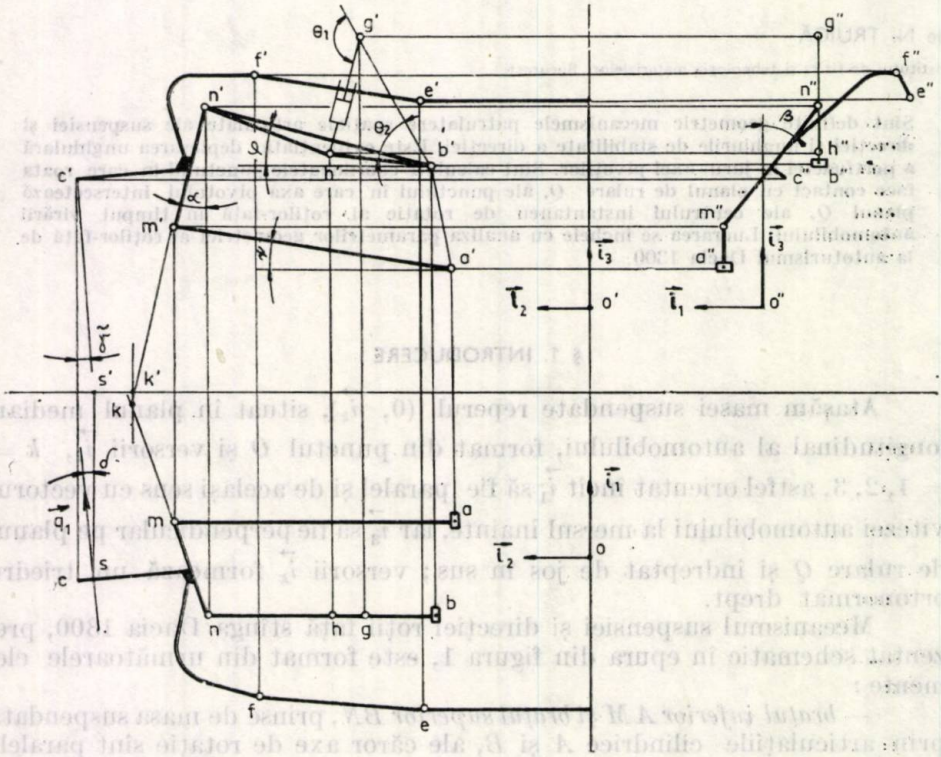


Fig. 1

Notațiile utilizate în lucrare și datele cunoscute ale mecanismului, obținute din desenele de construcție, sînt date în tabelele 1.1 și 1.2.

Analiza numerică a parametrilor geometrici ai roților față se va face în funcție de două mărimi variabile: distanța d_1 dintre punctele de prindere G și H ale amortizorului și coordonata y_E a piciorului bieletei de direcție:

$$y_E = y_E^0 \pm Y. \tag{1.1}$$

Simbolurile notate cu indicele zero reprezintă valoarea mărimii respective corespunzătoare condițiilor inițiale de la montajul mecanismului: se reglează portfuzeta astfel ca axa de rotație a roții să se afle

într-un *plan frontal* (plan perpendicular pe $\vec{i}_1$; în acest caz, *urma planului* median al roții pe planul de rulare Q este paralelă cu $\vec{i}_1$) și cota centrului C al roții să aibe valoarea impusă z_C^0 ; se montează bieleta de direcție, determinîndu-se astfel coordonata y_E^0. Articulația E a piciorului bieletei

Tabelul 1.1

$$x_k \vec{i}_1 + y_k \vec{i}_2 + z_k \vec{i}_3 = x_k \vec{i}_1 + \vec{e}_k = \vec{d}_k$$

		x_k	y_k	z_k	e_k	d_k
GH	$\vec{d}_1$	0	y_1	z_1	d_1	d_1
BH	$\vec{d}_2$	0	$b_2 \cos\varphi - c_2 \sin\varphi$	$b_2 \sin\varphi + c_2 \cos\varphi$	154,378	154,378
BG	$\vec{d}_3$	0	162	383,5	416,312	416,312
BN	$\vec{d}_4$	0	$d_4 \cos\varphi$	$d_4 \sin\varphi$	243	243
AB	$\vec{d}_5$	−14,12	2	213,5	213,509	213,975
AM	$\vec{d}_6$	0	$d_6 \cos\psi$	$d6 \sin\psi$	274,3	274,3
AN	$\vec{d}_7$	x_5	$y_5 + d_4 \cos\varphi$	$z_5 + d_4 \sin\varphi$	e_7	d_7
MN	$\vec{d}_8$	x_5	$y_5 + d_4 \cos\varphi - d_6 \cos\psi$	$z_5 + d_4 \sin\varphi - d_6 \sin\psi$	218,255	218,711
ME	$\vec{d}_{11}$	x_{11}	y_{11}	z_{11}	e_{11}	d_{11}
EF	$\vec{d}_{12}$	x_{12}	y_{12}	z_{12}	e_{12}	237
OA	$\vec{r}_A$	5,2	326	34	—	—
OB	$\vec{r}_B$	− 8,92	328	247,5	—	—
OG	$\vec{r}_G$	− 8,92	490	631	—	—
OE	$\vec{r}_E$	−95,627	$y_E^0 \pm Y$	300,202	—	—

Tabelul 1.2

$$a_k \vec{u}_1 + b_k \vec{u}_2 + c_k \vec{u}_3 = \vec{d}_k \qquad \text{[mm]}$$

		a_k	b_k	c_k	d_k
BH	$\vec{d}_2$	0	151,8	28,1	154,378

$$a_k \vec{W}_1 + b_k \vec{W}_2 + c_k \vec{W}_3 = \vec{d}_k$$

MN	$\vec{d}_8$	218,711	0	0	218,711
MC	$\vec{d}_9$	77,752	73,310	0	106,863
MF	$\vec{d}_{10}$	287,546	−30,116	115,51	311,339
	$\vec{q}_2$	−0,162634	0,986686	0	1

de direcție se deplasează după o linie dreaptă fixă, paralelă cu $\vec{i}_2$, atît în timpul reglării mecanismului, cît și în timpul acționării cremalierei.

Valoarea $Y = 0$ corespunde deplasării automobilului în linie dreaptă; $y < 0$ corespunde virajelor la stînga, $y > 0$ — virajelor la dreapta.

§ 2. DEFINIREA MECANISMULUI SUSPENSIEI

Din triunghiul BGH, situat într-un plan frontal, obținem relația

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_3 = \vec{d}_2 . \tag{2.1}$$

Amplificăm această relație cu $\vec{d}_3$, scalar și vectorial; rezultă

$$d_1 \cos \theta_1 + d_3 = d_2 \cos \theta_2,$$

$$d_1 \sin \theta_1 = d_2 \sin \theta_2, \tag{2.2}$$

unghiurile θ_1 și θ_2 fiind date de relațiile:

$$\theta_1 = \text{arc cos} \frac{d_2^2 - d_1^2 - d_3^2}{2 d_1 d_3} \in (0, \pi),$$

$$\theta_2 = \text{arc cos} \frac{d_2^2 + d_3^2 - d_1^2}{2 d_2 d_3} \in (0, \pi). \tag{2.3}$$

Notăm cu D proiecția ortogonală a punctului B pe dreapta GH, cu h_1 distanța de la B la D și cu g_1 distanța de la D la H:

$$h_1 = d_2 \sin (\theta_1 - \theta_2); \; g_1 = d_2 \cos (\theta_1 - \theta_2). \tag{2.4}$$

Derivăm relațiile (2.2) în raport cu timpul și ținem seama de ultimile notații; obținem:

$$d_1 \dot{\theta}_1 = g_1 \dot{\theta}_2; \; \dot{d}_1 = h_1 \dot{\theta}_2 . \tag{2.5}$$

Relațiile (2.5) exprimă faptul că pentru un observator solidar cu brațul BN, situat în punctul D, dreapta GH se rostogolește fără alunecare pe cercul de rază BD, cu viteza unghiulară $\vec{\dot{\theta}}_2$:

$$\vec{\dot{d}}_1 = \vec{\dot{d}}_2 = \vec{\dot{\theta}}_2 \times \vec{d}_2 = \vec{\dot{\theta}}_2 \times (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH}).$$

$$\vec{\dot{d}}_1 - \vec{\dot{\theta}}_2 \times \overrightarrow{BD} = \vec{\dot{\theta}}_2 \times \overrightarrow{DH}; \; \vec{\dot{\theta}}_2 = \vec{\dot{\theta}}_2 \vec{i}_1. \tag{2.6}$$

Punctul D descrie cercul de diametru FG.

Pentru stabilirea poziției articulației N în timpul funcționării mecanismului, atașăm punctului B versorii $\vec{u}_k$, $k = 1, 2, 3$, solidari cu brațul superior, astfel orientați încît să existe relațiile:

$$\overrightarrow{BN} = d_4 \vec{u}_2 ; \quad \vec{i}_2 \times \vec{u}_2 = \vec{i}_1 \sin \varphi,$$

$$v_2(\vec{i}_k) = \mathbf{A} v_2(\vec{u}_k) ; \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} , \tag{2.7}$$

$v_2(\vec{i}_k)$ și $v_2(\vec{u}_k)$ sînt matrice-coloană ale căror elemente sînt componentele vectorului $\vec{d}_2$ în raport cu triedrele $(\vec{i}_k)$, respectiv $(\vec{u}_k)$:

$$\overrightarrow{BH} = \vec{d}_2 = x_2 \vec{i}_1 + y_2 \vec{i}_2 + z_2 \vec{i}_3 = a_2 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2 + c_2 \vec{u}_3,$$

$$v_2(\vec{i}_k) = \begin{Vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Vmatrix} ; \quad v_2(\vec{u}_k) = \begin{Vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{Vmatrix} . \tag{2.8}$$

Unghiul φ se determină din relația

$$\varphi = \varphi_3 - \theta_2 ; \tag{2.9}$$

unghiul constant φ_3 se calculează cu formulele:

$$\cos \varphi_3 = \frac{b_2 y_3 + c_2 z_3}{e_2 e_3} ; \quad \sin \varphi_3 = \frac{b_2 z_3 - c_2 y_3}{e_2 e_3} .$$

Brațul inferior este determinat de unghiul ψ:

$$\overrightarrow{AM} = \vec{d}_6 = d_6(\vec{i}_2 \cos\psi + \vec{i}_3 \sin\psi).$$

Din triunghiurile ABN și AMN obținem

$$\vec{d}_4 + \vec{d}_5 = \vec{d}_6 + \vec{d}_8 = \vec{d}_7, \tag{2.10}$$

respectiv $\varphi_7 - \psi = \arccos \dfrac{e_6^2 + e_7^2 - e_8^2}{2 e_6 e_7} \in (0, \pi)$,

unghiul φ_7 fiind determinat cu relațiile:

$$\cos \varphi_7 = \frac{y_5 + d_4 \cos\varphi}{e_7} ; \quad \sin \varphi_7 = \frac{z_5 + d_4 \sin\varphi}{e_7} .$$

Toate unghiurile utilizate pînă acum apar în adevărată mărime în proiecţia frontală din epură, mecanismul putînd fi determinat grafic pentru orice valoare a parametrului d_1.

§2.1. Axa pivotului (rotulelor) este determinată de centrele articulaţiilor sferice M şi N. Introducem următoarele notaţii :

$$\overrightarrow{MN} = \vec{d}_8 = d_8 \vec{w}_1 = x_8 \vec{i}_1 + y_4 \vec{i}_2 + z_8 \vec{i}_3 = x_8 \vec{i}_1 + c_8 \vec{j}_3,$$

$$\cos \nu = \frac{x_8}{d_8}; \qquad \sin \nu = \frac{e_8}{d_8},$$

$$\cos \alpha = \frac{z_8}{e_8}; \quad \sin \alpha = -\frac{y_8}{e_8}, \tag{2.11}$$

$$\vec{j}_1 = \vec{i}_1; \vec{j}_3 = -\vec{i}_2 \sin \alpha + \vec{i}_3 \cos \alpha; \vec{j}_2 = \vec{j}_3 \times \vec{j}_1.$$

Cu aceste notaţii expresia lui $\vec{d}_8$ poate fi scrisă sub forma :

$$v_8(\vec{i}_k) = \mathbf{B}\, v_8(\vec{j}_k); \quad \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{Vmatrix}. \tag{2.12}$$

Pentru a pune în evidenţă deplasarea unghiulară constantă ν a triedrului $(\vec{j}_k)$ introducem un nou triplet de versori :

$$\vec{k}_1, = \vec{w}_1 = \vec{j}_1 \cos \nu + \vec{j}_3 \sin \nu,$$

$$\vec{k}_2 = \vec{j}_2; \quad \vec{k}_3 = \vec{k}_1 \times \vec{k}_2.$$

Relaţia (2.12) devine :

$$v_8(\vec{i}_k) = \mathbf{B} v_8(\vec{j}_k) = \mathbf{BC} \cdot v_8(\vec{k}_j); \; c = \begin{Vmatrix} \cos \nu & 0 & -\sin \nu \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \nu & 0 & \cos \nu \end{Vmatrix}. \tag{2.13}$$

Definim unghiul β :

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{-x_8}{z_8} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tag{2.14}$$

Unghiurile α şi β, numite *unghiul de înclinare transversală* şi respectiv *unghiul de fugă*, ale axei pivotului, apar în adevărată mărime în proiecţiile frontală şi respectiv de profil, ale epurei mecanismului sus-

pensiei față. Între α, β și ν există relația :

$$\cos\alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \nu + 1 = 0.$$

Scriem ecuația axei pivoților sub forma :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \lambda \overrightarrow{MN}, \tag{2.15}$$

λ fiind un număr real diferit de zero.

Introducem notațiile :

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \vec{\dot{\psi}} \times \overrightarrow{AM} = \dot{\psi}\, \vec{i}_1 \times \vec{d}_6 ;\ m = \dot{\psi}\, e_6, \\ \vec{n} &= \vec{\dot{\varphi}} \times \overrightarrow{BN} = \dot{\varphi}\, \vec{i}_1 \times \vec{d}_4 ;\ n = \dot{\varphi}\, e_4 , \\ \vec{p} &= \vec{\dot{\alpha}} \times \overrightarrow{MN} = \dot{\alpha}\, \vec{i} \times \vec{e}_8 ;\ \ p = \dot{\alpha}\, e_8. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Derivînd în raport cu timpul relația (2.15), obținem :

$$\dot{\overrightarrow{OP}} = \vec{m} + \lambda \vec{p} ;\ \ \vec{p} = \vec{n} - \vec{m} , \tag{2.17}$$

$\vec{p}$ reprezintă viteza relativă a centrului N în raport cu M ;

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\varphi}\, d_4 \sin(\varphi - \psi)}{d_4 \sin(\varphi - \psi) + z_5 \cos\psi - y_5 \sin\psi} = \frac{\dot{\psi}\, d_6 \sin(\varphi - \psi)}{d_6 \sin(\varphi - \psi) + z_5 \cos\varphi - y_5 \sin\varphi} .$$

§ 3. DEFINIREA PORTFUZETEI

Atașăm punctului M un triedru ortonormat $(\vec{w}_j)$, $j = 1, 2, 3$, solidar cu portfuzeta, ai cărui versori sînt stabiliți de relațiile :

$$\overrightarrow{MN} = \vec{d}_8 = d_8 \vec{w}_1 ;\ \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \vec{w}_3 ,$$

$$\overrightarrow{MC} = \vec{d}_9 = a_9 \vec{w}_1 + b_9 \vec{w}_2 ,$$

$$v(\vec{k}_j) = \mathbf{D}\, v(\vec{w}_j), \mathbf{D} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{Vmatrix} . \tag{3.1}$$

Unghiul ε exprimă deplasarea unghiulară a portfuzetei în jurul axei MN a pivotului. Determinăm valoarea unghiului ε punînd condiția ca distanța dintre articulațiile E și F să fie egală cu lungimea constantă

a bieletei de direcție. În acest scop raportăm vectorii $\overrightarrow{MF}$ și $\overrightarrow{ME}$ la reperul $(M, \vec{k}_j)$; obținem :

$$\overrightarrow{MF} = \vec{d}_{10} = a_{10}\vec{k}_1 + f_{10}[\vec{k}_2 \cos(\varepsilon + \theta_{10}) + \vec{k}_3 \sin(\varepsilon + \theta_{10})],$$

$$\overrightarrow{ME} = \vec{d}_{11} = a_{11}\vec{k}_1 + f_{11}(k_2 \cos\theta_{11} + \vec{k}_3 \sin\theta_{11}),$$

$$\cos\theta_{10} = \frac{b_{10}}{f_{10}}\ ;\ \sin\theta_{10} = \frac{c_{10}}{f_{10}}\ ;\ f_{10} = \sqrt{b_{10}^2 + c_{10}^2},$$

$$\cos\theta_{11} = \frac{b_{11}}{f_{11}}\ ;\ \sin\theta_{11} = \frac{c_{11}}{f_{11}}\ ;\ f_{11} = \sqrt{b_{11}^2 + c_{11}^2}, \tag{3.2}$$

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \\ b_{11} \\ c_{11} \end{matrix} \right\| = \mathbf{C}^T\mathbf{B}^T \left\| \begin{matrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{matrix} \right\|.$$

Unghiul ε se calculează cu formula

$$\varepsilon = \theta_{11} - \theta_{10} - \theta, \tag{3.3}$$

în care :

$$\theta = \arccos \frac{d_{10}^2 + d_{11}^2 - d_{12}^2 - 2\,a_{10}\,a_{11}}{2\,f_{10}\,f_{11}} \in (0, \pi).$$

Între proiecțiile x, y, z, ale unui vector din reperul $(M, \vec{i}_k)$ și proiecțiile a, b, c ale aceluiași vector în raport cu reperul $(M, \vec{w}_j)$ există relația :

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D} \left\| \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \right\|, \tag{3.4}$$

în care **B**, **C** și **D** sînt matricele ortogonale definite mai înainte. Deci putem aduce un vector din $(M, \vec{i}_k)$ în $(M, \vec{w}_j)$ prin trei deplasări unghiulare succesive : α, care depinde de valoarea d_1 dintre punctele de prindere ale amortizorului, ν — o constantă a mecanismului și ε deplasarea unghiulară a portfuzetei în jurul axei pivoților.

§ 3.1. UNGHIURILE ROȚII FAȚĂ

Definim axa de rotație a roții față, solidară cu portfuzeta, prin centrul C al roții și versorul $\vec{q}_2$:

$$\vec{q}_2 = \cos\lambda\,\vec{w}_1 + \sin\lambda\,\vec{w}_2 = \vec{i}_j \cos\lambda_j,$$

$$\left\| \begin{matrix} \cos\lambda_1 \\ \cos\lambda_2 \\ \cos\lambda_3 \end{matrix} \right\| = \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D} \left\| \begin{matrix} \cos\lambda \\ \sin\lambda \\ 0 \end{matrix} \right\| ;\ \lambda_j \in [0,\ \pi). \tag{3.5}$$

Atașăm centrului C al roții și versorii $\vec{q}_1$ și $\vec{q}_3$:

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{q}_2 \times \vec{i}_3}{\sin \lambda_3} \quad ; \quad \vec{q}_3 = \vec{q}_1 \times \vec{q}_2.$$

Planul $(\vec{q}_2, \vec{i}_3)$ este perpendicular atît pe planul median al roții, cît și pe planul de rulare Q. Versorul $\vec{q}_3$ este situat în planul $(\vec{q}_2, \vec{i}_3)$ și formează cu $\vec{i}_3$ *unghiul de cădere* γ *al roții;* versorul $\vec{q}_1$ este paralel cu planul Q și formează cu $\vec{i}_1$ *unghiul de înclinare orizontală* δ *al roții:*

$$\vec{q}_1 \times \vec{i}_1 = \vec{i}_3 \sin \delta ; \qquad \cos \delta = \frac{\cos \lambda_2}{\sin \lambda_3} ; \sin \delta = \frac{\cos \lambda_1}{\sin \lambda_3},$$

$$\vec{q}_3 \times \vec{i}_3 = \vec{q}_1 \sin \gamma ; \gamma = \lambda_3 - \frac{\pi}{2}. \tag{3.7}$$

Valoarea inițială δ_0, realizată pentru mersul în linie dreaptă ($y = 0$) poartă numele de *unghi de convergență*. Deci, *unghiul de cabrare al roții* are valoarea $\delta - \delta_0$.

Între componentele X- Y, Z ale unui vector din reperul $(C, \vec{i}_k)$ și componentele a, b, c ale aceluiași vector din reperul $(C, \vec{q}_k)$ există relația de transformare:

$$\begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Vmatrix} = \mathbf{P}\,\mathbf{Q} \begin{Vmatrix} a \\ b \\ c \end{Vmatrix} ; \mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \cos\delta \sin\delta & 0 \\ -\sin\delta \cos\delta & 0 \\ 0 \quad 0 & 1 \end{Vmatrix} ; \mathbf{Q} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{Vmatrix} \tag{3.8}$$

Notăm cu S punctul în care cercul de rază R, situat în planul median al roții automobilului, cu centrul în C, este tangent planului Q:

$$\overrightarrow{CS} = -R\,\vec{q}_3. \tag{3.9}$$

Ținînd seama de (3.8) obținem coordonatele lui S în reperul $(C, \vec{i}_k)$:

$$X_s = -R \sin\delta \sin\gamma,$$

$$Y_s = -R \cos\delta \sin\gamma, \tag{3.10}$$

$$Z_s = -R \cos\gamma. \tag{3.10}$$

Putem acum scrie ecuația planului de rulare Q în raport cu reperul fix $(O, \vec{i}_k)$:

$$Z = Z_C - R \cos\gamma. \tag{3.11}$$

Notăm cu K punctul în care axa pivoților intersectează planul Q; obținem coordonatele lui K din ecuațiile (2.15) și (3.11).

§ 4. REGLAREA INIȚIALĂ A MECANISMULUI DIRECȚIEI

Condiția ca axa de rotație a roții să se afle într-un plan frontal se exprimă prin relația

$$\vec{q}_2 \vec{i}_1 = 0, \tag{4.1}$$

respectiv $\lambda_1^0 = \frac{\pi}{2}$; $\lambda_2^0 + \lambda_3^0 = \frac{\pi}{2}$;

$$\varepsilon_0 = \arcsin(\operatorname{ctg} \nu \operatorname{ctg} \lambda) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

În cazul de care ne ocupăm, condiția ca ε_0 să aparțină intervalului $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ reprezintă o caracteristică a construcției acestui mecanism.

Punem și condiția ca centrul C să aibe cota impusă z_C^0 :

$$a_9 \cos \alpha_0 \sin \nu + b_9 (\sin \alpha_0 \cos \varepsilon_0 + \cos \alpha_0 \cos \nu \sin \varepsilon_0) +$$

$$+ d_6 \sin \psi_0 + z_4 = z_c^\circ . \tag{4.2}$$

Ținînd seama de notațiile (2.11) ultima relație se poate scrie sub forma :

$$b(d_6 \cos \psi_0 - d_4 \cos \varphi_0) + c (d_4 \sin \varphi_0 - d_4 \sin \psi_0) +$$

$$+ d_6 \sin \psi_0 = z_0, \tag{4.3}$$

în care $b = \frac{b_9 \cos \varepsilon_0}{e_8}$; $c = \frac{d_9 \sin \nu + b_9 \cos \nu \sin \varepsilon_0}{e_8}$,

$$z_0 = z_c^\circ - z_A + b\ y_5 - c z_5.$$

Pentru determinarea unghiurilor φ_0 și ψ_0, care determină poziția mecanismului suspensiei, se adaugă ecuației (4.3) relația de mai jos, obținută din (2.10) :

$$-\vec{d}_4 \vec{d}_5 + \vec{d}_6 \vec{d}_7 = e^2,$$

$$e^2 = \frac{1}{2}(e_4^2 + e_5^2 + e_6^2 - e_8^2). \tag{4.4}$$

Fiind calculate valorile ε_0, φ_0, ψ_0, α_0 se determină poziția articulației F în reperul $(M, \vec{i}_k)$ cu relația :

$$\begin{Vmatrix} x_{10}^0 \\ y_{10}^0 \\ z_{10}^0 \end{Vmatrix} = \mathbf{B}\ \mathbf{C}\ \mathbf{D} \begin{Vmatrix} a_{10} \\ b_{10} \\ c_{10} \end{Vmatrix}, \tag{4.5}$$

și se pune condiția ca în reperul fix distanța dintre articulațiile E și F să aibe valoarea constantă d_{12}. Se obține coordonata y_E^0 a piciorului bieletei de direcție :

$$y_E^0 = y_F^0 - \sqrt{d_{12}^2 - x_{12}^2 - z_{12}^2}\,. \tag{4.6}$$

Dăm mai jos valorile parametrilor inițiali ai roților față Dacia 1300 : lungimile în mm, unghiurile în grade sexagesimale ; vom păstra aceste unități și în tabelele din paragraful următor.

Tabelul 4.1

y_E^0	d_1^0	x_C^0	y_C^0	z_C^0	R
296,536	433,993	−0,599	659,826	82	262
α_0	β_0	γ_0	δ_0	ε_0	λ
7,694	3,735	1,684	0	0,610	99,359
φ_0	ψ_0	λ_1^0	$\lambda_2^0 + \gamma_0$	λ_3^0	ν
−8,487	−8,101	90°	0	$90+\gamma_0$	93,701

§ 5. CENTRUL INSTANTANEU DE ROTAȚIE AL ROȚILOR FAȚĂ

Ținînd seama că mecanismele suspensiei și direcției sînt simetrice față de planul median $y = 0$, cu notațiile din tabelul 5.1, stabilit pentru deplasări simetrice ale cremalierei, în ipoteza că centrele roților au aceeași cotă și unghiurile de cădere sînt nule, din ecuația

$$\vec{r}_I = \vec{r}_{c1} + R_i \vec{Q}_1 = \vec{r}_{c2} - R_e \vec{Q}_2, \tag{5.1}$$

obținem pentru coordonatele centrului instantaneu de rotație I și pentru razele de rulare R_i (interioară) și R_e (exterioară) expresiile :

$$\begin{aligned} R_i (\sin (\delta + \delta^*) &= (x_c^* - x_c)\cos \delta^* + (y_c + y_c^*)\sin \delta^*, \\ R_e \sin (\delta + \delta^*) &= (x_c^* - x_c)\cos \delta\ (y_c + y_c^*)\sin \delta, \\ x_I = x_c + R_i \sin \delta &\,;\, y_I = y_c + R_i \cos \delta\,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Algoritmul pentru calculul parametrilor geometrici ai roților față pornește de la d_1, distanța dintre punctele de prindere ale amortizorului. Pentru o aceeași valoare dată lui d_1 și valori simetrice ale deplasării Y a cremalierei, obținem pentru cota centrului roții valori diferite (vezi tabelele 6.2 ; la Dacia 1300 această diferență ajunge la 5 mm).

Valorile înscrise în tabelul 5.1 se calculează fie cu algoritmul deja descris, completat cu o metodă de interpolare, fie cu un algoritm nou, pe care-l prezentăm în continuare.

Condiția ca centrul C să aibă o cotă impusă se exprimă prin ecuația (4.2), în care se elimină indicele zero. Cu ajutorul relațiilor (4.5), se impune ca între articulațiile E și F să existe distanța constantă d_{12}. Se adaugă acestor două condiții ecuația (4.4).

Tabelul 5.1

		$y < 0$	$y > 0$
Roata față stînga	C_1	$x_c ; y_c ; z_c$	$x_c^* ; y_c^* ; z_c$
	$\vec{Q}_1$	$\sin\delta ; \cos\delta ; 0$	$\sin\delta^* ; \cos\delta^* ; 0$
Roata față dreaptă	C_2	$x_c^* ; -y_c^* ; z_c$	$x_c ; -y_c ; z_c$
	$\vec{Q}_2$	$\sin\delta^* ; \cos^*\delta ; 0$	$\sin\delta ; -\cos\delta ; 0$

Se obțin trei ecuații trigonometrice de gradul doi, necunoscutele fiind deplasările unghiulare φ, ψ, ε. În continuare, se determină mărimile din tabelul (5.1), cu relațiile (3.4), (3.5) și (3.7).

§ 6. ANALIZA PARAMETRILOR ROȚILOR FAȚĂ DACIA 1300

Unghiurile φ, ψ, α și β care caracterizează mecanismul suspensiei(nu depind de deplasarea Y a cremalierei mecanismului de direcție) sînt date în tabelul 6.1, în funcție de distanța d_1 dintre punctele de prindere ale amortizorului.

$$d_1 = 389 + 5k ; \; k = 1,2,\ldots,15.$$

În tabelele 6.2 sînt date coordonatele centrului C al roții față stînga și ale punctului S, în care roata face contact cu planul Q de rulare,

Tabelul 6.1

d_1	φ	ψ	α	β
394	6,61	5,28	7,83	3,736
399	4,75	3,64	7,79	3,736
404	2,89	1,98	7,75	3,735
409	1,02	0,32	7,72	3,735
414	− 0,85	− 1,34	7,70	3,735
419	− 2,74	− 3,01	7,68	3,735
424	− 4,64	− 4,70	7,68	3,735
429	− 6,56	− 6,39	7,68	3,735
434	− 8,49	− 8,10	7,69	3,735
439	−10,43	− 9,82	7,71	3,735
444	−12,40	−11,56	7,74	3,735
449	−14,39	−13,31	7,78	3,735
454	−16,41	−15,08	7,83	3,736
459	−18,45	−16,87	7,89	3,736
464	−20,52	−18,68	7,97	3,737

precum și creșterile coordonatelor lui S, pentru două valori ale lui Y: — 30 ; 0 ; (respectiv : viraj stînga, deplasare în linie dreaptă). Sînt date și creșterile coordonatelor lui S, pentru a pune în evidență alunecările

Tabelul 6.2.1

$Y = -30$									
d_1	x_C	y_C	z_C	x_S	y_S	z_S	Δx_S	Δy_S	Δz_S
394	—19,82	658,58	144,48	—16,59	646,56	—117,22	0,05	0,68	—7,87
399	—19,83	659,26	136,56	—16,55	647,04	—125,12	0,04	0,48	—7,90
404	—19,83	659,71	128,61	—16,50	647,33	—133,06	0,04	0,28	—7,93
409	—19,83	659,91	120,64	—16,47	647,41	—141,03	0,03	0,07	—7,96
414	—19,83	659,87	112,64	—16,44	647,28	—149,03	0,02	—0,13	—7,99
419	—19,82	659,59	104,61	—16,43	646,93	—157,05	0,01	—0,34	—8,02
424	—19,82	659,06	96,56	—16,42	646,37	—165,10	0,00	—0,55	—8,05
429	—19,82	658,27	88,48	—16,42	645,60	—173,18	—0,00	—0,77	—8,07
434	—19,82	657,22	80,38	—16,43	644,59	—181,29	—0,01	—1,00	—8,10
439	—19,82	655,91	72,26	—16,45	643,36	—189,41	—0,02	—1,22	—8,12
444	—19,83	654,32	64,12	—16,49	641,90	—197,55	—0,03	—1 46	—8.14
449	—19,83	652,45	55,97	—16,54	640,20	—205,71	—0,05	—1,69	—8,15
454	—19,85	650,30	47,81	—16,61	638,26	—213,89	—0,06	—1,94	—8,17
459	—19,87	647,84	39,64	—16,70	636,07	—222,07	—0,08	—2,19	—8,18
464	—19,90	645,07	31,47	—16,81	633,62	—230,25	—0,11	—2.44	—8.18

acestui punct în timpul funcționării mecanismului suspensiei, respectiv cînd automobilul trece peste denivelări ale drumului. În [5] analiza aceasta a fost făcută pentru nouă valori ale lui Y.

Tabelul 6.2.2

$Y = 0$									
d_1	x_C	y_C	z_C	x_S	y_S	z_S	Δx_S	Δy_S	ΔZ_S
394	—1,11	661,18	146,05	—1,07	654,35	—115,85	0,058	0,69	—7,87
399	—1,05	661,86	138,14	—1,01	654,84	—123,76	0,058	0,49	—7,90
404	—0,99	662,30	130,20	—0,95	655,13	—131,69	0,058	0,28	—7,93
409	—0,92	662,51	122,23	—0,89	655,21	—139,66	0,058	0,08	—7,96
414	—0,86	662,47	114,23	—0,83	655,09	—147,66	0,058	—0,12	—7,99
419	—0,79	662,19	106,20	—0,77	654,76	—155,68	0,059	—0,33	—8.02
424	—0,73	661,66	98,15	—0,71	654,21	—163,73	0,059	—0,54	—8,04
429	—0,66	660,87	90,08	—0,65	653,45	—171,81	0,059	—0,76	—8,07
434	—0,59	659,82	81,98	—0,59	652,47	—179,90	0,059	—0,98	—8,09
439	—0,53	658,51	73,87	—0,53	651,26	—188,02	0,059	—1,20	—8,11
444	—0,46	656,92	65,74	—0,47	649,82	—196,16	0 059	—1,43	—8.13
449	—0,40	655,05	57,59	—0,41	648,16	—204,30	0,059	—1,66	—8,14
454	—0,33	652,90	49,44	—0,35	646,25	—212,47	0,059	—1,90	—8,16
459	—0,27	650,44	41,28	—0,30	644,10	—220,63	0,059	—2,14	—8,16
464	—0,21	647,68	33,12	—0,24	641,71	—228,80	0,058	—2,39	—8,16

Unghiul de convergență δ, unghiul de cădere γ, deplasarea unghiulară ε a portfuzetei în jurul axei pivoților, *brațul de redresare a direcției* $x_K - x_S$ și *brațul de rulare* $y_S - y_K$ sînt date în tabelele 6.3.

În tabelele 6.4 și 6.5 parametrul independent este cota centrului roții :

$$z_C = 154 - 8k;\ k = 1,2,\ldots, 15,$$

Tabelul 6.3.1

$Y = -30$					
d_1	δ	γ	ε	$x_K - x_S$	$y_S - y_K$
394	−15,02	2,72	15,87	33,32	23, 14
399	−15,02	2,76	15,87	33,27	23, 15
404	−15,03	2,80	15,87	33,23	23, 15
409	−15,03	2,83	15,87	22,20	23, 16
414	−15,02	2,85	15,87	33,17	23, 16
419	−15,02	2,86	15,87	33,16	23, 17
424	−15,02	2,87	15 87	33,15	23, 17
429	−15,02	2,87	15.87	33,15	23, 17
434	−15,02	2,86	15,86	33,16	23, 17
439	−15,02	2,84	15,87	33,18	23, 16
444	−15,02	2,81	15,87	33,22	23, 16
449	−15,03	2,77	15,88	33,27	23, 14
454	−15,04	2,72	15,89	33,34	23, 12
459	−15,06	2,66	15,90	33,43	23, 10
464	−15 08	2,59	15,93	33,53	23, 06

Tabelul 6.3.2

$Y = 0$					
d_1	δ	γ	ε	$x_K - x_S$	$y_S - y_K$
394	−0,40	1,49	1,01	17,70	31,12
399	−0,35	1,53	0,96	17,65	31,13
404	−0,30	1,56	0,91	17,59	31,14
409	−0,25	1,59	0,86	17,53	31,15
414	−0,20	1,61	0,81	17,47	31,16
419	−0,15	1,62	0,76	17,41	31,18
424	−0,10	1,62	0,71	17,35	31,19
429	−0,05	1,62	0,66	17,29	31,21
434	−0,00	1,60	0,61	17,23	31,23
439	0,04	1,58	0,55	17,17	31,25
444	0,09	1,55	0,50	17,11	31,27
449	0,14	1,50	0,45	17,05	31,29
454	0,19	1,45	0,40	16,99	31,31
459	0,24	1,38	0,35	16,93	31,33
464	0,29	1,30	0,30	16,87	31,35

în vederea calculării coordonatelor centrului instantaneu de rotație I al roților față și a razelor de rulare. În vederea înțelegerii unde se situează centrul I, menționăm că la Dacia 1300 abscisa axei spate are valoarea $x = -2441$ mm. Ultima coloană din tabelul 6.5 reprezintă *convergența roților :*

$$s - f = d\,(\sin\,\delta + \sin\,\delta^*),$$

în care $d = 340$ mm este diametrul jantei roții.

Tabelul 6.4

	Viraj stinga : $y = -30$				Viraj dreapta : $Y = 30$			
z_C	x_C	y_C	δ	d_1	x_C^*	y_C^*	δ^*	d_1^*
146	−19,82	658,43	−15,02	393,03	16,80	659,23	13,54	394,59
138	−19,83	659,16	−15,02	398,09	16,93	659,85	13,65	399,65
130	−19,83	659,65	−15,03	403,13	17,07	660,23	13,76	404,68
122	−19,83	659,89	−15,03	408,15	17,21	660,37	13,87	409,70
114	−19,83	659,90	−15,02	413,15	17,35	660,27	13,98	414,70
106	−19,82	659,66	−15,02	418,13	17,49	659,92	14,09	419,68
98	−19,82	659,17	−15,02	423,10	17,62	659,32	14,20	424,65
90	−19,82	658,44	−15,02	428.06	17,77	658,47	14,31	429,60
82	−19,82	657,45	−15,02	433,00	17,91	657,37	14,42	434,54
74	−19,82	656.21	−15,02	437,93	18,05	656,01	14,54	439,47
66	−19,82	654,71	−15,02	442,84	18,20	654,38	14,66	444,39
58	−19,83	652,94	−15,03	447,75	18.35	652,49	14,78	449,30
50	−19,84	650,90	−15,04	452,66	18,51	650,32	14,90	454,20
42	−19,86	648,58	−15,05	457,55	18,67	647,86	15,03	459,10
34	−19,89	645,96	−15,07	462,45	18,85	645,11	15,17	464,00

Tabelul 6.5

Viraj stinga : $Y = -30$						
z_C	R_i	R_e	x_I	y_I	$\delta + \delta^*$	$s - f$
146	10558	11844	— 2757	10856	−1,48	−8,51
138	11485	12772	— 2998	11752	−1,37	−7,90
130	12575	13863	— 3281	12804	−1,26	−7,28
122	13876	15164	— 3618	14061	−1,15	−6,65
114	15458	16745	— 4028	15589	−1,04	−6,02
106	17426	18712	— 4538	17489	−0,93	−5,38
98	19942	21227	— 5190	19919	−0,82	−4,73
90	23277	24561	— 6054	23140	−0,71	−4,08
82	27910	29192	— 7255	27614	−0,59	−3,42
74	34785	36064	— 9038	34252	−0,48	−2,76
66	46046	47322	— 11959	45126	−0,36	−2,10
58	67841	69112	— 17616	66172	−0,25	−1,43
50	127789	129056	— 33184	124062	−0,13	−0,76
42	1014358	1015620	−263501	980189	−0,01	−0,09
34	−173721	— 172464	45162	−167096	0,09	0,56

7. CONCLUZII

Mecanismele suspensiei și direcției fiind modelate matematic sub o formă generală, algoritmul prezentat în această lucrare permite atît analiza, cît și sinteza parametrilor față cu suspensie independentă. Datele numerice de la Dacia 1300 sînt de asemenea utile în activitatea de proiectare.

Primită la redacție la 10 iulie 1981.

BIBLIOGRAFIE

1. N. MANOLESCU, Fr. KOVÁCS, A. ORĂNESCU, *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1972.
2. CHRISTIAN PELECUDI, *Teoria mecanismelor spaţiale*, Bucureşti, Edit. Academiei R. S. România, 1972.
3. N. I. MANOLESCU, P. ALEXANDRU, *Contribuţii la analiza cinematică a mecanismelor de direcţie ale autovehiculelor rutiere*, St. cerc. mec. apl., **30**, 3(1971).
4. P. ALEXANDRU, FL. DUDIŢĂ, ş.a., *Mecanismele direcţiei autovehiculelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1977.
5. *Studiul parametrilor geometrici ai roţilor-faţă Dacia 1300, în timpul rulării automobilului în linie dreaptă şi în viraje, pe drumuri cu denivelări*, Contract de cercetare ICTM Bucureşti — CCSITA Piteşti, 1980.

INFLUENȚA EFICACITĂȚII FRÎNELOR ASUPRA PARAMETRILOR CAPACITĂȚII MAXIME DE FRÎNARE A AUTOVEHICULELOR

de CH. VASILIU, TR. CANȚĂ
Oltcit

Controversele constatate în modul cum este luată în considerare influența eficacității frînelor asupra elementelor cinematice și dinamice care definesc procesul frînării de urgență (la accidente rutiere), în cazul efectuării expertizelor tehnice auto, indică necesitatea fundamentării științifice a acestei influențe și elaborarea unor propuneri de abordare corespunzătoare a considerentelor respective.
În lucrare se prezintă, sintetic, bazele teoretico-experimentale de folosire a unor coeficienți ai eficacității frînelor și metodica de determinare a capacității maxime de frînare a autovehiculelor, în contextul abordat.

GENERALITĂȚI

Este cunoscut de către specialiști că siguranța circulației rutiere depinde nemijlocit de contribuția la geneza gradului de periculozitate a principalilor factori componenți ai sistemului de circulație rutieră : factorii tehnici, aparținînd autovehiculului ; factorii rutieri, aparținînd căii de circulație și reglementărilor de circulație ; factorii umani, aparținînd conducătorului auto și pietonului [1].

Mecanismele de frînare, împreună cu mecanismele de direcție ale autovehiculelor reprezintă organele principale de care depinde siguranța circulației rutiere, din partea factorilor tehnici.

Frînarea de urgență, cînd intervine capacitatea maximă de frînare a autovehiculelor, necesită anularea — în primul rînd — a forței de tracțiune ce asigură înaintarea vehiculului și apoi reducerea brutală a energiei cinetice corespunzătoare masei acestuia și vitezei de circulație. Mecanismele de frînare asigură , concomitent, transformarea acestei energii în lucru mecanic de frecare, care, la rîndul său, se transformă în căldură.

Mecanica frînării și determinarea capacității de frînare a autovehiculelor, prezentarea cărora a devenit clasică, se află la îndemîna experților tehnici auto în tratatele de specialitate [2]—[4].

Folosirea relațiilor respective, cît și luarea în considerare a influenței eficacității frînelor asupra parametrilor capacității maxime de frînare a autovehiculelor, în cazul pericolului de accident, formează controverse la efectuarea expertizelor de specialitate [10] ; de unde, necesitatea unei fundamentări științifice și a precizării expresiilor matematico-mecanice, care definesc această importantă capacitate a autovehiculelor, legată de siguranța circulației rutiere.

I. ELEMENTE TEORETICO-ȘTIINȚIFICE

1. MĂRIMEA FORȚEI TOTALE DE FRÎNARE

Considerînd că frînarea se produce fără decuplarea motorului și cu admisiunea amestecului carburant în motor la valoarea minimă, de mers în gol (piciorul luat de pe pedala de accelerație), asupra roții frînate (fig. 1) acționează : un moment de frînare, M_f, de sens opus mișcării de rotație, dezvoltat de mecanismele de frînare asupra tamburului roții ; momentul rezistenței la rulare, M_{rul} ; momentul motor, la mers în gol, redus la roată, M_{cr} ; momentele de inerție ale organelor în rotație legate cinematic de roată, $\sum I \frac{d\omega_r}{dt}$; precum și momentul la roțile motoare al tuturor forțelor rezistente din motor și transmisie (frecări etc.), M_{rr}, care conduc la următoarea ecuație de echilibru a roții frînate [4] :

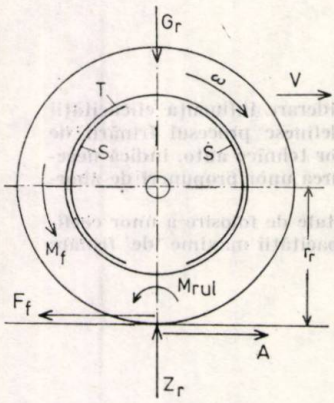


Fig. 1

$$F_f r_r = M_f + M_{rul} - \sum I \frac{d\omega_r}{dt} + M_{rr}, \qquad (1)$$

în care, F_f este forța de frînare, paralelă și în contact cu calea ; r_r — raza de rulare.

În general, momentul redus al rezistențelor din motor este mult mai mare decît suma momentelor de inerție ale organelor în rotație și a momentului motor la mers în gol, reduse la roată,

$$M_{rr} > \sum I \frac{d\omega_r}{dt} + M_{or},$$

de aceea se recomandă, pentru creșterea eficacității acțiunii de frînare, să nu se decupleze motorul în prima perioadă de frînare, aceasta contribuind și la diminuarea posibilității de blocare a roților frînate.

În cazul frînării cu ambreiajul decuplat (a doua perioadă de frînare) și neglijînd momentele de inerție ale roților, relația devine :

$$F_f r_r = M_f + M_{rul} \qquad (2)$$

sau

$$F_f = \frac{M_f}{r_r} + R_r. \qquad (3)$$

Notînd *forța specifică de frînare* a unui autovehicul cu

$$\gamma_f = \frac{\sum M_f}{r_r G_a}$$

și luînd în considerație influența pantelor și rezistența aerului, atunci forța totală de frînare a unui autovehicul este dată de relația [4]:

$$F_{tf} = G_a(\gamma_f + f + p) + \frac{KAV^2}{13} = \frac{G_a}{g}\frac{dv}{dt}, \tag{4}$$

în care G_a este greutatea autovehiculului;
f — coeficientul de rezistență la rulare;
p — panta, exprimată în fracțiuni zecimale;
$\frac{KAV^2}{13}$ — rezistența aerului la înaintarea vehiculului; aceasta se manifestă semnificativ la viteze mari.

Asupra roții frînate (fig. 1), calea acționează cu reacțiunea verticală Z_r și cu forța de aderență A, paralelă și de sens contrar cu forța de frînare (în afară de contribuția mărimii rezistenței la rulare și a rezistenței la pantă, care au fost luate în considerație).

Aderența roții față de calea de rulare limitează însă mărimea forței de frînare ce se poate aplica roții, la:

$$F_{f\,max} = \varphi Z_r, \tag{5}$$

în care φ este coeficientul de aderență;

În ipotezele de calcul a elementelor cinematice ale mișcării autovehiculelor frînate se consideră, că la toate roțile, forța maximă de frînare dezvoltată este egală cu mărimea permisă de aderența dintre fiecare roată și cale, spre a nu se produce blocarea unora dintre roți, care, influențînd stabilitatea mișcării autovehiculului, ar diminua eficacitatea frînării, deoarece aderența este mai mică la alunecare: $\varphi_a < \varphi$.

Considerîndu-se că, în mod normal, coeficientul de aderență este același la fiecare roată, în instalațiile de frînare se montează repartitoare de presiune, care realizează o cît mai proporțională forță de frînare cu încărcările pe osii, valoarea optimă a coeficientului de repartiție ν fiind [4]:

$$\nu = \frac{\varphi h_g + b}{L}, \tag{6}$$

în care h_g este înălțimea c.d.g. al vehiculului;
b — distanța de la c.d.g. la puntea din spate;
L — ampatamentul autovehiculului.

În acest caz, forța totală maximă de frînare va fi descrisă de relația

$$F_{tf\,max} = G_a(\varphi + f \pm p) + \frac{KAV^2}{13} = \frac{G_a}{g}\left(\frac{dv}{dt}\right)_{max}. \tag{7}$$

Ținînd seama că la viteze mici (sub circa 80 km/h) se poate neglija rezistența aerului, iar coeficientul de rezistență la rulare este mic față

de coeficientul de aderență (mai ales pe drumuri bune), relația se poate simplifica, devenind :

$$F_{t_f\,max} = G_a(\varphi \cos \alpha \pm \sin \alpha) = \frac{G_a}{g}\left(\frac{dv}{dt}\right)_{max}, \tag{8}$$

în care α este unghiul de pantă : $p = \operatorname{tg} \alpha$.

Deceleraţiile, în aceste condiţii, vor fi date de relaţiile :

$$d = \frac{dv}{dt} = g\,(\gamma_f \pm p) \text{ și } d_{max} = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{max} = g(\varphi \pm p). \tag{9}$$

2. REALIZAREA ȘI MĂRIMEA FORȚEI SPECIFICE DE FRÎNARE

Momentul de frînare ce se aplică roţilor — la frînarea intensivă — este realizat de sisteme de frînare cu tambur și cu discuri. Frînele cu tambur sînt de trei tipuri : cu doi saboţi „simplex", frîne „duplex" și frîne cu autoamplificare. Frînele cu discuri se construiesc în două variante : deschise și închise.

Pentru evidenţierea realizării momentului de frînare, în scopul relevării influenţei eficacităţii frînelor asupra procesului de frînare, se consideră suficientă prezentarea fenomenelor mecanice la cîte unul din tipurile constructiv-funcţionale enunţate mai sus.

2.1. Momentul de frînare la sistemul de frîne cu doi saboți simetrici

La acest sistem constructiv-funcţional (fig. 2), sabotul primar S_1 creează un moment de frînare mult mai mare decît sabotul secundar S_2, la aceeași forţă P de acţionare.

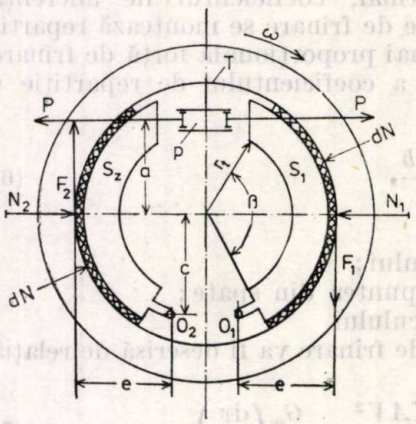


Fig. 2

Considerînd, pentru simplificare, distribuţia uniformă a forţelor normale elementare dN, pe lungimea garniturii sabotului, rezultă că rezultanta N va acţiona pe axa de simetrie a garniturii și, în consecinţă, forţa de frecare dezvoltată de fiecare garnitură va acţiona tot pe axa de simetrie.

Momentul de frînare dezvoltat la fiecare sabot se scrie cu relaţia :

$$M_{f_1} = \mu N_1 r_t, \qquad M_{f_2} = \mu N_2 r_t. \tag{10}$$

Forţele normale N_1 și N_2 se deduc din ecuaţia de echilibru a fiecărui sabot în raport cu articulaţia respectivă :

$$P(a + c) + F_1 e - N_1 K_0 c = 0, \qquad P(a + c) - F_2 e - N_2 K_0 c = 0, \tag{11}$$

în care, K_0 este un coeficient ce depinde de unghiul de înfășurare β al garniturii de frecare [5], care este cuprins între valorile: $K_0 = 1 \ldots 0{,}8$, pentru $\beta = 0 \ldots 160°$;

$F_1 = \mu N_1$; $F_2 = \mu N_2$ — forțele de frecare la saboți.

Înlocuind în relațiile (10), forțele normale N_1 și N_2 deduse din ecuațiile (11), rezultă:

$$M_{f_1} = P \mu r_t \frac{a + c}{K_0 c - \mu e},$$

$$M_{f_2} = P \mu r_t \frac{a + c}{K_0 c + \mu e}. \tag{12}$$

Cunoscînd că forța P este dezvoltată de presiunea din cilindrii de frînă:

$$P = \frac{\pi}{4} p d^2,$$

rezultă că momentul de frînare la fiecare roată va fi

$$M_f = M_{f_1} + M_{f_2} = \frac{\pi}{2} \frac{\mu K_0 d^2 r_t c(a + c)}{K_0^2 c^2 - \mu^2 e^2} p = \Phi_s p, \tag{13}$$

în care Φ_s, depinde de dimensiunile constructive ale sistemului de frînare și de coeficientul de frecare al garniturii de frînă, fiind o constantă.

Momentul de frînare va fi deci direct proporțional cu presiunea din instalația de frînare a autovehiculului.

2.2. Momentul de frînare la sistemul de frîne cu discuri, deschise

Momentul de frînare dezvoltat de o frînă cu disc deschisă este dat de forțele de frecare ce acționează între fiecare pereche de suprafețe de frecare, a căror rezultantă este dispusă în centrul de suprafață al porțiunii sectorului circular (fig. 3):

$$M_f = \mu N \rho_f n_f, \tag{14}$$

în care N este reacțiunea normală a discului asupra garniturilor de fricțiune;

μ — coeficientul de frecare între disc și garnituri;

n_f — numărul perechilor suprafețelor de frecare;

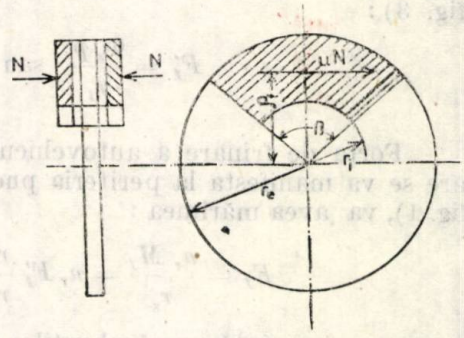


Fig. 3

ρ_f — distanța de la centrul discului la punctul de aplicare a rezultantei forțelor tangențiale de frecare.

Suprafața de frecare fiind o porțiune dintr-un sector circular (fig. 3), distanțe ρ_f se calculează cu relația :

$$\rho_f = \frac{\frac{1}{3}(r_e^3 - r_i^3)\int_{-\beta/2}^{+\beta/2} \cos\beta \, d\beta}{\frac{1}{2}(r_e^2 - r_i^2)\int_{-\frac{\beta}{2}}^{+\frac{\beta}{2}} d\beta} = \frac{2}{3}\frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^2 - r_i^2}\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}. \tag{15}$$

În cazul acestor tipuri de frîne, între forța dezvoltată de instalația de frînare (cilindri) și reacțiunea discului există relația [6] :

$$P = N(1 + \mu\,\mu') = \frac{\pi}{4} p d^2 , \tag{16}$$

în care μ' este coeficientul de frecare între placa suport a garniturii și corpul cilindrului de acționare.

Înlocuind în relația (14), forța normală N dedusă din relație (16), rezultă :

$$M_f = \frac{\pi}{4}\frac{\mu\, d^2\, \rho_f\, n_f}{1 + \mu\,\mu'} p = \Phi_d\, p, \tag{17}$$

în care constanta Φ_d, depinde — prin altă relație — tot de caracteristicile și dimensiile constructive ale sistemului de frînare.

Normal, momentul de frînare depinde — și la astfel de mecanisme — direct de presiunea din instalația de frînare.

2.3. Mărimea forței specifice de frînare

Momentul de frînare dezvoltat la roți de mecanismele de frînare, va determina apariția unei forțe rezultante de frînare, ce se manifestă la periferia tamburului T al roții (fig. 1), respectiv la distanța r_t de centrul roții (fig. 2) sau pe suprafața discului la distanță ρ_f de centrul roții. (fig. 3) :

$$F_f' = \frac{\Phi_s\, p}{r_t} \quad \text{sau} \quad F_f' = \frac{\Phi_d\, p}{\rho_f}.$$

Forța de frînare a autovehiculului provocată de acțiunea frînelor, care se va manifesta la periferia pneurilor în contact cu calea de rulare (fig. 1), va avea mărimea :

$$F_f = \frac{n_r M_f}{r_r} = n_r F_f' \frac{r_t}{r_r} \text{ sau } F_f = n_r F_f' \frac{\rho_f}{r_r},$$

în care n_r reprezintă numărul roților frînate.

Forța specifică de frînare a unui autovehicul va fi deci

$$\gamma_f = \frac{F_f}{G_a} = \frac{n_f M_f}{r_r G_a} = \frac{n_f \Phi p}{r_r G_a}. \tag{18}$$

Cum la un autovehicul, parametrii n_f, Φ și r_r sînt constanți, iar greutatea este formată din greutatea proprie și încărcătură, rezultă

$$\gamma_f = \frac{n_f \Phi}{r_r} \frac{p}{G_a} = K \frac{p}{G_0 + Q}, \tag{19}$$

unde G_0 este greutatea proprie a autovehiculului;

Q — sarcina (încărcătura) autovehiculului, forța specifică de frînare depinzînd direct de presiunea exercitată în instalația de frînare.

La frînarea de urgență (violentă), presiunea din instalația de frînare crește brusc la valoarea maximă, forța specifică de frînare fiind mai mică la vehiculele încărcate:

$$\gamma_{f_{max}} = K \frac{p_{max}}{G_0}; \quad \gamma_{f_{min}} = K \frac{p_{max}}{G_0 + Q},$$

de unde

$$\gamma_{f_{min}} = \frac{\gamma_{f_{max}}}{1 + \frac{Q}{G_0}}, \tag{20}$$

acțiunea de frînare fiind *mai puțin eficace* la vehiculul încărcat.

Limita maximă a forței totale de frînare fiind dependentă de aderență (relația 5), rezultă că la blocarea roților, nu mai acționează momentele de frînare de la roți și nici rezistența la rulare, producîndu-se o alunecare a roților vehiculului pe cale, acesta find sub acțiunea unei forțe totale de frînare dată de expresia:

$$F_{t_f} = (G_0 + Q)(\varphi_a \pm p) + \frac{KAV^2}{13}, \tag{21}$$

în care φ_a este coeficientul de aderență la alunecare: $\varphi_a < \varphi$.

La frînarea cu roțile blocate nu se poate lua în considerație așanumita eficacitate a frînelor asupra capacității de frînare; forța specifică de frînare la blocare nu mai depinde nici de presiunea din instalația de frînare și nici de încărcarea vehiculului, ci este o constantă:

$$\gamma_b = \varphi_a.$$

3. EFICACITATEA MECANISMULUI DE FRÎNARE

Mecanismele de frînare au o eficacitate asupra procesului de frînare — care este mai importantă și se manifestă mai puternic în cazul frînărilor violente — ce depinde, în primul rînd, de tipul constructiv adoptat.

De asemenea, eficacitatea frînelor depinde de repartiția dinamică a sarcinii pe osii, de gradul de încărcare al vehiculului, precum și de starea tehnică a mecanismului de frînare (reglaje, starea garniturilor de fricțiune etc.).

Toți acești factori diminuează eficacitatea mecanismului de frînare, această diminuare exprimîndu-se matematic prin coeficientul eficacității frînelor, K_e, care reprezintă raportul dintre decelerația maximă, posibilă teoretic ($\varphi\ g$) și decelerația dezvoltată în cazul unei frînări violente (d_v), [11]:

$$K_e = \frac{\varphi\, g}{d_v}. \tag{22}$$

Decelerația dezvoltată la o frînare bruscă se determină experimental, cu mențiunea să nu existe urme de alunecare a roților (blocarea roților), iar coeficientul de aderență trebuie să corespundă condițiilor concrete meteorutiere.

Practic, în cazul căilor rutiere umede sau cu zăpadă, etc., nu intervine noțiunea de eficacitate a frînelor, deoarece forțe mici de frînare produc blocarea roților.

Valorile coeficientului eficacității frînerelor, K_e, obținute — de autori — în mod experimental, pentru căi rutiere cu îmbrăcăminte asfaltică uscată, sînt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Mărimea coeficienților eficacității frînelor K_e

Tipul autovehiculului	Încărcarea	Repartitor de presiune	
		da	nu
— autoturisme	—	1,05—1,1	1,1—1,2
— autocamioane 3—5 t	G_0	1,2	1,4
— autobuze, max. 7,5 m	G_0+Q	1,4	1,6
— autocamioane 6—20 t — autobuze, 12 m și articulate	G_0	1,4	1,6
— autotractoare — ș.a — troleibuze	G_0+Q	1,6	1,8
— motociclete, motorete	—	1,2—1,4	—
— motociclete cu ataș	—	1,4—1,6	—

II. ELEMENTE PRACTICO-EXPERIMENTALE

Eficacitatea frînelor la autoturismul „Dacia 1300", în condiții tehnice normale (bune) ale mecanismului de frînare, și la o acționare violentă a pedalei de frînă (frînare de urgență) este foarte ridicată. În-

cercări efectuate la catedra „Autovehicule rutiere" a Institutului politehnic București au condus la obținerea de decelerații situate la mărimi de peste 8 m/s². Astfel de rezultate sînt prezentate și în „Almanahul auto — 1977", la pagina 74, unde se arată : „calculînd o valoare medie a decelerației, pentru durata frînării în plin, adică luînd în calcul timpul scurs de cînd mașina a început să-și micșoreze viteza și pînă cînd ea s-a oprit, s-a ajuns la o decelerație de 8,3 m/s²".

Aceasta ar reprezenta capacitatea maximă de dezvoltare a unei decelerații „de urgență" a autoturismelor „Dacia—1300", pe o cale din beton asfaltat, cu aderență foarte bună.

$$\left(\varphi = \frac{dv}{g} = \frac{8{,}3}{9{,}81} = 0{,}85\right).$$

Dar capacitatea maximă de frînare a autovehiculelor este diminuată — în practica folosirii acestora — de gradul de încărcare a autovehiculului, de corespondența momentană între repartiția dinamică a sarcinii pe osii și repartiția presiunilor în instalația de frînare (dacă există repartitor în instalație), de starea tehnică a organelor de reglare a mecanismului de frînare, de starea garniturilor de fricțiune etc., chiar dacă „stările" enumerate se află în limitele tehnice admise.

Acestea s-au confirmat și prin rezultatele unor experimentări efectuate pe un autoturism „Dacia—1300", în stare „legală" de funcțiune, cu ocazia unei expertize tehnice a prof. dr. ing Ch. Vasiliu [7].

Încercările au fost efectuate pe o șosea cu suprafețe din beton asfaltic, în stare uscată, folosindu-se un decelerograf „Moto-Meter", cu indicații referitoare la mărimea decelerației și a forței la pedală, în funcție de timp.

Ridicarea diagramelor de frînare s-a făcut cînd autoturismul circula cu o viteză de 50 km/h, acționîndu-se brusc asupra pedalei de frînă și obținîndu-se o forță la pedală de 33 kp și o decelerație de 6,5 m/s², după 0,4 secunde de la începutul acțiunii de frînare și de 35 kp și 7,2 m/s², după alte 0,5 secunde (fig. 4), mărimi care s-au menținut apoi pînă la oprirea autoturismului.

Diagrama decelerației scoate în evidență existența unor dereglări, care au condus la diminuarea mărimii decelerației maxime de care este capabil acest tip de autoturism.

Calculul decelerațiilor medii din prima perioadă de frînare (înainte de obținerea decelerației maxime) este redat grafic (fig. 5), și el indică o decelerație medie de 4.25 m/s², în primele 0,4 secunde și de 6,85 m /s², în următoarele 0,5 secunde. În continuare, s-a menținut decelerația de 7,2 m/s², timp de 1,9 secunde (fig. 4).

În urma acestor rezultate experimentale, se poate determina mărimea coeficienților de eficacitate a frînelor.

La un autoturism „Dacia—1300", în stare tehnică perfectă, vom avea :

$$K_e = \frac{\varphi g}{d_e} = \frac{0{,}9 \times 9{,}81}{8{,}3} = 1{,}064,$$

considerîndu-se calea din beton asfaltic cu $\varphi = 0{,}9$.

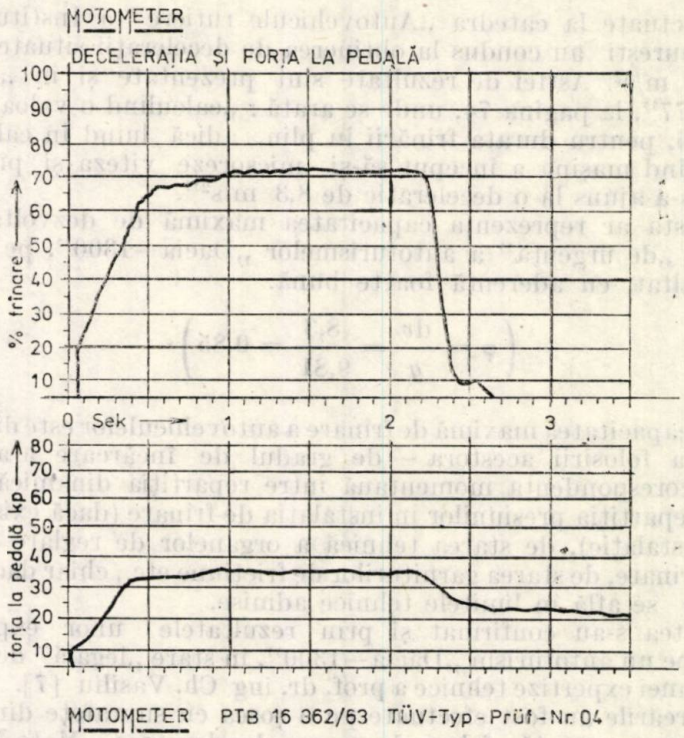


Fig. 4

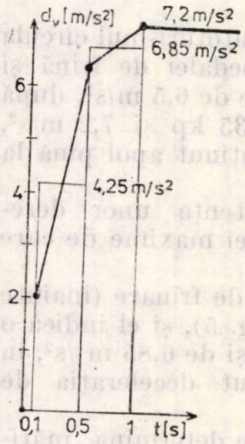


Fig. 5

În cazul autoturismului expertizat, mărimea coeficientului eficacității frînelor este de:

$$K_e = \frac{\varphi g}{d_v} = \frac{0{,}8 \times 9{,}81}{7{,}2} = 1{,}09,$$

considerîndu-se coeficientul de aderență, $\varphi = 0{,}8$, pentru o șosea cu acoperire asfaltică în stare uscată (situația la experimentări).

Dar, în cazul arătat, decelerația medie a fost mai mică decît cea maximă obținută de 7,2 m/s², avînd mărimea de:

$$d_{vm} = \frac{4{,}25 \times 0{,}4 + 6{,}85 \times 0{,}5 + 7{,}2 \times 1{,}9}{2{,}8} = 6{,}716 \text{ m/s}^2,$$

astfel că mărimea coeficientului eficacității frînelor — datorită dereglărilor amintite — a fost de

$$K_e = \frac{\varphi g}{d_{vm}} = \frac{0{,}8 \times 9{,}81}{6{,}716} = 1{,}169.$$

Se constată că aceste mărimi ale coeficientului eficacității frînelor la autoturismele încercate, se înscriu în limitele indicate de tabelul 1.

III. DETERMINAREA PARAMETRILOR CAPACITĂȚII MAXIME DE FRÎNARE A AUTOVEHICULELOR

1. DECELERAȚIA MAXIMĂ (DE URGENȚĂ)

Pentru efectuarea expertizelor tehnice auto, referitoare la accidentele de circulație, este recomandată obținerea de informații privitoare la capacitatea de dezvoltare a decelerației de către autovehicule prin experimente tehnico-judiciare (folosirea de decelerografe).

În lipsa acestor posibilități, decelerația medie, ce se poate obține prin frînare violentă, se determină — numai pentru cazurile cînd îmbrăcămintea este uscată — cu relația :

$$d_{vm} = \frac{\varphi g}{K_e}, \text{ în m/s}^2, \tag{23}$$

în care φ este coeficientul de aderență al căii în stare uscată ;

K_e — coeficientul eficacității frînelor (tabelul 1).

Această relație se aplică în cazul cînd frînarea s-a făcut fără blocarea roților.

Valorile coeficienților de aderență se iau cele maxime, deoarece procesul frînării autovehiculelor actuale este mult mai eficace, aderența manifestîndu-se la mărimi superioare.

Pentru a se ține seama de variația coeficienților de aderență cu viteza de circulație, se vor folosi mărimile medii ale coeficienților de aderență, determinarea acestora fiind indicată în literatura științifică de specialitate [4 ; 8].

Cînd șoseaua are profilul longitudinal înclinat, atunci decelerația maximă va fi dată de relația :

$$d_{vm} = g\left(\frac{\varphi}{K_e}\cos\alpha \pm \sin\alpha\right), \text{ în m/s}^2, \tag{24}$$

în care α este unghiul de pantă : $\operatorname{tg}\alpha = p$.

Semnul + se folosește la urcare, iar semnul — la coborîre.

Dacă se constată, la expertiză, urme de frînare cu alunecare, coeficientul eficacității frînelor nu mai intervine, el devenind egal cu unitatea : $K_e' = 1$.

În acest caz se va folosi relația :

$$d_{vm} = \varphi_a g, \text{ în m/s}^2, \tag{25}$$

unde φ_a este coeficientul de aderență la alunecare [9], care are valori mai mici : $\varphi_a < \varphi$.

2. SPAȚIUL MINIM DE FRÎNARE

Cunoscîndu-se viteza de circulație a autovehiculului — înainte de accident — și decelerația maximă ce se poate dezvolta la o frînare violentă (fig. 6), spațiul minim de frînare, pînă la oprire, este dat de relația [4]:

$$S_{min} = (t_1 + t_2 + t_3)\frac{V_c}{3,6} - \frac{1}{6} d_{vm} t_3^2 + \frac{1}{2} d_{vm} \cdot t_4^2, \text{ în m}, \qquad (26)$$

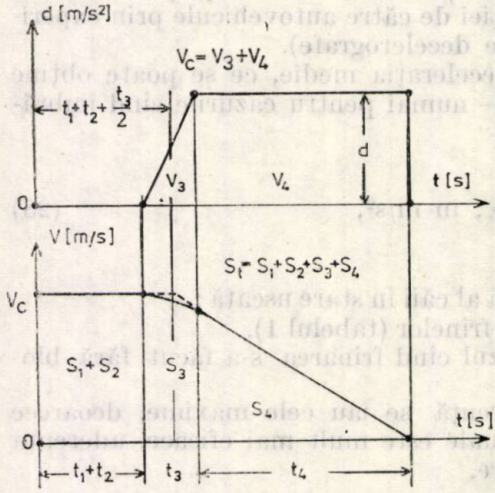


Fig. 6

în care t_1 este timpul de reacție a conducătorului auto;

t_2 — timpul de inerție al sistemului de frînare;

t_3 — timpul scurs de la începerea acțiunii de frînare, pînă la atingerea decelerației maxime;

t_4 — timpul de frînare intensivă;

V_c — viteza de circulație, în km/h.

Spațiul minim de frînare se mai poate determina și cu relația:

$$S_{min} = \left(t_1 + t_2 + \frac{t_3}{2}\right)\frac{V_c}{3,6} + \frac{V_c^2}{26 d_{vm}}, \text{ în m}, \qquad (27)$$

în care s-au folosit aceleași notații.

Explicația relațiilor este redată în figura 6.

3. VITEZA MAXIMĂ DE CIRCULAȚIE

Cunoscîndu-se lungimea urmelor de frînare și decelerația maximă (de urgență), viteza maximă de circulație, înainte de producerea accidentului, se determină cu relația:

$$V_c = 1,8\, t_3\, d_{vm} + \sqrt{26\, S_f\, d_{vm}}, \text{ în km/h}, \qquad (28)$$

în care S_f este spațiul de frînare, în m,

$$S_f = U_f - A, \qquad (29)$$

unde U_f este lungimea urmei de frînare;

A — ampatamentul autovehiculului.
Explicația relației este redată în figura 6.

CONCLUZII

Pentru determinarea corectă a elementelor cinematice, ce definesc procesul frînării autovehiculelor în caz de urgență (accidente rutiere), pe căi de rulare în stare uscată și cînd frînarea s-a făcut fără blocarea roților, apare necesitatea de a se folosi, în relațiile matematico-mecanice de determinare a acestor elemente, coeficientul eficacității frînelor; definirea, fundamentarea științifică și folosirea acestui parametru formează obiectul celor mai sus arătate.

Primită la 1 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. CH. VASILIU și N. NISTOR, *Teoria traficului rutier și siguranța circulației*, I. P. București, 1977.
2. C. GHIULAI, *Mecanica automobilului*, Edit. tehnică, București, 1965.
3. M. GORIANU, *Mecanica automobilelor și autoblindatelor*, Edit. Academiei Militare, București, 1974.
4. CH. VASILIU și C. GHIULEI, *Dinamica autovehiculelor rutiere*, Edit. Did. Ped., București, 1975.
5. A. JANTE, *Zur Theorie des Kraftwagens*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
6. GH. FRĂȚILĂ, *Calculul și Construcția automobilelor*, Edit. Did. Ped., București, 1977.
7. CH. VASILIU, *Raport de expertiză tehnică*, dosar nr. 2172/B/1977, Procuratura Municipiului Arad.
8. CH. VASILIU, *Influența variației coeficientului de aderență asupra parametrilor capacității de frînare a automobilului*, St. cerc. mec. apl. *1* (1972).
9. CH. VASILIU și I. GHIȚĂ, *Cercetări experimentale privind coeficientul de aderență la alunecare*, St. cerc. mec. apl., *5* (1972).
10. CH. VASILIU, *Raport de expertiză tehnică*,dosar nr 3784/1980, Judecătoria sector 4, Municipiul București.
11. *Recomandări metodice privind expertiza tehnică auto*, Institutul de cercetări și expertize judiciare, Moscova, 1966. —

STUDIUL FILMULUI DE LUBRIFIANT EXTRUDAT ÎN CONDIȚII ELASTOHIDRODINAMICE

de MIRCEA D. PASCOVICI

Institutul politehnic București

Se studiază filmul de lubrifiant extrudat în condiții elastohidrodinamice, determinate de prezența unor straturi subțiri deformabile aplicate pe suprafețe rigide.
Se pun în evidență deosebirile calitative și cantitative față de filmul de lubrifiant extrudat hidrodinamic.

NOTAȚII

A = $\mu UkR^2/h_r^4$ — factor adimensional caracteristic;
E — modulul de elasticitate al stratului deformabil;
F — forța portantă a filmului;
R — raza exterioară;
S = $\mathrm{d}F/\mathrm{d}h_r$ — rigiditatea filmului;
U — viteza de apropiere a suprafețelor cuplei;
V — volumul de lubrifiant închis între suprafețele cuplei;
h — grosimea filmului de lubrifiant în condiții elastohidrodinamice;
h_e — partea din grosimea filmului de lubrifiant datorată deformării elastice a substratului;
h_r — grosimea filmului de lubrifiant pentru suprafețe rigide;
k = $\delta(1 - \nu^2)/E$ — elasticitatea stratului deformabil;
p — presiunea;
r — coordonata radială;
y — coordonata normală la suprafața filmului de lubrifiant;
δ — grosimea stratului deformabil;
μ — viscozitatea dinamică a lubrifiantului;
ν — coeficientul de contracție transversală a stratului deformabil;
τ — timpul.

Semnificația indicilor:

m — valoare medie;
max — valoare maximă;
r — parametru caracteristic filmului extrudat hidrodinamic;
$*$ — valoare corespunzătoare momentului contactului suprafețelor cuplei.

1. INTRODUCERE

În ultimele două decenii, un mare număr de lucrări au abordat studiul filmelor de lubrifiant extrudate („squeeze film"). Cercetările s-au referit atît la cazul unor suprafețe rigide, cît și la cazul unor suprafețe deformabile. O bună sinteză în domeniu este făcută de D. F. Moore [1].

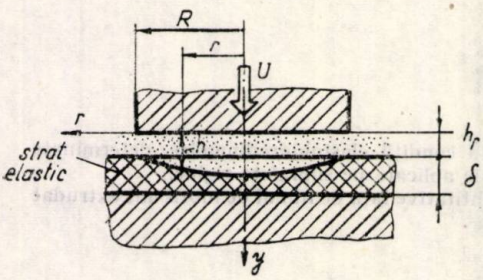


Fig. 1

Aceste studii sînt destinate atît lagărelor cu alunecare supuse la sarcini dinamice, cît și altor domenii cum ar fi: amortizarea vibrațiilor, biolubrificația, tribologia materialelor plastice, prelucrarea materialelor prin deformare etc.

Lucrarea de față abordează studiul filmului de lubrifiant extrudat în condiții elastohidrodinamice determinate de prezența unui strat subțire deformabil aplicat pe o suprafață considerată rigidă, fig. 1.

2. TEORIE

În lucrare se studiază extruderea filmului de lubrifiant între două suprafețe plane circulare, din care una este rigidă, iar cealaltă este acoperită cu un strat subțire deformabil (fig. 1).

Grosimea locală a filmului de lubrifiant rezultă din însumarea grosimii filmului de lubrifiant pentru suprafețe rigide h_r, cu grosimea filmului datorată deformării stratului elastic h_e [2, 3]:

$$h = h_r + h_e, \tag{1}$$

Dacă stratul deformabil este subțire și are un modul de elasticitate E redus, atunci el poate fi asimilat cu un mediu Winkler [2,3]. În aceste condiții relația (1) devine

$$h = h_r + kp, \tag{1'}$$

unde

$$k = \delta (1 - \nu^2)/E.$$

În ipotezele uzuale ale teoriei lubrificației [1], expresia ecuației Reynolds, în coordonate cilindrice pentru o curgere izotermă, axial simetrică, va fi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r h^3 \frac{\partial p}{\partial r}\right) = -12 \mu U r. \tag{2}$$

Integrînd şi considerînd expresia (1'), rezultă

$$\frac{dp}{pr} = -\frac{6\mu Ur}{(h_r + kp)^3}. \tag{3}$$

Prin rezolvarea ecuaţiei (3) se obţine distribuţia presiunii în direcţie radială. Dacă se consideră $p = 0$, la $r = R$, atunci

$$p = \{[h_r^4 + 12\,\mu Uk(R^2 - r^2)]^{0,25} - h_r\}/k. \tag{4}$$

Presiunea maximă este dată de relaţia

$$p_{max} = [(h_r^4 + 12\,\mu UkR^2)^{0,25} - h_r]/k. \tag{5}$$

Integrînd ecuaţia (4) se obţine forţa portantă

$$F = \frac{\pi R^2}{k}\left\{\frac{1}{15\,\mu UkR^2}[(h_r^4 + 12\,\mu UkR^2)^{1,25} - h_r^5] - h_r\right\}. \tag{6}$$

Presiunea medie în filmul de lubrifiant rezultă

$$p_m = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{15\,\mu UkR^2}[(h_r^4 + 12\,\mu UkR^2)^{1,25} - h_r^5] - h_r\right\}. \tag{7}$$

Rigiditatea filmului de lubrifiant este

$$S = \frac{dF}{dh_r} = \frac{\pi R^2}{k}\left\{\frac{h_r^3}{3\,\mu UkR^2}[(h_r^4 + 12\,\mu UkR^2)^{0,25} - h_r] - 1\right\}. \tag{8}$$

În condiţiile extruderii elastohidrodinamice apare posibilitatea (inexistentă în condiţiile extruderii hidrodinamice) închiderii unei cantităţi de lubrifiant între suprafeţele cuplei. Închiderea se realizează în momentul în care $h_r = 0$. Expresiile parametrilor caracteristici (presiune, forţă portantă, rigiditate) devin pentru acest moment:

$$h^* = kp^*, \tag{1''}$$

$$p^* = [12\,\mu U(R^2 - r^2)/k^3]^{0,25}, \tag{4'}$$

$$p^*_{max} = (12\,\mu UR^2/k^3)^{0,25}, \tag{5'}$$

$$F^* = \pi(4{,}9152\,\mu UR^{10}/k^3)^{0,25}, \tag{6'}$$

$$p^*_m = (4{,}9152\,\mu UR^2/k^3)^{0,25}, \tag{7'}$$

$$S^* = -\pi R^2/k. \tag{8'}$$

Se observă că rigiditatea în momentul contactului, $h_r = 0$, devine egală cu rigiditatea stratului deformabil, $S = S_e$.

Volumul de lubrifiant închis între suprafețele cuplei se calculează astfel

$$V = kF = 2\pi \int_0^R h^* r \, dr \cdot \tag{9}$$

Utilizînd relația (6') sau relațiile (1'') și (4'), se obține expresia

$$V = \pi(4{,}9152 \, \mu U k R^{10})^{0{,}25}. \tag{10}$$

Intervalul de timp necesar pentru anularea grosimii filmului $h_r = 0$, pornind de la o grosime de film $h_r = h_0$, în condițiile unei viteze de apropiere constante, este dat de expresia

$$\Delta\tau \cong 479 \frac{\mu h_0 R^{10}}{k^3 F^4}. \tag{11}$$

Descrierea comportării cuplei, după anularea grosimii filmului, $h_r = 0$, nu mai poate fi făcută prin acest mod de calcul.

3. COMPARAȚIA CU FILMUL EXTRUDAT HIDRODINAMIC

În cazul unor suprafețe rigide caracterul curgerii este hidrodinamic $h_e = 0$, iar parametrii caracteristici ai cuplei capătă expresiile [1]

$$p_r = \frac{3\mu U}{h_r^3}(R^2 - r^2), \tag{12}$$

$$p_{r\,max} = \frac{3 \, \mu U R^2}{h_r^3}, \tag{13}$$

$$F_r = \frac{3}{2} \frac{\pi \mu U R^4}{h_r^3}, \tag{14}$$

$$p_{rm} = \frac{3}{2} \frac{\mu U R^2}{h_r^3}, \tag{15}$$

$$S_r = -\frac{9}{2} \frac{\pi \mu U R^4}{h_r^4}. \tag{16}$$

Comparația propusă se va efectua prin intermediul rapoartelor dintre expresiile parametrilor caracteristici date de relațiile (4) — (8) și (12) — (16). Astfel se obțin

$$\bar{p} = \{[1 + 12\,A(1 - \bar{r}^2)]^{0,25} - 1\}/3\,A(1 - \bar{r}^2), \tag{17}$$

$$\bar{p}_{max} = [(1 + 12\,A)^{0,25} - 1]/3\,A, \tag{18}$$

$$\bar{F} = \bar{p}_m = [(1 + 12\,A)^{1,25} - 1 - 15\,A]/22{,}5\,A^2, \tag{19}$$

$$\bar{S} = 2[1 + 3\,A - (1 + 12\,A)^{0,25}]/27\,A^2, \tag{20}$$

unde $A = \mu U k R^2/h_r^4$ este un factor adimensional caracteristic filmului extrudat.

În figura 2 s-a reprezentat variația rapoartelor $\bar{p}_{max}$ și $\bar{F}$ în funcție de valorile posibile ale factorului A.

Pentru a avea o imagine a aplatisării distribuției presiunii în cazul extruderii elastohidrodinamice, este utilă cunoașterea raportului dintre presiunea maximă și cea medie. Raportul acestor presiuni pentru regimul elastohidrodinamic are expresia

$$\frac{p_{max}}{p_m} = \frac{15\,A[(1 + 12\,A)^{0,25} - 1]}{(1 + 12\,A)^{1,25} - 1 - 15\,A}, \tag{21}$$

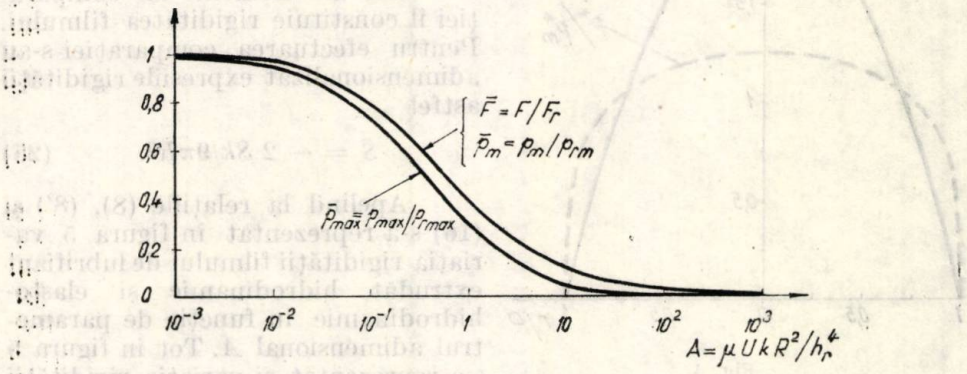


Fig. 2

în timp ce pentru regimul hidrodinamic din relațiile (13) și (15) rezultă

$$p_{r\,max}/p_{r\,m} = 2. \tag{22}$$

În figura 3 s-a reprezentat variația raportului p_{max}/p_m în funcție de factorul adimensional caracteristic A.

O altă comparație a distribuției presiunilor este făcută în figura 4. S-a reprezentat variația radială a raportului dintre presiunea locală și

cea medie în cazul extruderii hidrodinamice și elastohidrodinamice (pentru momentul atingerii suprafețelor). Expresiile acestor rapoarte sînt

$$p_r/p_{rm} = 2(1 - \bar{r}^2) \tag{23}$$

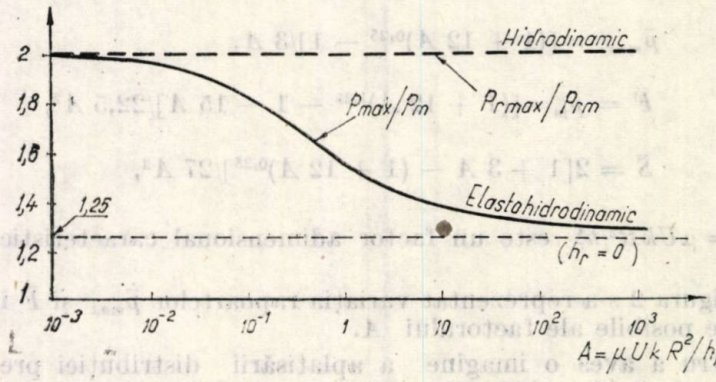


Fig. 3

și

$$p^*/p_m^* = 1{,}25(1 - \bar{r}^2)^{0{,}25}, \tag{24}$$

unde $\bar{r} = r/R$.

Un alt element al comparației îl constituie rigiditatea filmului. Pentru efectuarea comparației s-au adimensionalizat expresiile rigidității astfel

$$\bar{S} = -2\,Sk/9\pi R^2. \tag{25}$$

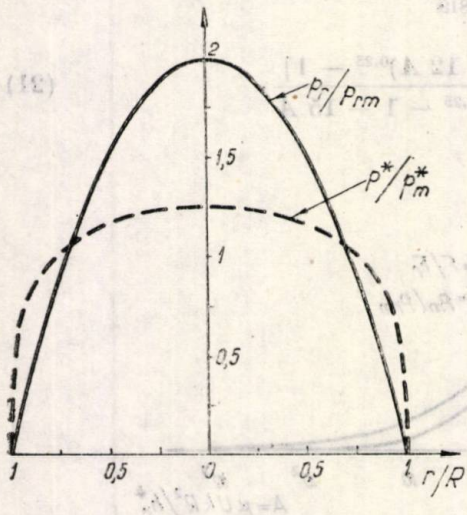


Fig. 4

Apelînd la relațiile (8), (8′) și (16) s-a reprezentat în figura 5 variația rigidității filmului de lubrifiant extrudat hidrodinamic și elastohidrodinamic în funcție de parametrul adimensional A. Tot în figura 5 s-a reprezentat și variația rigidității unui film extrudat hidrodinamic dar rezemat elastic, numit aici pseudoelastohidrodinamic. În acest caz rigiditatea se va calcula astfel

$$1/S_{pe} = 1/S_r + 1/S_e, \tag{26}$$

$$S_{pe} = -1/\left(\frac{k}{\pi R^2} + \frac{2k}{9\pi R^2}\frac{1}{A}\right). \tag{26'}$$

Se observă apropierea dintre rigiditățile filmului de lubrifiant extrudat elastohidrodinamic și pseudoelastohidrodinamic, diferențele fiind

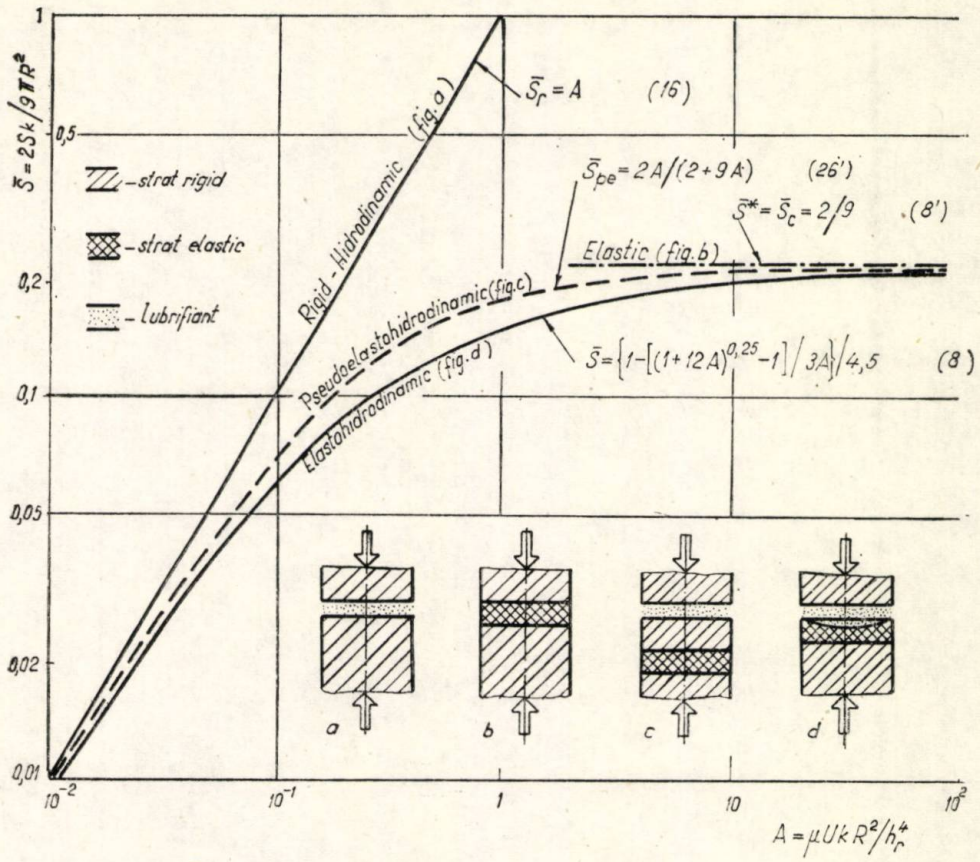


Fig. 5

mai mici de 17%. Este de remarcat că pentru valori ale factorului $A < <10^{-2}$, diferențele între rigiditățile filmelor sînt neglijabile și că pentru valori $A > 10$ rigiditățile filmelor elastohidrodinamice și pseudoelastohidrodinamice tind spre rigiditatea stratului deformabil.

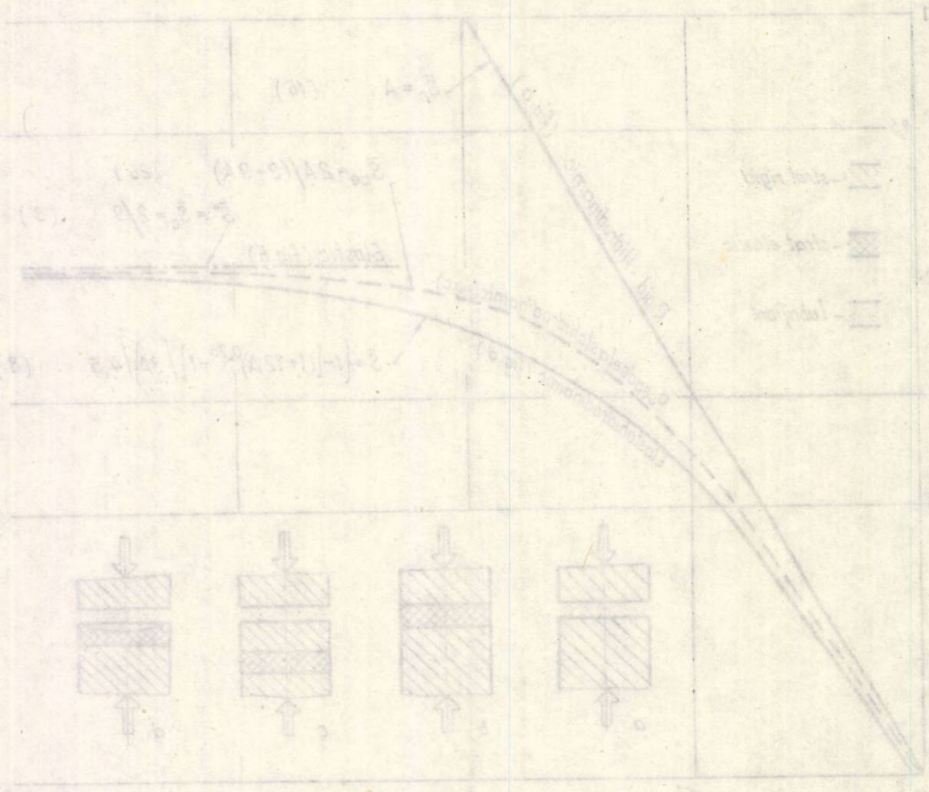
În încheiere este de remarcat că modelul prezentat este valabil în măsura în care în stratul deformabil eforturile de compresiune maxime nu depășesc limita de curgere, condiție ce poate fi exprimată prin inegalitatea

$$(12\,\mu U R^2/k^3)^{0,25} < \sigma_e. \tag{27}$$

Primită la redacție la 25 mai 1981

BIBLIOGRAFIE

1. D. F. MOORE, *Principles and Applications of Tribology*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
2. GH. MANEA, ș.a., *Die Lage des querbelasteten Zapfens in der aus Materialien mit geringen Elastizitätsmodul gefertigten Lagerschale*, Buletinul Institutul politehnic București, **XXXII**, *3*, 89–104 (1970).
3. H. D. CONWAY, *The Rate of Change of film Thickness in the Elastohydrodynamic Squeeze Film Process*, Trans. ASME, Series F, **94**, *3*, 391–393 (1973).



ASUPRA DISTRIBUȚIEI TEMPERATURII CAUZATE DE FRECARE ÎN DANTURA ROȚILOR DINȚATE LUBREFIATE CU ULEIURI MINERALE ADITIVATE

de A. TUDOR
Institutul politehnic București

Pe baza analizei procesului de producere și disipare a energiei termice, pe contactul hertzian al roților dințate se determină distribuția de temperatură în dintele unei roți dințate.
Se ia în considerație energia termică consumată de stratul de interacțiune a lubrefiantului aditivat cu suprafața flancului. Se fac unele aprecieri privind apariția gripajului și regimului termic al danturii angrenajelor.

Producerea și disiparea energiei termice din zona de contact a angrenajelor cu roți dințate sînt influențate de o complexitate de parametri, printre care viteza de alunecare și rostogolire, coeficientul de frecare, temperatura și gradientul ei față de normala de contact, sarcina normală, geometria angrenajului, materialul și calitatea suprafeței flancurilor, lubrifiantul utilizat etc. Interdependența acestor parametrii în descrierea fenomenului de gripare termică a roților dințate a preocupat pe mulți cercetători [1] — [5]. O parte din cercetări explică apariția gripajului prin prisma temperaturii instantanee de contact, iar altă parte, prin prisma temperaturii medii caracteristice a danturii.

Lucrarea de față își propune să determine distribuția temperaturii în dantura unui angrenaj, ca urmare a frecării flancurilor cu rugozități în prezența uleiurilor aditivate cu aditivi de extremă presiune (E.P.). Pe baza acestei distribuții, se corelează temperatura de contact cu temperatura medie din centrul dintelui, pentru acele condiții experimentale care au condus la griparea angrenajului.

În vederea stabilirii unei corelații cantitative și calitative a parametrilor ce determină și însoțesc regimul termic al danturii pe linia de angrenare, se fac următoarele ipoteze simplificatoare;

— dintele se consideră placă bidimensională variabilă încastrată în obada roții și se neglijează efectul curburii flancului asupra distribuției temperaturii;

— energia totală de frecare se disipă numai prin intermediul celor două flancuri-placă pe o lățime nominală corespunzătoare benzii hertziene de contact;

— pe linia de angrenare, elementele cuplei se găsesc în contact nemijlocit și deci temperaturile în acele puncte sînt egale;

— stratul de reacție al uleiului aditivat cu suprafața flancului se neglijează ca mărime, însă contribuie la echilibrul energetic al zonei reale de contact.

În aceste ipoteze simplificatoare, energia termică de frecare este în regim nestaționar, ca urmare a modificării continue a punctului de contact și ca urmare a disipării în elementele cuplei.

Ca atare fenomenul termic este determinat de următoarele ecuații; — ecuația conductibilității a lui Fourier:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

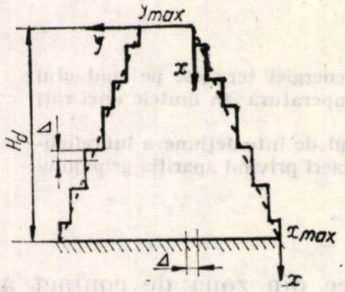


Fig. 1. — Discretizarea flancului pentru calculul prin diferențe finite.

unde T este temperatura într-un punct al dintelui placă, de coordonate (x, y) (fig. 1); t — timpul; a — difuzivitatea termică;

— ecuațiile determinate de condițiile limită:

— egalitatea temperaturilor celor două elemente ale cuplei în zona contactului direct:

$$T_1 = T_2, \tag{2.1}$$

— echilibrul energiei termice:

$$\beta\lambda_1\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_1 + (1-\beta)\lambda_2\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_2 + \mu_{ak}F_n v_a = 0, \tag{2.2}$$

unde $\lambda 1,2$ — conductivitățile termice ale celor două roți în angrenare; β — coeficientul de distribuție al fluxului termic [6], [7]; μ_{ak} — coeficientul de frecare; F_n — forța normală de contact; v_a — viteza de alunecare;

— disiparea fluxului termic de la angrenaj la mediul exterior.

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \alpha(T - T_0), \tag{2.3}$$

în care α este coeficientul de cedare termică (convecție), iar T_0 = temperatura mediului înconjurător.

Pentru determinarea temperaturii în orice punct de interiorul dintelui se utilizează metoda diferențelor finite. Utilizînd această metodă ecuația (1) devine:

$$T^{t+\Delta t}_{x,y} = \frac{1}{M}\left(T_{x-\Delta,y} + T_{x+\Delta,y} + T_{x,y-\Delta} + T_{x,y+\Delta}\right)^t + \left(1 - \frac{4}{M}\right)T^t_{x,y}, \tag{3}$$

în care Δ reprezintă pasul rețelei (celula elementară) de calcul a temperaturii; Δt — intervalul unitar de timp; exponentul t indică momentul de timp la care se calculează temperatura T; $M = \Delta^2/a\,\Delta t$ — coeficient adimensional, ce caracterizează conducția în interiorul dintelui; $N = \alpha \cdot \Delta/\lambda$ — coeficient adimensional ce caracterizează convenția flancului sau a vîrfului dintelui cu mediul exterior.

Pentru convergența soluției matematice a temperaturii nodurilor interioare, se impune corelarea pasului rețelei cu difuzivitatea a și intervalul elementar de timp $\Delta t (\Delta t \leqslant \Delta^2/4a)$.

Temperatura în nodurile marginale se determină pe baza bilanțului termic cu diferențe finite, care ia în considerație descreșterea energiei termice a sistemului marginal ca urmare a căldurii transmise de către acesta în exterior.

Forma geometrică a dintelui-placă conduce la cinci cazuri specifice pentru nodurile marginale așa cum se observă din figura 2.

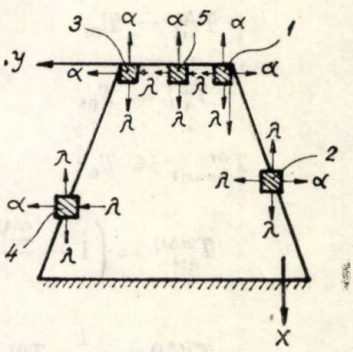


Fig. 2. — Condițiile termice limită pe flanc.

1° $x = 1$ și $y = 1$,

$$T^{t+\Delta t}_{x,y} = \left(1 - \frac{2N+4}{M}\right) T^{t}_{x,y} + \frac{2}{M}\left(T^{t}_{x+\Delta,y} + T^{t}_{x,y+\Delta}\right) + \frac{2N}{M} T_0 + \frac{2\Delta}{\lambda M} q_{01}, \tag{4.1}$$

în care q_{01} este fluxul termic de frecare efectiv ce se distribuie dintelui prin elementul de suprafață reală al celulei unitare,

$x = 1$, $y = 1$;

2° $1 < x < x_{max}$, $y = 1$,

$$T^{t+\Delta t}_{x,y} = \left(1 - \frac{4}{M}\right) T^{t}_{x,y} + \frac{1}{M}\left(T^{t}_{x+\Delta,y} + T^{t}_{x-\Delta,y} + 2T^{t}_{x,y+\Delta}\right) + \frac{2\Delta}{\lambda M} q_{01}; \tag{4.2}$$

3° $x = 1$, $y = y_{max}$,

$$T^{t+\Delta t}_{x,y} = \left(1 - \frac{4N+4}{M}\right) T^{t}_{x,y} + \frac{1}{M}\left(T^{t}_{x,y-\Delta} + 2\,T^{t}_{x+\Delta,y}\right) + \frac{2N}{M} \cdot T_0; \tag{4.3}$$

4° $1 < x < x_{max}$, $y = y_{max}$,

$$T^{t+\Delta t}_{x,y} = \left(1 - \frac{2N+4}{M}\right) T^{t}_{x,y} + \frac{1}{M}\left(T^{t}_{x-\Delta,y} + T^{t}_{x+\Delta,y} + 2T^{t}_{x,y-\Delta}\right) + \frac{2N}{M} \cdot T_0; \tag{4.4}$$

5° $x = 1$, $1 < y < y_{max}$,

$$T^{t+\Delta t}_{x,y} = \left(1 - \frac{2N+4}{M}\right) T^{t}_{x,y} + \frac{1}{M}\left(T^{t}_{x,y-\Delta} + T^{t}_{x+\Delta,y} + 2T^{t}_{x+\Delta,y+\Delta}\right) + \frac{2N}{M} T_0. \tag{4.5}$$

Considerăm că inițial ($t=0$) temperatura mediului fluid este constantă (aer sau particule de ulei în suspensie). În această ipoteză se determină matricea temporală a temperaturilor dintelui;

$$T_{1,1}^{\Delta t} = T_0 + \frac{2\Delta}{\lambda M} q_{01},$$

$$\begin{aligned} T_{2,1}^{\Delta t} &= T_0, \\ &\vdots \\ T_{i,1}^{\Delta t} &= T_0, \\ &\vdots \\ T_{x_{max},1}^{\Delta t} &= T_0; \end{aligned} \tag{5}$$

$$T_{1,1}^{2(\Delta t)} = \left(1 - \frac{2N+4}{M}\right) T_{1,1}^{\Delta t} + \frac{2N+4}{M} T_0,$$

$$T_{2,1}^{2(\Delta t)} = \frac{1}{M} T_{1,1}^{\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{M}\right) T_0 + \frac{2\Delta}{\lambda M} q_{02},$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ T_{3,1}^{2(\Delta t)} &= T_0, \\ &\vdots \\ T_{x_{max},1}^{2(\Delta)} &= T_0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$T_{3,1}^{3(\Delta t)} = \frac{1}{M} T_{2,1}^{2(\Delta t)} + \left(1 - \frac{1}{M}\right) T_0 + \frac{2\Delta}{\lambda M} q_{03},$$

$$\begin{aligned} &\vdots \\ T_{i,1}^{i(\Delta t)} &= \frac{1}{M} T_{i-1,1}^{(i-1)\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{M}\right) T_0 + \frac{2\Delta}{\lambda M} q_{0i}, \\ &\vdots \\ T_{x_{max}}^{x_{max}(\Delta t)} &= \frac{1}{M} T_{x_{max},1}^{(x_{max}-1)\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{M}\right) T_0 + \frac{2\Delta}{\lambda M} q_{0x_{max}}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} T_{1,2}^{0} &= T_0, \\ T_{1,2}^{\Delta t} &= T_0, \\ T_{1,2}^{2(\Delta t)} &= T_0, \\ &\vdots \\ T_{1,j}^{j(\Delta t)} &= \frac{1}{M} T_{1,1}^{(j-1)\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{M}\right) T_0, \\ T_{1,y_{max}}^{y_{max}(\Delta t)} &\frac{1}{M} T_{1,y_{max}-1}^{(y_{max}-1)\Delta t} + \left(1 - \frac{2N+2}{M}\right) T_0, \end{aligned} \tag{8}$$

Dacă se notează $\theta_{i,j}^{k(\Delta t)} = T_{i,j}^{k(\Delta t)} = T_0$, atunci matricea temporală devine zero pentru $\Delta t = 0$ și are următoarele forme pentru diferitele intervale de timp :

$$\mathfrak{M}_{T,\Delta t} = \begin{vmatrix} \theta_{1,1}, & 0, & 0,\ldots,0, \\ 0, & 0, & 0,\ldots,0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0,\ldots,0 \end{vmatrix}, \tag{9.1}$$

$$\mathfrak{M}_{T,2(\Delta t)} = \begin{vmatrix} \theta_{1,1}, & \theta_{2,1}, & 0,\ldots,0 \\ \theta_{1,2}, & 0, & 0,\ldots,0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0,\ldots,0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0,\ldots,0 \end{vmatrix}, \tag{9.2}$$

$$\mathfrak{M}_{T,k(\Delta t)} = \begin{vmatrix} \theta_{1,1}, & \theta_{2,1}\ldots\theta_{k,1},\ldots,0 \\ \theta_{1,2}, & \theta_{2,2} \quad 0, \ldots ,0 \\ \vdots & \vdots \\ \theta_{1,k}, & 0,\ldots 0,0,\ldots,0 \\ \vdots & \vdots \\ 0, & 0,\ldots,0,0,\ldots,0 \end{vmatrix}, \tag{9.k}$$

$$\mathfrak{M}_{T,n_1(\Delta t)} = \begin{vmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{2,1},\ldots\ldots, & \theta x_{max,1} \\ \theta_{1,2}, & \theta_{2,2}\ldots\ldots, & \theta x_{max,2} \\ \vdots \\ \theta_{1,y_{max}} & \theta_{2,y\,max}\ldots, & \theta_{x_{max},y_{max}} \end{vmatrix}. \tag{9.n$_1$}$$

Intervalul de timp Δt se determină din considerente legate de convergența soluțiilor sistemului de ecuații și de parcurgere a liniei de angrenare de către orice punct de pe flancul activ :

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta^2}{4a} \quad \text{pentru celulele din interiorul dintelui;} \tag{10.1}$$

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta^2}{2a} \quad \text{pentru celulele de pe flanc;} \tag{10.2}$$

$$\Delta t \leqslant \frac{\Delta^2}{4a(\alpha\Delta/\lambda + 1)} \quad \text{pentru celulele din vîrful flancului,} \tag{10.3}$$

$\Delta t = \dfrac{l_a \cdot \Delta}{V_n \cdot H_d}$, unde l_a este lungimea activă a liniei de angrenare; v — viteza normală pe linia de angrenare; H_d — înălțimea dintelui.

Cu ajutorul relațiilor (10.1) — (10.3) se stabilesc dimensiunile rețelei elementare (Δ) și intervalul de timp (Δt) pentru geometrie, material și regim cinematic ale roții dințate cunoscute.

Fluxul termic de frecare efectiv depinde atît de condițiile locale de frecare (μ_{ak}, presiunea reală p_r, coeficientul de distribuție al fluxului termic β, viteza de alunecare v_a), cît și de proprietățile termofizice ale stratului de interacțiune a uleiului aditivat cu microgeometria flancului:

$$q_{0i} = q_{ori} - Q_{sr} \cdot \frac{b_{Hi}}{v_{ai}}, \tag{11}$$

în care q_{0i} este fluxul termic efectiv ce se disipă în pinion; $q_{ori} = \beta_i \cdot \mu_{aki} \cdot p_{ri} \cdot v_{ai}$ — fluxul termic real; Q_{sr} — energia termică consumată de stratul de interacțiune reciprocă a asperităților; b_{hi} — lățimea benzii hertziene de contact; v_{ai} — viteza de alunecare; p_{ri} — presiunea reală de contact dependentă de presiunea hertziană și aria reală adimensională.

Pe un stand de modelare termică, s-a constatat că stratul de interacțiune a uleiului aditivat cu aditivi de E.P. cu suprafețele metalice cementat-călite, are capacitatea calorică aproximativ constantă $1{,}108 \cdot 10^{-2}$ ... $1{,}24 \cdot 10^{-2}$ erg/grd [8].

Cu aceste considerente, se prezintă în figura 3, cîmpul termic generat de frecarea pe flancurile angrenajului tip A DIN 51354, corespunzător unei sarcini ($91{,}5 \cdot 10^4$ N/m) și viteze (8,3 m/s) la care a apărut griparea progresivă. Materialul angrenajului este oțelul 21 Mo MC 12 STAS 791-66, iar uleiul este TIN 125 EP, ulei mediu aditivat.

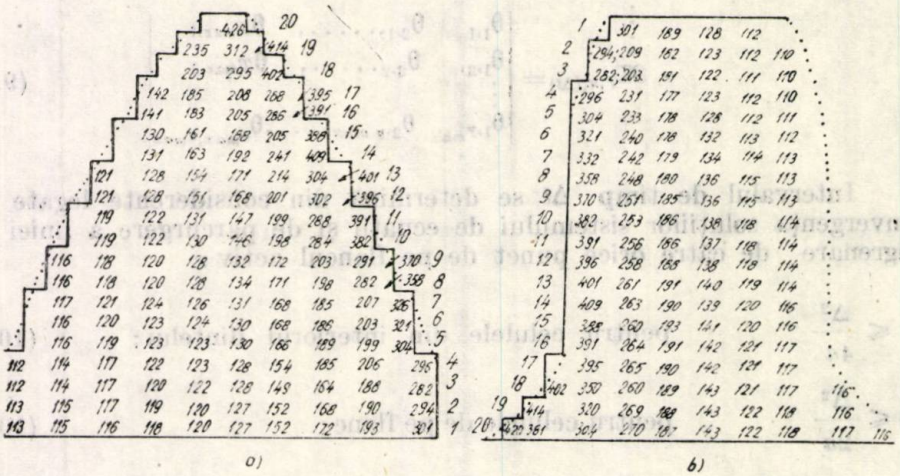


Fig. 3. — Distribuția temperaturii în dinții conjugați ai angrenajului.

Rolul de amortizor termic al aditivului de E.P. se poate observa din figura 4, în care se indică variația temperaturii reale de contact pentru un ulei aditivat și unul neaditivat în prezența aceluiași material. Deși sarcinile la care s-au gripat angrenajele sînt esențial diferite ($91{,}5 \cdot 10^4$ N/m pentru uleiul TIN 125 EP și $57{,}1 \cdot 10^4$ N/m pentru uleiul M 40), totuși

temperaturile de contact sînt mai mari în cazul uleiului neaditivat (curbele 1 a și 2 a fig. 4). Se mai poate constata că punctul cel mai cald de pe linia de angrenare este punctul corespunzător capului dintelui de la pinion și piciorul dintelui de la roată (intrarea în angrenare). Temperaturile corespunzătoare, calculate la baza rugozităților sînt indicate în

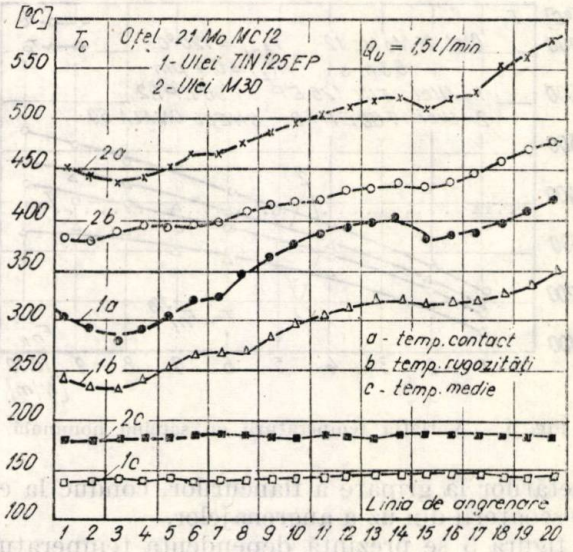


Fig. 4. — Variația temperaturilor caracteristice pe linia de angrenare.

figura 4 prin curbele 1 *b* pentru uleiul TIN 125 E. P. și, respectiv, 2*b* pentru uleiul neaditivat M 40.

În tabelul 1 sînt indicate temperaturile maxime de pe linia de angrenare, (T_c), temperaturile medii (din centrul dintelui) T_m și temperaturile de la baza rugozităților (TR_z) determinate pentru angrenaje din trei oțeluri cementat-călite sau CIF, angrenaje care au fost gripate în prezența a opt uleiuri, dintre care șase aditivate cu aditivi de extremă

Tabelul 1

Nr. crt.	ULEI/OȚEL	21 MoMc 12			41 Mo C 11			OLC 45 X		
		T_c °C	TR_z °C	T_m °C	T_c °C	TR_z °C	T_m °C	T_c °C	TR_z °C	T_m °C
1	TIN 125—EP	426	351	152	382	321	147	342	281	128
2	T 90 EP 2	398	336	137	357	326	140	351	286	133
3	T 90 EP 1	402	342	138	371	332	142	360	288	138
4	T 80 EP 2	411	349	144	378	334	143	364	289	140
5	T 80 EP 1	408	323	146	392	337	148	368	291	141
6	SHELL OMALA-60	405	320	145	386	321	147	359	286	138
7	M 40	545	446	178	512	387	166	492	381	160
8	M 30	580	482	191	546	406	174	530	398	172

presiune. Cercetările experimentale s-au efectuat pe un stand cu roți dințate cu circuit mecanic închis. Angrenajul cercetat are geometria conform cuplei A DIN 51354.

Influența parametrilor de exploatare (sarcina, lubrifiantul, viteza și rugozitatea) asupra regimului termic al angrenajului, și observațiile

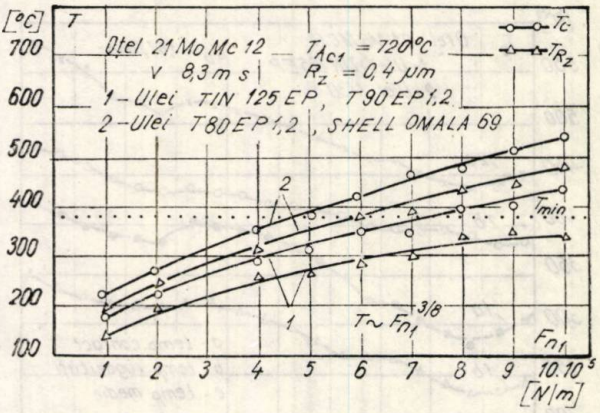


Fig. 5. — Variația temperaturii cu sarcina nominală.

din timpul cercetărilor la gripare a flancurilor, conduc la concluzii referitoare la cauzele scoaterii din uz a angrenajelor.

Astfel, în figura 5 se prezintă dependența temperaturii maxime de contact și a temperaturii de la baza rugozităților, de sarcina nominală unitară pentru uleiurile aditivate, cupla fiind executată din oțel 21 MoMc 12, flancurile avînd rugozitatea $R = 0{,}4 \ldots 0{,}6$ μm. Se indică cu linie punctată, temperatura minimă calculată la care au apărut pe flanc rizurile caracteristice gripajului progresiv.

Dependența temperaturilor caracteristice ale danturii (de contact și de la baza rugozităților) de viteza de pe cercul de rostogolire este indicată în figura 6 pentru uleiul TIN 125 EP și oțelul 21 MoMc 12.

Microgeometria flancului modifică în principal fluxul termic real și implicit temperatura de contact și de la baza rugozităților. Astfel, în figura 7 se prezintă valorile calculate ale acestor temperaturi pentru diferite rugozități R_z ale flancului, rugozități care sînt deformate elastic sub sarcină pînă la zona de inflexiune a curbei de portanță ABBOTT.

Din cele arătate se constată că regimul termic pentru parametri maximali de sarcină, viteza și microgeometria, influențează în cea mai mare parte evoluția gripajului angrenajelor cementat-călite sau CIF, lubrifiate cu uleiuri minerale aditivate cu aditivi de extremă presiune (E. P.), astfel:

a) gripaj incipient pentru:

$$T_{gr} \leqslant T_c \leqslant (350 \ldots 380)°C \text{ și } T_{cr} \leqslant T_{Rz} \leqslant T_{gr}, \qquad (12.1)$$

b) gripaj progresiv:

$$(350 \ldots 380)°C < T_c < (700 \ldots 720)°C \text{ și}$$
$$T_{gr} < T_{Rz} < (350 \ldots 380)°C, \qquad (12.2)$$

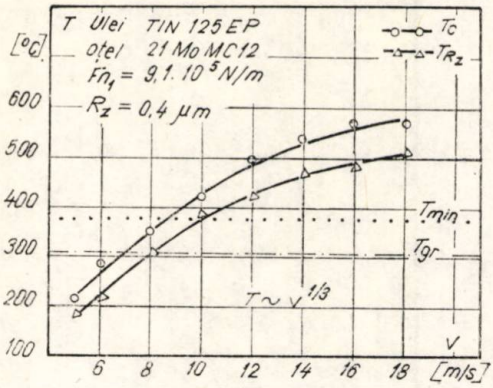


Fig. 6. — Variația temperaturii cu viteza periferică.

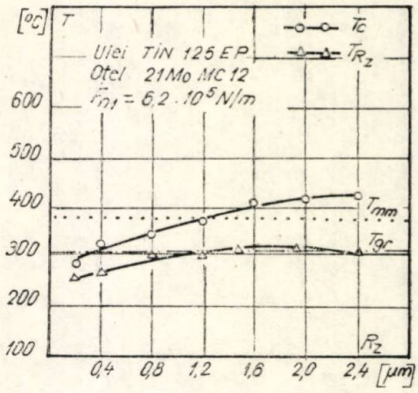


Fig. 7. — Variația temperaturii cu rugozitatea medie.

c) complet distrugător :

$$T_c > (700 \ldots 720)°C \text{ și } T_{Rz} > (350 \ldots 380)°C, \qquad (12.3)$$

în care T_{gr} — temperatură caracteristică lubrifiantului, temperatură la care contactul metalic al unei cuple etalon devine cert [8].

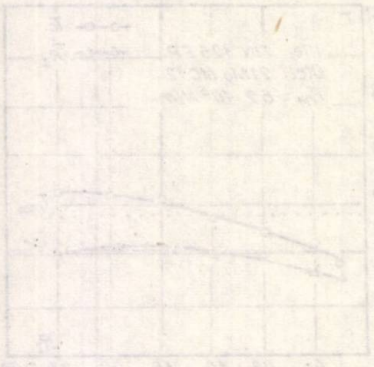
În încheiere se pot concluziona următoarele :

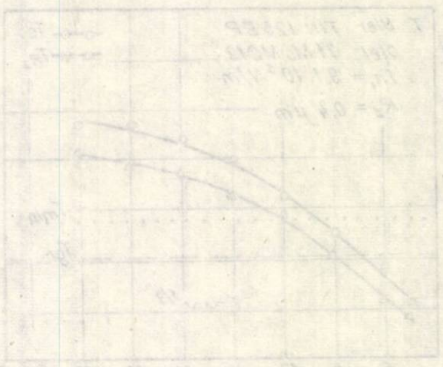
1°. Teoretic, regimul termic al danturii angrenajelor în perioada gripării se caracterizează în principal prin trei valori de temperaturi și anume : temperatura de contact a flancului, temperatura de la baza rugozităților și temperatura medie din centrul dintelui ; acestea se confirmă practic ;

2°. Corelația temperaturilor caracteristice danturii în procesul de gripare este influențată cu pondere diferită de următorii parametrii : de geometria (23 %), materialul (15 %) și cinematica angrenajului (9 %), precum și de microgeometria flancurilor (4 %) și proprietățile tribologice ale uleiurilor minerale aditivate (46 %) ;

BIBLIOGRAFIE

1. L. S. AKIN, *An interdisciplinary lubrication theory for gears (with particular emphasis on the scuffing mode of failure)*, Trans. ASME, **B. 95,** *4*, 1178—1195 (1973).
2. H. BLOK, *The Flash Temperature-Concept*, Wear, *6*, 483—494 (1963).
3. N. CZICHOS, *Failure criteria in thin film lubrification the concept of a failure surface*, Tribology, *7*, 14—30 (1974).
4. G. NIEMANN, K. SEITZINGER, *Die Erwärmung einsatzgehärrteter Zahnroder als Kennewert für ihre Fre βtragfähigkeit*. V.D.I.-z **113,** *2* (1971).
5. A. TUDOR, *Contribuții privind influența regimului termic al danturii asupra apariției gripajului la angrenaje metalice cilindrice cu dinți drepți*. Teză doctorat, Institutul politehnic București, 1979.
6. D. PAVELESCU, A. TUDOR, *Influence of microgeometry on the thermal flux distribution, on the contact strip of a cylindrical gear*, Rev. Roum. Sci. Tehn. — Mec. Appl., **22,** *5*, p. 773—781 (1977).
7. A. TUDOR, *Distribuția fluxului termic de frecare în elementele cuplei de tip roți dințate*, St. cerc. mec. apl., 1977, **36,** *1*.
8. D. PAVELESCU, A. TUDOR, *O termickoj stabilnosti nekih aditiviramh mineralnih, ulja*, Redovni naucnostrucni skup Simp. Jugoma 78, Maziva Kao tribololoska Sredstra, Bled, oct. 1978.





CU PRIVIRE LA INFLUENȚA UNOR ELEMENTE DE GEOMETRIE ASUPRA RIGIDITĂȚII DANTURII ÎN CAZUL ANGRENAJELOR PARALELE CILINDRICE CU DINȚI DREPȚI ÎN EVOLVENTĂ

de GEORGE DOBRE

Institutul politehnic din București

Utilizînd ca exemplificări variațiile în timp ale rigidității danturii stabilite prin calcul pe baza unei metodologii analizate anterior [2], [3], sînt evidențiate noi aspecte privind influența unor elemente de geometrie asupra acestei rigidități în cazul angrenajelor paralele cilindrice cu dinți drepți, cu roți definite de cremaliera de referință standard. Problematica prezintă interes la proiectarea angrenajelor, cînd se impune cerința unei bune comportări vibroacustice.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În cazul angrenajelor paralele cilindrice cu dinți drepți, cu roți definite de cremaliera de referință standard [6], variația în timp a rigidității danturii este în trepte, avînd salturi semnificative între valorile maximă și minimă (vezi fig. 2...5). La angrenajele precise și puternic încărcate, această excitație parametrică are efectul determinant în raport cu celelalte excitații.

Reducerea saltului din variația rigidității și obținerea unei aluri de variație mai line se realizează optim prin corecția danturii numită flancare.

În general, chiar dacă se are în vedere execuția flancării, este utilă cunoașterea influenței unor elemente de geometrie asupra variației rigidității danturii, pentru alegerea și stabilirea cît mai corectă a acestora la proiectare atunci cînd se urmărește asigurarea cerințelor dinamice. În această idee, în lucrare este analizată influența unor elemente de geometrie care fie se aleg (înălțimea de referință a racordului profilului de referință), fie că rezultă sau se stabilesc în cursul proiectării la angrenajele cu distanța dintre axe standardizată (deplasările totală și parțiale de profil, scurtarea danturii).

În literatură, influența elementelor de geometrie a fost abordată în [1], [3], [5], în ultima lucrare analiza referindu-se la angrenajele cu dinți înclinați.

În prezenta lucrare, studiul se face utilizînd variația rigidității totale a danturii (în [5] se acceptă drept criteriu de comparație variația rigidității unei perechi de dinți, care însă nu dă indicații asupra mărimii saltului). Exemplele sînt stabilite utilizînd relațiile de calcul analizate în [3] și a căror rezolvare se face conform metodei indicate în [2]. Sintetic, în următorul paragraf sînt prezentate relațiile de calcul.

ST. CERC. MEC. APL., TOM, 41, NR. 1, 1982 P. 157–166

2. RELAȚII DE CALCUL

În sistemul xOy (fig. 1), ales astfel încît Ox trece prin punctele de început ale profilurilor de racord pe cercul de picior, iar Oy are direcția axei de simetrie a dintelui, expresiile deformațiilor în punctul Q în lungul

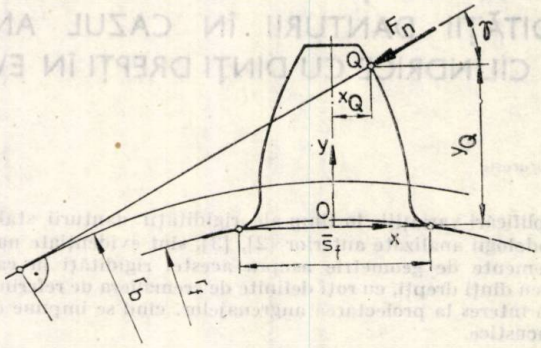


Fig. 1. — Schemă de calcul.

liniei de angrenare determinate de încovoierea dintelui și, respectiv, de deplasarea elastică a încastrării dintelui în corpul roții sînt

$$\delta_d = \frac{F_n/b}{E}\left\{10{,}92\int_0^{y_Q}\frac{(y_Q)-y-x_Q\,\mathrm{tg}\,\gamma)^2}{(2x)^3}\,\mathrm{d}y + \right.$$

$$\left. + (1+\mu)[2{,}4 + (1-\mu)\,\mathrm{tg}^2\,\gamma]\int_0^{y_Q}\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}y\right\}\cos^2\gamma\ ; \qquad (1)$$

$$\delta_r = \frac{2}{F_n}\,(c_M\,M^2 + c_{MT}\,M\,T + c_T\,T^2 + c_N\,N^2),$$

în care factorii c_M, c_{MT}, c_T și c_N sînt

$$c_M = \frac{9}{\pi}\,\frac{1-\mu^2}{E}\,\frac{1}{b\,s_f^2},$$

$$c_{MT} = \frac{(1+\mu)\,(1-2\,\mu)}{2E}\,\frac{1}{b\,s_f^2}, \qquad (2)$$

$$c_T = \frac{1-\mu^2}{\pi\,E\,b}\left[\left(\frac{s}{s_f}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{s}{s_f}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{s}{s_f}-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{s}{s_f}-\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$c_N = \left(1+\frac{1-\mu}{2{,}4}\,\mathrm{tg}^2\,\gamma\right)c_T.$$

Se acceptă

$$\frac{s}{s_f} = 0{,}73\,\frac{r_f}{s_f}, \tag{3}$$

iar momentul încovoietor M și componentele tangențiale T și normală N ale forței normale la profil F_n sînt

$$M = F_n\,(y_Q \cos\gamma - x_Q \sin\gamma),$$

$$T = F_n \cos\gamma, \tag{4}$$

$$N = F_n \sin\gamma.$$

Deformația de contact se calculează cu expresia

$$\delta_k = 3{,}22\,\frac{F_n/b}{E}. \tag{5}$$

În relațiile de mai sus intervin: b — lățimea danturii; E — modulul de elasticitate (longitudinal); μ — coeficientul de contracție transversală.

Deformația totală a unei perechi de dinți este

$$\delta_u = \delta_{d_1} + \delta_{d_2} + \delta_k. \tag{6}$$

Dependența liniară dintre deformație și sarcină permite scrierea rigidității specifice a unei perechi de dinți sub forma

$$k_u = \frac{F_n/b}{\delta_u}. \tag{7}$$

Dacă k'_u și k''_u sînt rigiditățile specifice ale perechilor de dinți aflate simultan în angrenare [1], rigiditatea specifică a danturii este

$$k = k'_u + k''_u. \tag{8}$$

Rezolvarea calculului s-a realizat utilizînd metoda indicată în [2], (spre deosebire, în [5] se aproximează întregul profil frontal cu un polinom de gradul al doilea). A fost utilizată prelucrarea automată a datelor (PAD).

Observație. După cum se constată, calculul se realizează fără considerarea interferenței de angrenare cauzată de sarcină și erori, deoarece în acest ultim caz ar fi rezultat un consum mare de timp de calcul

[1] S-a considerat numai existența angrenării duble, deoarece roțile sînt definite de cremaliera de referință standard.

pentru numeroasele exemple din lucrare. Ca urmare, deoarece nu poate fi evidențiată forma variației rigidității în zonele de trecere de la angrenarea dublă la cea unipară, și invers, criteriile de comparație (suficiente) care vor evidenția influența elementelor de geometrie vor fi mărimea saltului (valorile maximă și minimă ale rigidității) și forma variației rigidității în lungul liniei de angrenare (în accepția că trecerile de la angrenarea dublă la cea unipară, și invers, au loc instantaneu); implicit, se ține seama de mărimea segmentelor de angrenare dublă și unipară.

3. ANALIZA PROBLEMEI

În figurile 2—5 variația rigidității a fost reprezentată pe o perioadă de angrenare în funcție de coeficientul

$$S^* = \frac{S}{m},$$

S fiind mărimea segmentului orientat dintre polul angrenării și punctul curent de angrenare, situat pe axa a cărei direcție coincide cu linia angrenării, cu sensul spre ieșire din angrenare. Se mai face observația că unele rezultate obținute prin PAD sînt redate în subtitlul figurilor 2...5 cu numărul de zecimale tipărite la listare, urmînd ca în practică să fie utilizate valorile care satisfac precizia dimensională a execuției.

3.1. INFLUENȚA ÎNĂLȚIMII RACORDULUI PROFILULUI DE REFERINȚĂ

În [5], la studiul danturii înclinate, profilul de racord nu a fost considerat în cadrul profilului modelului (vezi și mențiunea din paragraful 2), acceptîndu-se o înălțime de calcul a dintelui redusă față de cea reală cu un procent din raza de curbură a racordului.

În prezenta lucrare se utilizează expresiile analitice ale profilului de racord (conform indicațiilor din [3]), care rezultă pentru o înălțime $h_{\rho 0}$ a profilului de racord la capul cremalierei generatoare.

În standarde (vezi de exemplu [6], [7]) se consideră că înălțimea profilului de racord este egală cu jocul de referință (la picior) c_0; din cauza metodelor de prelucrare sau a mărimii modulului, coeficientul c_0^* al jocului de referință poate fi ales într-o gamă largă de valori, recomandîndu-se $c_0^* = 0{,}17$; $0{,}25$; $0{,}3$. Pe de altă parte, este curentă în practică obținerea unei înălțimi a racordului profilului de referință mai reduse decît jocul de referință, $h_{\rho 0} < c_0$. Ambele situații au fost exemplificate în figura 2.

Primul aspect, $h_{\rho 0}^* = c_0^*$, a fost analizat utilizîndu-se valorile exacte rezultate geometric ale coeficienților jocului de referință: $c_0^* = 0{,}164495$ (determinat de $\rho_0^* = 0{,}25$) și $c_0^* = 0{,}295087$ (pentru care rezultă racordarea profilurilor opuse); exemplele sînt ilustrate de curbele I, II și III din figura 2. Aspectul în care $h_{\rho 0}^* < c_0^* = 0{,}25$ a fost analizat utilizînd coeficienții $h_{\rho 0}^* = 0{,}164495$ și $h_{\rho 0}^* = 0$ (vezi curbele IV și V din

fig. 2). Se constată că alura variației rigidității rămîne aceeași în toate cazurile. În ceea ce privește mărimea rigidității, rezultă că diferențele între valorile acesteia nu sînt semnificative dacă $h^*_{\rho 0} = c^*_0$ (curbele I, II și III), sau dacă la un c^*_0 dat și $h^*_{\rho 0} < c^*_0$, ultimele valori nu diferă sub-

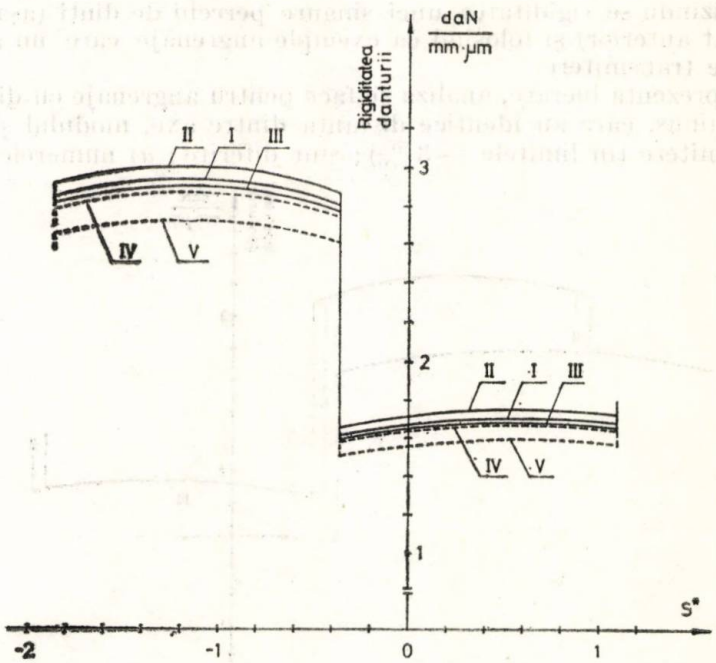


Fig. 2. — Variația rigidității danturii pe o perioadă a angrenării în funcție de înălțimea $h_{\rho 0}$ a racordului profilului de referință $a = 90$ mm ; $m = 2{,}5$ mm ; $i = 3{,}15$; $z_1 = 17$ dinți ; $z_2 = 54$ dinți ; $x_s = 0{,}525378$; $x_2 = 0{,}131345$; $x_1 = 0{,}394033$.
I, II, III — $h^*_{\rho 0} = c^*_0$; IV, V — $h^*_{\rho 0} < c^*_0 = 0{,}25$.
I — $h^*_{\rho 0} = 0{,}25$; II — $h^*_{\rho 0} = 0{,}164495$; III — $h^*_{\rho 0} = 0{,}295087$.
I, IV, V — $c^* = 0{,}224633$; II — $c^* = 0{,}139133$; III — $c^* = 0{,}269633$.

stanțial între ele (curbele I și IV); dacă $h^*_{\rho 0} < c^*_0$, mărimea rigidității diferă mai mult față de aceea caracteristică cazului $h^*_{\rho 0} = c^*_0$, mai ales pe domeniul angrenării duble (curbele I și V).

3.2. INFLUENȚA DEPLASĂRILOR DE PROFIL ȘI A SCURTĂRII DANTURII

Studierea simultană a efectului deplasărilor de profil și a scurtării danturii se explică astfel : a) deplasarea totală modifică jocul la picior ; mărimea acestuia — identică la ambele roți — poate rezulta sub limita minimă dictată de corecta funcționare ; *b*) la anumite mărimi ale deplasărilor parțiale de profil se produce interferența la piciorul dintelui. Dacă în al doilea caz scurtarea danturii este singura modalitate de asigurare a cerințelor angrenării, în primul caz se impune dacă eventuala posibilitate a utilizării unui alt joc de referință nu satisface.

A. În ceea ce privește influența *deplasării totale de profil*, în [1] se semnalează efectul important al acesteia asupra rigidității danturii la angrenajele cilindrice cu dinți drepți, utilizîndu-se însă ca exemple angrenaje care nu au același modul și raport de transmitere. În [5] este evidențiată aceeași concluzie în cazul angrenajelor cu dinți înclinați, dar analizîndu-se rigiditatea unei singure perechi de dinți (așa cum s-a menționat anterior) și folosind ca exemple angrenaje care nu au același raport de transmitere.

În prezenta lucrare, analiza se face pentru angrenaje cu dinți drepți plus și minus, care au identice distanța dintre axe, modulul și raportul de transmitere (în limitele $\pm$ 3 %); sînt diferite: *a*) numerele de dinți,

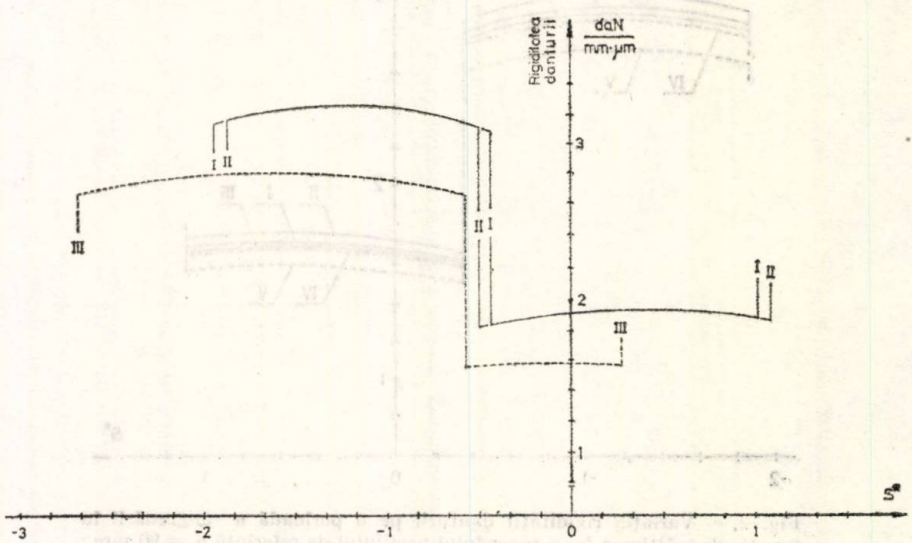


Fig. 3. — Variația rigidității danturii pe o perioadă a angrenării în funcție de coeficientul x_s al deplasării însumate de profil, la angrenaje cu dinți nescurtați (I, III) și scurtați (II)

$a = 100$ mm; $m = 3$ mm; $i = 1{,}8$; $c_0^* = 0{,}25$; $x_1 = x_2 = \frac{x_s}{2}$.

———— $z_1 = 23$ dinți; $z_2 = 41$ dinți; $x_s = 1{,}518066$;
– – – – – $z_1 = 24$ dinți; $z_2 = 43$ dinți; $x_s = -0{,}163462$.
I — $c^* = 0{,}065277$; II — $c^* = 0{,}1$; III — $c^* = 0{,}246793$.

care însă determină un același raport de transmitere; b) coeficienții deplasărilor parțiale de profil, dar care rezultă din coeficientul deplasării însumate după aceeași lege de împărțire; *c*) coeficienții jocului la picior. Exemplele sînt ilustrate în figura 3.

La angrenajul plus I, coeficientul jocului la picior $c^* \cong 0{,}065$ rezultă la limita minimă impusă funcțional), recomandată între 0,05 și 0,1 [4]; angrenajul plus II are aceleași elemente geometrice, exceptînd jocul la picior $c^* = 0{,}1$, obținut prin scurtarea danturii roților. La angrenajele plus menționate, variațiile rigidității danturii practic coincid (în fig. 3, diferențele cu totul nesemnificative nu pot fi evidențiate grafic, v. curbele I și II); fenomenul este explicabil: după scurtare, forma dinților nu se schimbă pe porțiunile care participă la angrenare, avînd loc numai modificarea duratelor de angrenare dublă și singulară.

Comparativ, la angrenajul minus III modificarea duratelor de angrenare este mai substanțială la un același pas de bază, iar valorile rigidității sînt cu mult mai reduse.

Observații interesante rezultă din analiza curbelor I trasate cu linie continuă și întreruptă în figura 4, curbe corespunzătoare unor angrenaje plus, și, respectiv, minus. La angrenajul minus a fost necesară scurtarea danturii, mai întîi pentru asigurarea coeficientului jocului minim la

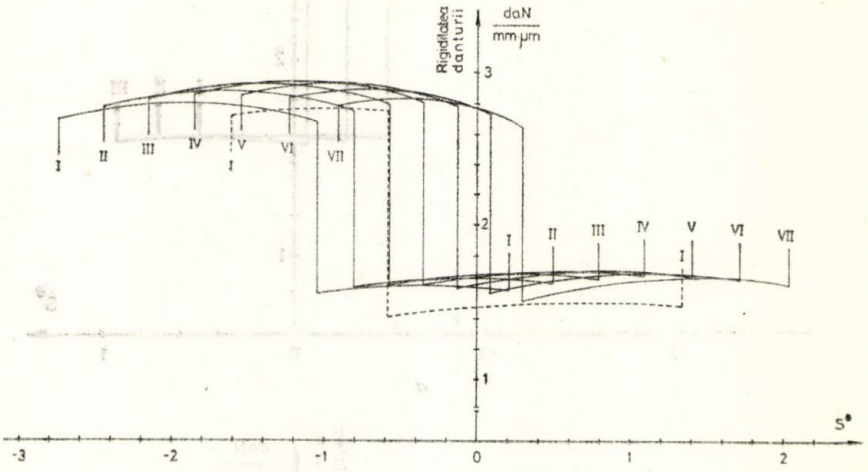


Fig. 4. — Variația rigidității danturii pe o perioadă a angrenării în funcție de coeficienții x_1 și x_2 ai deplasărilor parțiale de profil la angrenaje deplasate cu dinți nescurtați (curbele cu linie continuă) și scurtați (curba cu linie întreruptă)

$a = 90$ mm ; $m = 2{,}5$ mm ; $i = 3{,}15$; $c_0^* = 0{,}25$.

———— $z_1 = 17$ dinți ; $z_2 = 54$ dinți ; $x_s = 0{,}525378$; $c^* = 0{,}224633$.

– – – – – $z_1 = 18$ dinți ; $z_2 = 57$ dinți ; $x_s = -1{,}229939$; $c_1^* = 0{,}514864$; $c_2 = 0{,}5648954$.

I — $x_1 = 0$; II — $x_1 = \frac{1}{4} x_s$; III — $x_1 = \frac{1}{2} x_s$; IV — $x_1 = \frac{3}{4} x_s$;

V — $x_1 = x_s$; VI — $x_1 = \frac{5}{4} x_s$; VII — $x_1 = \frac{3}{2} x_s$.

picior, $c^* = 0{,}05$, iar apoi — pentru evitarea interferenței în zona de racord la ambele roți, obținîndu-se $c_1^* \cong 0{,}515$ și $c_2^* = 0{,}565$; ca urmare, spre deosebire de exemplul analizat în figura 3, durata angrenării duble a angrenajului minus se reduce în raport cu cea a angrenajului plus. În legătură cu efectul deplasării însumate negative și a scurtării danturii asupra rigidității danturii, se fac următoarele observații : *a*) obținerea unei danturi mai elastice ca urmare a deplasărilor parțiale negative necesare (în cazul discutat, numai roata 2 are deplasare negativă) determină o rigiditate unipară mai redusă la angrenajul minus față de cea a angrenajului plus de comparație ; *b*) pe de altă parte, reducerea înălțimii dinților cauzată de scurtare determină o creștere a rigidității unei perechi de dinți la angrenajul minus pe o porțiune a angrenării duble, fapt care determină valori comparabile ale rigidității totale la cele două angrenaje (vezi și tabelul 1).

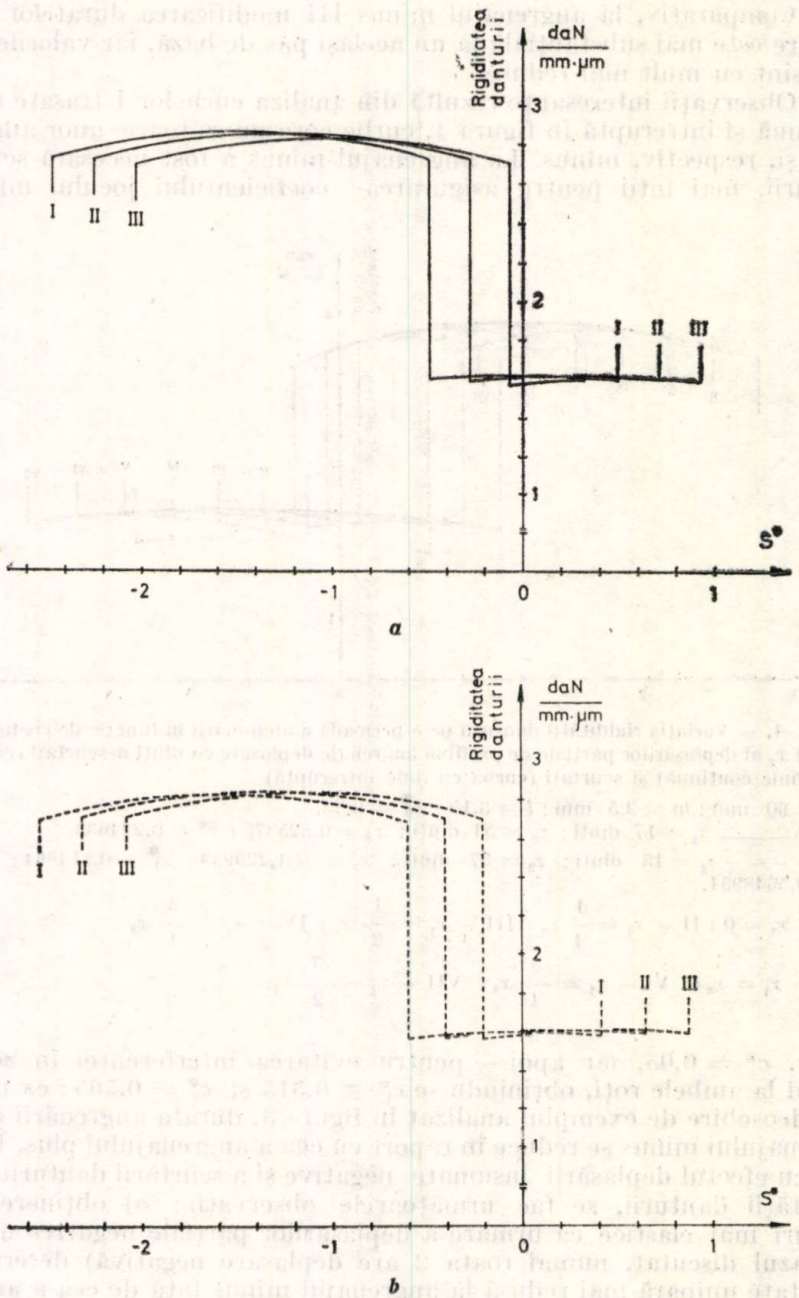


Fig. 5. — Variația rigidității danturii pe o perioadă a angrenării în funcție de coeficienții x_1 și x_2 ai deplasărilor parțiale de profil la angrenaje zero deplasate $a = 160$ mm ; $m = 5$ mm ; $x_s = 0$; $x_1 = -x_2$; $c^* = c^*_0 = 0{,}25$.
———— $i = 1$; $z_1 = z_2 = 32$ dinți.
– – – – – – $i = 1{,}8$; $z_1 = 23$ dinți ; $z_2 = 41$ dinți.
I — $x_1 = 0$; II — $x_1 = 0{,}1$; III — $x_1 = 0{,}2$.

În concluzie, atît mărimea deplasării totale, cît şi cea a scurtării, modifică substanţial duratele de angrenare; dacă nu se impune scurtarea danturii, mărimile rigidităţii danturii la angrenajele plus şi minus cu date identice diferă în mare măsură; dacă se execută scurtarea danturii, efectul cumulat al celor doi parametri asupra mărimii rigidităţii este mai redus pe domeniul angrenării duble.

B. Pentru analiza influenţei *deplasărilor parţiale de profil* se utilizează reprezentările din figurile 4 şi 5.

Tabelul 1

Valori ale rigidităţii danturii la angrenaje cu dinţi nescurtaţi şi scurtaţi

Angrenajul	Rigiditatea specifică $\left[\frac{daN}{mm \cdot \mu m}\right]$		
	a unei perechi de dinţi în punctul		totală în A sau D
	A	D	
Plus cu dinţi nescurtaţi I, fig. 4	1,128	1,566	2,694
Minus cu dinţi scurtaţi I, fig. 4	1,235	1,485	2,720

Observaţie. A este punctul de intrare în angrenare, iar D — punctul de ieşire din angrenarea unipară.

În figura 4, curbele I...VII trasate cu linie continuă ilustrează variaţiile rigidităţii danturii ale unor angrenaje plus care au aceeaşi deplasare totală şi diferite deplasări parţiale de profil la cele două roţi; deplasările parţiale au fost alese într-o gamă largă de valori. Se constată că duratele de angrenare nu se modifică (diferenţele sînt foarte mici), iar valorile rigidităţii diferă nesemnificativ, ceva mai mult pe domeniul angrenării duble; rigidităţile cele mai reduse rezultă pentru $x_1 = 0$ (curba I), iar cele mai mari — cînd $x_1 = 0{,}394 > \frac{x_s}{2}$ (curba IV); se observă, de asemenea, că se produce o modificare redusă a duratelor de angrenare.

Problema a fost analizată şi în cazul nestudiat în literatură al angrenajelor zero deplasate. Au fost stabilite rigidităţile danturii la angrenaje cu raportul de transmitere $i = 1$ (fig. 5, *a*) şi $i \neq 1$ (fig. 5, *b*), avînd identice distanţa dintre axe şi modulul. Pentru fiecare raport de transmitere, rămîn aproape aceleaşi duratele de angrenare dublă şi unipară, iar mărimea rigidităţii practic nu este influenţată[1)].

4. CONCLUZII

În lucrare au fost evidenţiate noi aspecte teoretice privind influenţa unor elemente de geometrie (înălţimea racordului profilului de referinţă, deplasările totală şi parţiale de profil şi scurtarea danturii) asupra varia-

[1)] Este motivul pentru care reprezentarea curbelor pe aceeaşi figură ar fi devenit neclară.

ţiei rigidităţii danturii. La analiza influenţei unui parametru au fost alese ca exemple angrenaje cu date geometrice identice sau care rezultă după aceeaşi lege (numerele de dinţi, deplasările parţiale de profil).

Cunoaşterea efectului elementelor geometrice asupra variaţiei rigidităţii danturii (din punctul de vedere al formei variaţiei, valorilor maximă şi minimă şi duratelor de angrenare dublă şi singulară) este utilă la proiectare, dacă se urmăreşte asigurarea unei bune comportări vibroacustice. Alegerea optimă a elementelor de geometrie pentru atingerea acestui scop va rezulta din studiul dinamic al transmisiei pe baza cunoaşterii variaţiei rigidităţii danturii.

Primită la redacţie la 3 februarie 1981.

BIBLIOGRAFIE

1. BOSCH, M., *Über das dynamische Verhalten von Stirnradgetrieben unter besonderer Berücksichtigung der Verzahnungsgenauigkeit*, Diss. TH Aachen, 1965.
2. DOBRE, G., *Metodă de rezolvare a calculului deformaţiilor şi caracteristicii elastice a danturii în evolventă la roţile dinţate cilindrice cu dinţi drepţi*, Lucrările simpozionului „Mecanisme şi transmisii mecanice", Reşiţa, 1976, vol. 4, p. 923...932.
3. DOBRE, G., *Elemente de calcul a deformaţiilor şi rigidităţii danturii la angrenajele cilindrice cu dinţi drepţi*, Lucrările simpozionului „Proiectarea asistată de calculator", Braşov, 1978, vol. II, p. 123...129.
4. SAUER, L. ş.a., *Angrenaje*, vol. I, Edit. tehnică, 1970.
5. ZIEGLER, H., *Verzahnungssteifigkeit und Lastverteilung schrägverzahnter Stirnräder*, Diss. TH Aachen, 1971.
6. STAS 821—75. *Angrenaje cilindrice de uz general. Cremaliera de referinţă.*
7. DIN 867. *Bezugsprofil für Stirnräder (Zylinderräder) mit Evolventenverzahnung für den algemeinen Maschinenbau und den Schwermaschinenbau.*

RECENZII

E. Truckenbrodt — „Fluidmechanik"

Band 1 : Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtbeständger Fluide
Band 2 : Elementare Strömungsvorgänge dichtveränderlicher Fluide sowie Potential-und Grenzschichtströmungen
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

Recent a apărut în editura Springer tratatul de mecanica fluidelor, în două volume, elaborat de binecunoscutul profesor Erich Truckenbrodt de la Universitatea Tehnică din München. Cunoscut specialist al domeniului, precum și pentru tratatul de „aerodinamica avionului" (2 vol.), elaborat împreună cu prof. Herman Schlichting, prof. E. Truckenbrodt a publicat, în anul 1968, în aceeași editură, un prim tratat de mecanica fluidelor, *) care s-a bucurat de o primire deosebită.

Prezentul tratat constituie o nouă ediție a celui menționat mai sus dar, prin revizuirile și adăugirile efectuate, constituie totodată o nouă lucrare. Astfel, materialul este prezentat acum în două volume (de 371 și, respectiv, 426 pagini), fiecare conținînd cîte trei capitole. Motivele, în primul rînd de natură didactică, sînt expuse chiar de autor în prefața lucrării.

În ansamblu, lucrarea satisface cerințele unui tratat modern, incluzînd cele mai importante progrese realizate pînă în prezent.

Caracterul didactic și conciziunea sînt elemente care ies în evidență chiar și la o simplă răsfoire a lucrării, împreună cu grija de a realiza un tratat util tuturor celor care au preocupări tehnice inginerești, indiferent de domeniu : de la inginerul constructor de mașini, pînă la inginerii care își dedică activitatea aplicațiilor mecanicii fluidelor : mașini hidraulice, aviație pneumonică etc.

★

După cum se constată din însăși o trecere în revistă a conținutului, lucrarea se adresează unei largi categorii de cititori. Cititorul avizat găsește în această lucrare un manual, pe care îl poate aborda cu o oarecare ușurință, dacă posedă un minimum de cunoștințe generale fizice.

El ia mai întîi cunoștință cu particularitățile mișcării fluidelor (cap. I) și înțelege legile și ecuațiile mișcării fluidelor (cap. II) cu ajutorul cărora poate să asimileze o serie de rezultate generale și aplicațiile simple (cap. III).

Studierea volumului al doilea îi adîncește cunoștințele de mecanica fluidelor cu problemele mișcării fluidelor compresibile (cap. IV), mișcării potențiale (cap. V) și efecte de frecare și strat limită (cap. VI), care îl fac apt să abordeze anumite domenii aplicative specializate, care folosesc ca agent de lucru un lichid sau un gaz (mașini hidraulice, construcții navale, aviație, aerodinamică industrială, aerodinamica vehiculelor, clădirilor, etc.).

Dacă cititorul este un specialist în construcții de mașini sau în altă specialitate apropiată, el poate aborda orice problemă, fiind ajutat în acest sens de unele exemple de aplicații din același domeniu sau din domenii conexe sau înrudite.

În sfîrșit, bibliografia foarte bogată, clasică și recentă, oferă cititorului posibilitatea de a merge direct la sursa unor rezultate, corespunzătoare preocupărilor sale, sau de a adînci în mod corespunzător anumite probleme.

De altfel, este de remarcat efortul depus de autor pentru condensarea într-un spațiu relativ restrîns (circa 700 pagini). Tratatul cuprinde o gamă largă de probleme, mai ales cele legate de practică : mișcări prin conducte, probleme de frecare, aparate și instrumente de mă-

*) E. Truckenbrodt — „Strömungsmechanik : Grundlagen und technische Anwendungen, Springer Verlag, Berlin, — Heidelberg — New York, 1968.

sură, instalații experimentale și mașini hidraulice, mișcări prin canale deschise, elemente de teoria valurilor, mișcări multifazice, hidraulică subterană, mișcări supersonice sau hipersonice etc.

Fără îndoială că o asemenea realizarea nu s-a putut face decît cu prețul unor renunțări. Astfel, ordinea de tratare nu parcurge totdeauna calea naturală, de la modelele simple la modele mai complicate, iar dispersarea noțiunilor pe mai multe capitole aduce repetări inerente.

Pe de altă parte, reducerea aspectelor matematice (demonstrații) la minimum a făcut ca înțelegerea deducerii unor rezultate să fie mai dificilă, sau cel puțin obligă cititorul la eforturi suplimentare și la consultarea materialului bibliografic indicat. În sfîrșit, multe aplicații și direcții de dezvoltare sînt prezentate foarte succint, sub pragul de familiarizare cu problema respectivă. Toate aceste mici omisiuni însă nu scad cu nimic valoarea lucrării, astfel încît aceasta, manual și totodată tratat, reprezintă o contribuție valoroasă și utilă pentru toți cei care lucrează în domeniul mecanicii fluidelor.

Prof. V. N. Constantinescu

HRISTACHE POPESCU, VETURIA CHIROIU, CALCULUL STRUCTURILOR OPTIMALE, Editura Academiei R.S.R., 1981, 240 p.

Procedeele de optimizare în diverse ramuri de activitate și în special în domeniul construcțiilor au luat o dezvoltare deosebită, ele permițînd în anumite condiții realizarea unor economii importante de materiale și de cost prin tipitări a diferitelor elemente. Sub acest raport, lucrarea „CALCULUL STRUCTURILOR OPTIMALE" recent apărută în Editura Academiei R.S. România vine în întîmpinarea necesității introducerii pe o scară tot mai largă a calculului optimal, ea tratînd teoretic și la nivelul utilizării efective a metodelor matematice de optimizare cu aplicare la problemele de proiectare optimală a structurilor în domeniul elastic și elastoplastic.

Astfel, se prezintă stadiul cunoștințelor actuale privind optimizarea structurilor pe baza diferitelor criterii optimale : greutate minimă, rezistență maximă, energie potențială de deformație minimă, egală rezistență și cost minim.

Lucrarea se împarte în două părți. În prima parte, avînd patru capitole, se prezintă metodele de optimizare folosite în proiectarea inginerească. În a doua parte, avînd cinci capitole, se dau aplicații la calculul optimal al structurilor alcătuite din bare.

În primul capitol se formulează problema de optimizare, definindu-se funcția obiectiv, restricțiile de proiectare și variabilele de proiectare. Capitolul al doilea cuprinde metodele de optimizare necondiționată. Se prezintă algoritmele de calcul pentru Powell a direcțiilor conjugate, metoda Fletcher-Reeves a gradienților conjugați, metoda Davidson-Fletcher-Powell a metricii variabile.

Metodele directe și indirecte de optimizare condiționată sînt tratate în capitolul 3. Se dau formulele lui Kuhn-Tucker de testare a optimului și se discută metodele direcțiilor admisibile. În cadrul metodelor indirecte se reformulează metodele necondiționate în scopul eliminării restricțiilor de proiectare.

În capitolul 4 este analizată programarea dinamică și geometrică în timp ce în capitolul 5 se trece la prezentarea stării actuale de proiectare optimală, principalele criterii de optimizare și echivalențele existente.

Optimizarea structurilor în domeniul elastic este prezentată în capitolul 6. Structurile sînt studiate din punctul de vedere al criteriilor de egală rezistență, de energie potențială de deformație minimă și de greutate minimă.

În al 7-lea capitol se analizează proiectarea optimală a structurilor în domeniul plastic, arătîndu-se analogia care există între problemele de determinare a capacității portante și de obținere a structurilor de greutate minimă, ambele conducînd la o problemă de programare liniară. Se studiază structurile de egală rezistență și de greutate minimă.

Penultimul capitol formulează variațional problema de proiectare optimală arătîndu-se echivalența dintre criteriile volumului minim și al energiei potențiale de deformație minimă.

Lucrarea se încheie cu capitolul în care se prezintă structurile de cost minim prin generalizarea problemei de greutate minimă. În concluzie lucrarea prezintă un real interes pentru specialiști, proiectanți, ingineri și cercetători.

Mircea Mișicu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 41, nr. 2 martie—aprilie 1982

SUMAR

STUDII

MIHAI POPESCU, Studiul traiectoriilor optime ale reintrării în atmosferă pentru vehicule spaţiale portante 171

OVIDIU BADEA, VICTOR HOFFMANN, MIRCEA LUPU, Studiul cîmpului de temperaturi în cazul unei mişcări nestaţionare a fluidelor viscoase. 189

FLORICA GLOD, Mişcarea axial simetrică a unui fluid ideal de adîncime finită, datorită unei perturbaţii produse la suprafaţa sa. 199

T. OROVEANU, B. SIRO, Unele probleme de optim privind secţionarea zonelor de amestec în cazul transportului succesiv de produse petroliere 207

MIHAIL POPESCU, Calculul rezonanţei hidraulice la uzine hidroelectrice. II 233

M. BUCULEI, D. BAGNARU, Vibraţiile elementelor cinematice rectilinii cu proprietăţi viscoelastice, ale mecanismelor plane 255

VICTOR FLORIN POTERAŞU, DUMITRU VIERU, GIUSEPPE MUSCOLINO, Unicitatea identificării matricelor de rigiditate şi amortizare la structurile în cadre acţionate seismic 267

RADU PRIŞCU, DAN STEMATIU, CONSTANTIN STERE, Asupra siguranţei barajului Rîuşor 283

NGUYEN BA PHUONG, MIRCEA V. SOARE, Influenţa problemelor de montaj la proiectarea structurilor reticulate planare 293

I. BERBENTEA, O analogie elasto-relativistă 317

T. SIRETEANU, Suspensii cu performanţe îmbunătăţite 321

I. SPULBER, C. SPULBER, Procedeu de rectificare a alezajelor 331

RECENZII 343

STUDIUL TRAIECTORIILOR OPTIME ALE REINTRĂRII ÎN ATMOSFERĂ PENTRU VEHICULE SPAȚIALE PORTANTE

de MIHAI POPESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică, București

Prezenta lucrare își propune să analizeze în detaliu traiectoriile optimale de reintrare în atmosferă în cazul existenței unei forțe de propulsie. Studiul elaborat vizează cu predilecție arcele de traiectorie pe care raportul portanță-rezistență este maxim.

INTRODUCERE

Problema determinării traiectoriei optime pentru un vehicul portant echipat cu motor rachetă, zburînd în atmosfera planetei, este în atenția legilor generale de control pentru portanță și unghi de înclinare laterală. În această lucrare se consideră că tracțiunea este paralelă cu vectorul viteză. Acesta este cazul cînd motorul este montat fix în raport cu vehiculul și zborul se efectuează în straturile dense ale atmosferei pentru unghiuri de incidență mici, ipoteză utilizată și în [1].

Soluțiile pentru manevrele optime sînt obținute prin transformări canonice. Analiza efectuată are în vedere că timpul este liber. De asemenea, un parametru esențial care intervine în studiul elaborat este raportul portanță-rezistență. În acest sens, în ultima parte a lucrării se analizează secvența de arce corespunzătoare tracțiunii în funcție de valoarea acestui raport.

De asemenea, se are în vedere și cazul cînd vehiculul spațial are o accelerație maximă.

FORMULAREA PROBLEMEI

Fie T forța de propulsie,

$$0 \leqslant T \leqslant T_{max}. \tag{1}$$

Forțele aerodinamice, portanța și rezistența la înaintare sînt date de:

$$L = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_L, \tag{2}$$

$$D = \frac{1}{2} \rho S V^2 C_D. \tag{3}$$

Legea de variație a coeficientului de rezistență este

$$C_D = C_{D_0} + k\, C_L^2, \tag{4}$$

unde k, C_{D_0} sînt constante.

Traiectoria este controlată de forța propulsoare T și de forța aerodinamică $A(L, D)$. Mișcarea vehiculului este descrisă de ecuațiile de mișcare

$$\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t} = \bar{V},$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{T}{m}\right)\left(\frac{\bar{V}}{V}\right) + \frac{A}{m} + g(r, t), \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\frac{T}{c}.$$

Condițiile la limită sînt:

$$t = 0;\ \bar{r} = \bar{r}_0;\ \bar{V} = \bar{V}_0;\ m = m_0,$$

$$t = t_1;\ \bar{r} = \bar{r}_1;\ \bar{V} = \bar{V}_1;\ m = m_1. \tag{6}$$

Vom folosi hamiltonianul

$$H = \bar{\lambda}_r \bar{V} + \bar{\lambda}_V \left(\frac{T}{m}\frac{\bar{V}}{V} + \frac{\bar{A}}{m} + \bar{g}\right) + \lambda_m \left(-\frac{T}{c}\right). \tag{7}$$

Hamiltonianul (7) poate fi scris

$$H = \bar{\lambda}_r \bar{V} + \bar{\lambda}_V \left(\frac{\bar{A}}{m} + \bar{g}\right) + \frac{T}{m}\left(\bar{\lambda}_V \frac{\bar{V}}{V} - m\frac{\lambda_m}{c}\right). \tag{8}$$

Se observă că $H = H_{max}$ cînd

$$\sigma = \bar{\lambda}_V \frac{\bar{V}}{V} - m\frac{\bar{\lambda}_m}{c}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sigma > 0 \text{ se alege } & T = T_{max}, \\ \sigma < 0 & T = 0, \\ \sigma = 0 & T = \text{variabil}, \end{cases} \tag{10}$$

unde vom numi funcția σ funcție de comutație.

Ecuaţiile lui Euler-Lagrange sînt :

$$\dot{\lambda}_r = -\frac{\partial H}{\partial r},$$

$$\dot{\lambda}_V = -\frac{\partial H}{\partial V}, \tag{11}$$

$$\dot{\lambda}_m = -\frac{\partial H}{\partial m},$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}_r}{\mathrm{d}t} = -\bar{\lambda}_V \frac{\partial \bar{g}}{\partial r} - \frac{1}{m}\bar{\lambda}_V \frac{\partial \bar{A}}{\partial r},$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}_V}{\mathrm{d}t} = -\bar{\lambda}_r - 2\,[(\bar{\lambda}_V A)/mV^2]\,\bar{V} - \frac{\bar{T}}{mV}\,[\bar{\lambda}_V - (\bar{\lambda}_V \bar{V})\,V^{-2}\,\bar{V}], \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\lambda}_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\bar{T}}{m^2\,V}(\bar{\lambda}_V \bar{V}) + m^{-2}(\bar{\lambda}_V A).$$

1) Variaţia rezistenţei este dată de legea

$$C_D = C_{D_0} + k\,C_L^2, \tag{13}$$

2)
$$\mathrm{tg}\ \varepsilon = \frac{\partial C_D}{\partial\, C_L}, \tag{14}$$

în care ε este unghiul dintre $\bar{V}$ şi $\bar{\lambda}_V$.

3) Unghiul de banc optim este astfel ca vectorul $\bar{V}$, $\bar{\lambda}_V$ şi $\bar{A}$ sînt coplanare astfel ca

$$(\bar{V} \times \bar{\lambda}_V)\,\bar{A} = 0\,. \tag{15}$$

4) Pentru traiectoria optimă a maximului raportului portanţă rezistenţă $\bar{\lambda}_V$ este ortogonal pe $\bar{A}$, astfel că

$$\bar{\lambda}_V\,\bar{A} = 0, \tag{16}$$

ceea ce rezultă din principiul maximului.

5) Dacă T are o direcţie arbitrară, utilizarea condiţiei lui Weierstrass dă

$$\bar{\lambda}_r \bar{V} + \bar{\lambda}_V\left(\frac{\bar{T}}{m}\frac{\bar{V}}{V} + \frac{\bar{A}}{m} + \bar{g}\right) + \lambda_m\left(-\frac{\bar{T}}{c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \bar{\lambda}_r \bar{V}^* + \bar{\lambda}_V\left[\frac{\bar{T}^*}{m}\left(\frac{\bar{V}}{V}\right)^* + \frac{\bar{A}^*}{m} + g\right] + \lambda_m\left(-\frac{T^*}{c}\right), \tag{17}$$

în care am notat cu stelat valorile pe care le iau parametrii de comandă pe extremală. Pentru realizarea condiției (17) este necesar și suficient să avem

$$H(\bar{x}, u, \bar{\lambda}) = \max_{u} H^*(\bar{x}, u, \bar{\lambda}), \tag{18}$$

ceea ce revine la a spune că λ_V și T sînt coliniari. Acest rezultat generalizează rezultatele obținute de Lawden privind transferul în vid.
6) În lungul arcului de tracțiune variabilă obținem

$$\frac{(\bar{\lambda}_V \bar{V})}{V} - m\frac{\lambda_m}{c} = 0. \tag{19}$$

APLICAȚIE LA CAZUL REINTRĂRII VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN ATMOSFERĂ

Să considerăm cu aceeași origine O în centrul de masă al vehiculului, a sistemului definit de versorii $\bar{r}^*$, $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\psi}^*$, sistemul legat de viteză definit de versorii $\bar{\tau}^*$, $\bar{n}^*$, $\bar{k}^*$, în care $\bar{\tau}^*$ este în direcția tangentei la traiectorie coincizînd cu direcția vitezei, $\bar{n}^*$ pe normala la traiectorie și $\bar{k}^*$ normal pe planul conținînd versorii τ^*, n^* [1].

Proiecțiile vectorului viteză V în direcțiile ψ^*, φ^*, r^* sînt

$$V_\psi = V\cos\theta\cos\eta;\ V_\varphi = V\cos\theta\sin\eta,\ V_r = V\sin\theta. \tag{20}$$

Considerăm vectorii de componente

$$\begin{gathered}\bar{r} = (r^1, r^2, r^3);\ \bar{V} = (V_\psi, V_\varphi V_r);\ \bar{\lambda}_r = (\lambda_r^1, \lambda_r^2, \lambda_r^3),\\ \bar{\lambda}_V = (\lambda_V^1,\ \lambda_V^2,\ \lambda_V^3);\ \bar{A} = (A_\psi,\ A_\varphi,\ A_r).\end{gathered} \tag{21}$$

Pentru ca transformarea (20) să fie canonică, Hamiltonianul trebuie să rămînă invariant. Așadar este satisfăcută:

$$\lambda_V^1\,\mathrm{d}V_\psi + \lambda_V^2\,\mathrm{d}\,V_\varphi + \lambda_V^3\,\mathrm{d}V_r = \lambda_V^V\,\mathrm{d}\,V + \lambda_V^\theta\,\mathrm{d}\,\theta + \lambda_V^\eta\,\mathrm{d}\eta, \tag{22}$$

unde prin λ_V^V, λ_V^θ, λ_V^η am notat noile componente ale lui λ_V obținute prin transformarea (20).
Avem

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V_r &= \sin\theta\,\mathrm{d}\,V + V\cos\theta\,\mathrm{d}\,\theta,\\ \mathrm{d}V_\varphi &= \cos\theta\sin\eta\,\mathrm{d}\,V - V\sin\theta\sin\eta\,\mathrm{d}\,\theta + V\cos\theta\cos\eta\,\mathrm{d}\eta,\\ \mathrm{d}V_\psi &= \cos\theta\cos\eta\,\mathrm{d}\,V - V\sin\theta\cos\eta\,\mathrm{d}\,\theta - V\cos\theta\sin\eta\,\mathrm{d}\,\eta.\end{aligned} \tag{23}$$

Introducînd expresiile (23) în (22) se obţine

$$(\lambda_V^1 \cos\theta\cos\eta + \lambda_V^2 \cos\theta \sin\eta + \lambda_V^3 \sin\theta)\,\mathrm{d}V +$$

$$+ V(-\lambda_V^1 \sin\theta\cos\eta - \lambda_V^2 \sin\theta\sin\eta + \lambda_V^3 \cos\theta)\times$$

$$\times\,\mathrm{d}\theta + V(-\lambda_V^1 \cos\theta\sin\eta + \lambda_V^2 \cos\gamma\cos\eta)\,\mathrm{d}\eta = \lambda_V^V\,\mathrm{d}V + \quad (24)$$

$$+ \lambda_V^\theta\,\mathrm{d}\theta + \lambda_V^\eta\,\mathrm{d}\eta,$$

ceea ce conduce la

$$\lambda_V^1 \cos\theta\cos\eta + \lambda_V^2 \cos\theta\sin\eta + \lambda_V^3 \sin\theta = \lambda_V^V,$$

$$-\lambda_V^1 \sin\theta\cos\eta - \lambda_V^2 \sin\theta\sin\eta + \lambda_V^3 \cos\theta = \frac{1}{V}\lambda_V^\theta, \quad (25)$$

$$-\lambda_V^1 \cos\theta\sin\eta + \lambda_V^2 \cos\theta\cos\eta = \frac{1}{V}\lambda_V^\eta.$$

Sistemul (25) poate fi scris sub forma matriceală

$$B \times P = \bar{P}, \quad (26)$$

de unde rezultă soluţia

$$P = B^{-1}\bar{P}, \quad (27)$$

în care am notat

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\eta & \cos\theta\sin\eta & \sin\theta \\ \sin\theta\cos\eta & \sin\theta\sin\eta & \cos\theta \\ \cos\theta\sin\eta & \cos\theta\cos\eta & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$P = \begin{bmatrix} \lambda_V^1 \\ \lambda_V^2 \\ \lambda_V^3 \end{bmatrix} \qquad \bar{P} = \begin{bmatrix} \lambda_V^V \\ \frac{1}{V}\lambda_V^\theta \\ \frac{1}{V}\lambda_V^\eta \end{bmatrix}$$

Rezultă, efectuînd calculele,

$$\lambda_V^2 = (\lambda_V^1)^2 + (\lambda_V^2)^2 + (\lambda_V^3)^2 = (\lambda_V^V)^2 + \frac{1}{V^2}(\lambda_V^\theta)^2 + \frac{1}{V^2\cos^2\theta}(\lambda_V^\eta)^2 \quad (29)$$

și

$$\bar{\lambda}_V \bar{V} = \lambda_V^1 V_\psi + \lambda_V^2 V_\varphi + \lambda_V^3 V_r = V \lambda_V^V. \tag{30}$$

În funcție de componentele accelerațiilor a_r, a_φ, a_ψ din sistemul $\bar{r}^*$, $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\psi}^*$, componentele a_τ, a_n, a_k în sistemul $\bar{\tau}^*$, $\bar{n}^*$, $\bar{k}^*$ vor trebui exprimate. Pentru aceasta trebuie exprimați cosinușii directori ai sistemului $\bar{\tau}^*$, $\bar{n}^*$, $\bar{k}^*$ în raport cu sistemul $\bar{r}^*$, $\bar{\varphi}^*$, $\bar{\psi}^*$. Consinușii directori se pot exprima astfel:

$$\cos(\bar{\tau}^*, \bar{r}^*) = \sin\theta;\ \cos(\bar{n}^* \cdot \bar{r}^*) = \cos\theta;\ \cos(\bar{k}^*, \bar{r}^*) = 0, \tag{31}$$

$$\cos(\bar{\tau}^*, \bar{\varphi}^*) = \cos\theta \sin\eta;\ \cos(\bar{n}^*, \bar{\varphi}^*) = -\sin\theta \sin\eta;\ \cos(\bar{k}^*, \bar{\varphi}^*) = \cos\eta,$$

$$\cos(\bar{\tau}^*, \bar{\psi}^*) = \cos\theta \cos\eta;\ \cos(\bar{n}^*, \bar{\psi}^*) = -\sin\theta \cos\eta;\ \cos(\bar{k}^*, \bar{\psi}^*) = -\sin\eta,$$

cu ajutorul cărora se observă că avem

$$\begin{aligned} A_r \sin\theta + A_\varphi \cos\theta \sin\eta + A_\psi \cos\theta \cos\eta &= -D, \\ A_r \cos\theta - A_\varphi \sin\theta \sin\eta - A_\psi \sin\theta \cos\eta &= L\cos\gamma, \\ A_\varphi \cos\eta - A_\psi \sin\eta &= L\sin\gamma. \end{aligned} \tag{32}$$

Potrivit ipotezei că unghiul de banc este optim, avem, utilizînd relațiile (23):

$$\lambda_V^\theta (A_\psi \sin\eta - A_\varphi \cos\eta) - \left(\frac{\lambda_V^\eta}{\cos\theta}\right)[(A_\psi \cos\eta + A_\varphi)\sin\theta - A_r \cos\theta] = 0. \tag{33}$$

Ținînd seama de (32) relația (33) devine

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lambda_V^\eta}{\lambda_V^\theta \cos\theta}. \tag{34}$$

Putem scrie, folosind (30),

$$\bar{\lambda}\,\bar{V} = \lambda\, V \cos\varepsilon = V\, \lambda_V^V. \tag{35}$$

Rezultă

$$\lambda^2 = (\lambda_V^V)^2 \cos^2\varepsilon. \tag{36}$$

Din (29) și (34) se obține

$$\lambda^2 = (\lambda_V^V)^2 + \left(\frac{\lambda_V^\theta}{V}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_V^\theta}{V}\right)^2 \operatorname{tg}^2\gamma. \tag{37}$$

Identificînd cele două expresii obținute pentru λ^2, avem

$$\frac{(\lambda_V^V)^2}{\cos^2 \varepsilon} = (\lambda_V^V)^2 + \frac{(\lambda_V^\theta)^2}{V^2 \cos^2 \gamma} \tag{38}$$

Din (38) deducem

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda_V^\theta}{V \lambda_V^V \cos \gamma}. \tag{39}$$

Așadar din (14) rezultă

$$2k C_L = \frac{\lambda_V^\theta}{V \lambda_V^V \cos \gamma}. \tag{40}$$

ANALIZA TRAIECTORIILOR OPTIME

Într-un sistem de referință avînd ca origine centrul Pămîntului, în [1] s-au dedus ecuațiile de mișcare pentru un vehicul spațial acționat de forța de propulsie T dirijată pe direcția vectorului viteză :

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{1}{m}(T - D) - g \sin \theta, \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{L}{mV}\cos \gamma - \frac{1}{V}\left(g - \frac{V^2}{r}\right)\cos \theta, \\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{L}{m\, V \cos \theta} \sin \gamma - \frac{V}{r} \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \theta \cos \eta, \\
\frac{dm}{dt} &= -\frac{T}{c}, \\
\frac{d\psi}{dt} &= \frac{V}{r} \cos \theta \frac{\cos \eta}{\cos \varphi}, \\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{V}{r} \cos \theta \sin \eta, \\
\frac{dr}{dt} &= V \sin \theta.
\end{aligned} \tag{41}$$

Hamiltonianul devine în acest caz

$$H = \lambda_r^1 \frac{V}{r}\cos\theta\frac{\cos\eta}{\cos\varphi} + \lambda_r^2 \frac{V}{r}\cos\theta\sin\eta + \lambda_r^3 V\sin\theta + \lambda_V^V\left(-\frac{D}{m} + g\sin\theta\right) +$$

$$+ \lambda_V^\theta\left[\frac{L}{mV}\cos\gamma - \frac{1}{V}\left(g - \frac{V^2}{r}\right)\cos\theta\right] +$$

$$+ \lambda_V^\eta\left[\frac{L}{m\,V\cos\theta}\sin\gamma - \frac{V}{r}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta\right] + \frac{T}{m}\left(\lambda_V^V - m\frac{\lambda_m}{c}\right). \quad (42)$$

În lungul traiectoriei optimale cu portanţă variabilă şi unghi de control dat de relaţiile (34) şi (40) precum şi expresiile (2), (3) ale forţelor aerodinamice utilizînd (4) hamiltonianul (42) devine

$$H = \left(\lambda_r^1\frac{\cos\eta}{\cos\varphi} + \lambda_r^2\sin\eta\right)\frac{V}{r}\cos\theta + \lambda_r^3 V\sin\theta + g\left(\lambda_V^V\sin\theta - \lambda_V^\theta\frac{1}{V}\cos\theta\right) +$$

$$+ \left(\lambda_V^\theta\frac{V}{r}\cos\theta - \lambda_V^\eta\frac{V}{r}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta\right) + \frac{T}{m}\left(\lambda_V^V - \frac{m\,\lambda_m}{c}\right) +$$

$$+ \frac{\rho}{2m}SV^2\lambda_V^V(k\,C_L^2 - C_{D_0}) \quad (43)$$

Cînd raportul portanţă-rezistenţă este maxim, avem

$$\varkappa = \sqrt{\frac{k}{C_{D_0}}}\,C_L = 1, \quad (44)$$

de unde rezultă

$$kC_L^2 - C_{D_0} = 0. \quad (45)$$

Analizînd expresia hamiltonianului (43) se observă că funcţia de comutaţie (9) devine

$$\sigma = \lambda_V^V - m\frac{\lambda_m}{c}, \quad (46)$$

care defineşte valorile forţei de tracţiune date de (10).
Hamiltonianul (43) poate fi scris sub forma

$$H = \Lambda f, \quad (47)$$

unde am notat

$$\Lambda = (\lambda_r^1, \lambda_r^2, \lambda_r^3, \lambda_V^V, \lambda_V^\theta, \lambda_V^\eta, \lambda_m), \tag{48}$$

$$f = (f_1, f_2, \ldots f_7),$$

iar $f_i (i = 1, \ldots 7)$ sînt funcţii ale variabilelor de stare

$$f_1 = \frac{V}{r}\frac{\cos\eta\cos\theta}{\cos\varphi}; \quad f_2 = \frac{V}{r}\sin\eta\cos\theta; \quad f_3 = V\sin\theta,$$

$$f_4 = g\sin\theta + \frac{\rho}{2m}SV^2(kC_L^2 - C_{D_0}) + \frac{T}{m}, \tag{49}$$

$$f_5 = -\frac{g}{V}\cos\theta + \frac{V}{r}\cos\theta,$$

$$f_6 = -\frac{V}{r}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta, \; f_7 = -\frac{T}{c}.$$

Sistemul adjunct se scrie sub forma

$$\dot{\lambda}^T = -\Lambda\nabla f. \tag{50}$$

Dezvoltînd calculele, (50) devine

$$\dot{\lambda}_r^1 = 0,$$

$$\dot{\lambda}_r^2 = -\lambda_r^1\frac{V}{r}\cos\theta\cos\eta\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} + \lambda_V^\eta\frac{V}{r}\cos^2\theta\cos\eta\frac{1}{\cos^2\varphi},$$

$$\dot{\lambda}_r^3 = \lambda_r^1\frac{V}{r^2}\cos\theta\frac{\cos\eta}{\cos\varphi} + \lambda_r^2\frac{V}{r^2}\sin\eta\cos\theta + \lambda_V^V\frac{\beta\rho SV^2}{2m}(kC_L^2 - C_{D_0}) +$$

$$+ \lambda_V^\theta\frac{V}{r^2}\cos\theta - \lambda_V^\eta\frac{V}{r^2}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta,$$

$$\dot{\lambda}_V^V = -\lambda_r^1\frac{1}{r}\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}\cos\theta - \lambda_r^2\frac{1}{r}\sin\eta\cos\theta - \lambda_r^3\sin\theta -$$

$$-\lambda_V^V\frac{\rho SV}{m}(kC_L^2 - C_{D_0}) - \lambda_V^\theta\left[\frac{g}{V^2}\cos\theta + \frac{1}{r}\cos\theta\right] + \lambda_V^\eta\frac{1}{r}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta, \tag{51}$$

$$\dot{\lambda}_V^\theta = \lambda_r^1 \frac{V}{r} \frac{\cos\eta}{\cos\varphi} \sin\theta + \lambda_r^2 \frac{V}{r} \sin\eta \sin\theta - \lambda_r^3 V \cos\theta -$$

$$- \lambda_V^V g \cos\theta - \lambda_V^\theta \left(\frac{g}{V} \sin\theta - \frac{V}{r} \sin\theta \right) - \lambda_V^\eta \left(2 \frac{V}{r} \operatorname{tg}\varphi \cos\theta \sin\theta \cos\eta \right),$$

$$\dot{\lambda}_V^\eta = \lambda_r^1 \frac{V}{r} \frac{\sin\eta}{\cos\varphi} \cos\theta - \lambda_r^2 \frac{V}{r} \cos\eta \cos\theta - \lambda_V^\eta \frac{V}{r} \operatorname{tg}\varphi \cos^2\theta \sin\eta,$$

$$\dot{\lambda}_m = \lambda_V^V \frac{1}{m^2} \left[\frac{\rho}{2} S V^2 (k C_L^2 - C_{D_0}) + T \right]. \tag{51}$$

Din ultima ecuație (51) se deduce

$$m \frac{\mathrm{d}\lambda_m}{\mathrm{d}t} = (k C_L^2 - C_{D_0}) \frac{\rho S V^2 \lambda_V^V}{2m} + \frac{T}{m} \lambda_V^V. \tag{52}$$

Dar avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\lambda_m m) = m \frac{\mathrm{d}\lambda_m}{\mathrm{d}t} + \lambda_m \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}. \tag{53}$$

Rezultă

$$m \frac{\mathrm{d}\lambda_m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m \lambda_m) + \lambda_m \frac{T}{c}. \tag{54}$$

Din (52) și (54) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m \lambda_m) = (k C_L^2 - C_{D_0}) \frac{\rho S V^2 \lambda_V^V}{2m} + \frac{T}{m} \left(\lambda_V^V - \frac{m \lambda_m}{c} \right). \tag{55}$$

În cazul cînd raportul portanță-rezistență este maxim, de-a lungul arcelor pe care $T = 0$ sau T este variabil, deci funcția de comutație σ este nulă, se obține

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (m \lambda_m) = 0, \tag{56}$$

de unde rezultă că pe arcele $T = 0$ și $T = T(t)$, în condițiile raportului maxim portanță-rezistență, avem

$$m \lambda m = \text{const} = C_1. \tag{57}$$

De asemenea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V\lambda_V^V) = V\frac{\mathrm{d}\lambda_V^V}{\mathrm{d}t} + \lambda_V^V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = V\Bigg[-\lambda_r^1\frac{1}{r}\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}\cos\theta - \lambda_r^2\frac{1}{r}\sin\eta\cos\theta -$$

$$-\lambda_r^3\sin\theta - \lambda_V^V\frac{\rho S V}{m}(k\,C_L^2 - C_{D_0}) - \lambda_V^\theta\left(\frac{g}{V^2}\cos\theta + \right. \tag{58}$$

$$\left. + \frac{1}{r}\cos\theta\right) + \lambda_V^\eta\frac{1}{r}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta\Bigg] + \lambda_V^V\left[\frac{1}{m}(T-D) - g\sin\theta\right]$$

sau, ţinînd seama de expresia hamiltonianului,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V\lambda_V^V) = -H - 2\,\lambda_V^\theta\frac{g}{V}\cos\theta + \frac{T}{m}\left(\lambda_V^V - \frac{m\,\lambda_m}{c}\right) -$$

$$-\lambda_V^V\left(\frac{D}{m} + g\sin\theta\right). \tag{59}$$

Presupunînd că ne situăm pe porţiunea de traiectorie pe care $T = 0$ şi $T = T(t)$, rezultă că

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V\,\lambda_V^V) = -H - 2\,\lambda_V^\theta\frac{g}{V}\cos\theta - \lambda_V^V\left(\frac{D}{m} + g\sin\theta\right). \tag{60}$$

Din ecuaţiile (3) şi (4) ale sistemului diferenţial (51) avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\lambda_r^3) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V\,\lambda_V^V) = \lambda_V^V\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - g\,\lambda_V^\theta\frac{1}{V}\cos\theta. \tag{61}$$

Presupunînd că ne situăm în cazul zborului planat din $T = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\lambda_r^3) - H - 2\,\lambda_V^\theta\frac{g}{V}\cos\theta - \lambda_V^V\left(\frac{D}{m} + g\sin\theta\right) =$$

$$= -\lambda_V^V\left(\frac{D}{m} + g\sin\theta\right) - \lambda_V^\theta\frac{g}{V}\cos\theta \tag{62}$$

sau

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\lambda_r^3) = H + \lambda_V^\theta\frac{g}{V}\cos\theta. \tag{63}$$

Neglijînd termenii gravitaţionali în raport cu forţele aerodinamice, expresia (63) devine

$$r\lambda_r^3 = H\,t + C_2. \tag{64}$$

Condiţiile de transversalitate pot fi scrise

$$\left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} - \lambda\right]^T \mathrm{d}x + \left[H(x,\lambda,t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\right]\mathrm{d}t\Big|_{t=t_f} = 0, \tag{65}$$

unde am notat cu $S(x, t)$ indicele de performanţă.

Se observă că în cazul timpului liber şi a variabilelor de stare fixate $x_i(t_f) = x_i^1$, relaţia (65) devine

$$H = 0, \tag{66}$$

astfel încît din (64) rezultă

$$r\,\lambda_r^3 = C_2. \tag{67}$$

Considerăm cazul intrării în atmosferă la unghiuri mici. Pentru zborul planat, deci de-a lungul arcului $T = 0$, în [1] s-a demonstrat că

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{D}{m} + g\sin\theta = -\frac{1}{2}\left(\frac{C_D S}{m}\right)\rho V^2 + g\sin\theta \cong -\frac{1}{2}\left(\frac{C_D S}{m}\right)\rho V^2. \tag{68}$$

Analizăm traiectoria de-a lungul căreia obţinem acceleraţie maximă. Avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right) = 0, \tag{69}$$

ceea ce revine la

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(\rho V^2) = 0, \tag{70}$$

de unde

$$\frac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{V^2}{\rho}. \tag{71}$$

Din ecuaţia (68) rezultă

$$\frac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}\rho} \cong \left(\frac{C_D S}{m\beta}\right)\frac{V^2}{\sin\theta} \tag{72}$$

sau

$$\left(\frac{C_D S}{m\beta}\right) \rho \cong \sin \theta, \tag{73}$$

care este condiţia de maxim a acceleraţiei.

Deci pentru unghiuri mici de intrare, dacă neglijăm termenii gravitaţionali în raport cu forţele aerodinamice, ecuaţia (60) poate fi scrisă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V\lambda_V^V) = -H \tag{74}$$

sau integrînd

$$V\lambda_V^V = -Ht + C_3. \tag{75}$$

Pentru timpul final neprecizat rezultă

$$V\,\lambda_V^V = C_3. \tag{76}$$

Analizăm cea de-a treia ecuaţie din (51). Termenul este un parametru mic, astfel încît

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_r^3}{\mathrm{d}t} = \lambda_V^V \frac{\beta \rho S V^2}{2m}(kC_L^2 - C_{D_0}). \tag{77}$$

De-a lungul arcului $T = 0$ avem

$$\frac{\mathrm{d}\,\lambda_m}{\mathrm{d}\,t} = \lambda_V^V \frac{1}{m^2}\frac{\rho S V^2}{2}(k\,C_L^2 - C_{D_0}) \tag{78}$$

sau

$$\mathrm{d}\,\lambda_r^3 = \beta\,\mathrm{d}\,(m\,\lambda_m), \tag{79}$$

de unde

$$\lambda_r^3 = \beta\, m\, \lambda_m + C_4\,. \tag{80}$$

Pentru cazul cînd ne situăm pe arcul pe care raportul portanţă-rezistenţă este maxim, avem, evident, $\dot{\lambda}_r^3 = \dot{\lambda}_m = 0$. De asemenea, ţinînd seama că $\frac{V}{r}$ este parametru mic, rezultă

$$\dot{\lambda}_r^2 = 0. \tag{81}$$

Utilizînd ipoteza parametrului mic, expresia (43) hamiltonianului devine

$$H = \lambda_r^3\, V \sin\,\theta + g\left(\lambda_V^V \sin\,\theta - \lambda_V^\theta \frac{1}{V}\cos\,\theta\right) + \frac{\rho}{2m} SV^2\,\lambda_V^V\,(kC_L^2 - C_{D_0}). \tag{82}$$

Pentru timpul final liber, $H = 0$, deci ținînd seama de (77); putem scrie

$$\frac{d\lambda_r^3}{dt} = -\beta\,\lambda_r^3\,V\sin\theta - \beta\,g\left(\lambda_V^V\sin\theta - \lambda_V^\theta\frac{1}{V}\cos\theta\right). \tag{83}$$

Utilizînd ipoteza neglijării termenilor gravitaționali,

$$\frac{d\lambda_r^3}{dt} = -\beta\,\lambda_r^3\frac{dr}{dt}, \tag{84}$$

sau considerînd legea de variație a densității atmosferice $\rho = \rho_0\,e^{-\beta r}$, rezultă

$$\lambda_r = C_5\rho. \tag{85}$$

Din (77) deducem

$$V\,\lambda_V^V = \frac{2\,C_5\,m\sin\theta}{S\,(C_{D_0} - K\,C_L^2)}. \tag{86}$$

Ținînd seama de expresia (76), avem

$$\frac{kC_L^2}{C_{D_0}} = 1 - 2C_5\,m\sin\theta/SC_3\,C_{D_0}. \tag{87}$$

Deoarece în cazul $T = 0$, $m = \text{const.}$, din (87) se obține

$$\chi^2 = 1 + p\sin\theta, \tag{88}$$

unde p este o constantă.

Se observă că pentru $\theta = 0$ se găsește raportul portanță-rezistență maxim. De asemenea, din relația (26) avem

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lambda_V^\eta}{\lambda_V^\theta\cos\theta}. \tag{89}$$

Utilizînd relațiile (40) și (76), expresia (89) devine

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\lambda_V^\eta}{2kC_3\,C_L\cos\gamma\cos\theta}. \tag{90}$$

Dacă ținem seama că $\frac{V}{r}$ este un parametru mic, rezultă din (51)

$$\lambda_V^\eta = \text{const.} = C_6, \tag{91}$$

astfel încît unghiul de banc este dat de formula

$$\sin \gamma = \frac{q}{\chi \cos \theta}, \tag{92}$$

unde q este o constantă.

Constantele p şi q se determină din condiţiile iniţiale şi finale impuse la originea, respectiv extremitatea arcului.

Presupunem că ne situăm pe arcul de tracţiune intermediară. Pentru analiza traiectoriei optime, în cazul cînd traiectoria conţine porţiuni pe care $0 < T < T_{max}$, deci pe care $\sigma = 0$, se impune studiul derivatei $\dot{\sigma}|_{\sigma=0}$. Avem

$$\dot{\sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_V^V - m\frac{\lambda_m}{c}\right). \tag{93}$$

Dacă traiectoria optimă conţine porţiuni pe care $0 < T < T_{max}$, atunci pe aceste intervale $\sigma \equiv 0$, astfel că

$$\dot{\sigma}\,|_{\sigma=0} = 0.$$

Avem, utilizînd relaţia (55),

$$\dot{\sigma} = \dot{\lambda}_V^V - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\lambda_m) = \dot{\lambda}_V^V - \frac{1}{c}\left[(kC_L^2 - C_{D_0})\frac{\rho S V^2 \lambda_V^V}{2\,m} + \frac{T}{m}\sigma\right], \tag{94}$$

astfel încît, presupunînd intrarea la unghiuri mici, se obţine

$$\dot{\sigma}|_{\sigma=} = -\frac{\rho S V \lambda_V^V}{2m}(kC_L^2 - C_{D_0})\left(2 + \frac{V}{c}\right). \tag{95}$$

Ţinînd seama de ipoteza făcută din (51), rezultă

$$\lambda_V^V = \frac{1}{C}\mathrm{e}^{-\int \frac{\rho S V}{m}(kC_L^2 - C_{D_0})}. \tag{96}$$

Pentru vehiculele portante, $\chi = kC_L^2|\,C_{D_0} > 1$. Aşadar semnul expresiei (95) depinde de semnul lui $\lambda_V^V(t)$.

Pentru a face o evaluare a valorii λ_V^V, să observăm că

$$\dot{\sigma}|_{\sigma=0} = \dot{\sigma}|_{T=0}. \tag{97}$$

Am arătat că pentru unghiuri mici de intrare și la $T = 0$ este satisfăcută relația (68), astfel încît avem

$$\lambda_V^V = \frac{1}{C} e^{\ln V^2 \frac{\chi+1}{\chi-1}} \tag{98}$$

sau, abstracție făcînd de o constantă, se poate scrie

$$\lambda_V^V = V^{2\frac{\chi+1}{\chi-1}}. \tag{99}$$

Rezultă că pentru cazul studiat

$$\dot{\sigma}\,|_{\sigma=0} = AV^{2k_1+1} + BV^{2k_2}, \tag{100}$$

unde k_1, k_2 sînt numere reale, iar A și B constante.

Potrivit observației anterioare pe porțiunea de traiectorie $0 < T < T_{max}$, $\dot{\sigma}\,|_{\sigma=0} = 0$, astfel încît trebuie să avem

$$C_{D_0} = kC_L^2 \text{ pe } \{\Gamma\}. \tag{101}$$

Deci pe porțiunea în care tracțiunea este intermediară, raportul portanță-rezistență este maxim. Rezultă că, admițînd legea (99) valabilă, putem scrie

$$\begin{aligned} &\dot{\sigma}\,|_{\sigma=0} < 0 \text{ în } D_1 = \{\chi > 1\}, \\ &\dot{\sigma}\,|_{\sigma=0} = 0 \text{ pe } \Gamma = \{\chi = 1\}, \\ &\dot{\sigma}\,|_{\sigma=0} > 0 \text{ în } D_2 = \{\chi < 1\}. \end{aligned} \tag{102}$$

Cum T este funcție continuă, înseamnă că în D_1 va fi descrescătoare și se va anula cel mult o dată.

Sînt posibile mai multe cazuri.

1) I, $F \in D_1$, unde I și F simbolizează starea inițială, respectiv finală. Atunci, ținînd seama că σ este o funcție descrescătoare, vom putea avea stările admisibile

$$D_1 \begin{cases} T_{max} \to 0, \\ T_{max} \to T(t) \to 0. \end{cases} \tag{103}$$

2) I, $F \in D_2$.

Aceasta corespunde situației cînd funcția σ este crescătoare astfel încît putem avea secvențe de arce

$$D_2 \begin{cases} 0 \to T(t), \\ 0 \to T(t) \to T_{max}. \end{cases} \tag{104}$$

3) $I, F \in \Gamma$

$$0 < T < T_{max}. \tag{105}$$

Se observă că în cazul $\sigma = 0$, hamiltonianul H nu este dependent în mod explicit de tracțiunea T, iar mărimea acesteia nu este determinată de condiția necesară a lui Weierstrass. Porțiunile unei soluții a ecuațiilor Euler-Lagrange pentru care $\sigma = 0$ într-un interval de timp finit sînt cunoscute ca subarcuri singulare.

Posibilitatea apariției subarcelor singulare este însoțită de o dificultate analitică apreciabilă. Nu există o metodă generală definitivă, disponibilă, pentru a determina aceste subarcuri. O contribuție importantă privind aceasta este oferită de către Mielle care utilizează în acest sens formula lui Green.

CONCLUZII

Studiul întreprins are drept scop să trateze dificila problemă a cazului tridimensional al reintrării în atmosferă. Cercetările anterioare [1], [2] ,[3], [6] au tratat problema plană a mișcării în ipoteza simplificatoare a intrării la unghiuri mici și în absența forței de propulsie. Datorită dificultății obținerii unor soluții analitice se utilizează ca mod de tratare integralele prime ale mișcării. Prezența forței propulsoare introduce arce singulare în traiectoriile optime. Existența lor se semnalează doar fără a insista asupra acestora. Printre rezultatele obținute se regăsesc și acelea obținute de Griffin, Vinh, Speyer și Womble.

Primită la redacție la 12 noiembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPESCU, *Contribuții la optimizarea intrării vehiculelor spațiale în atmosferă*, Teză de doctorat, Facultatea de matematică, 1978.
2. M. POPESCU — *Some isoperimetric problems related to the entry of space vehicules, equipped with rocket, into the planetary atmosphere*, St. cerc. matem., **31**, 5 (1979).
3. M. POPESCU, *Sur la stabilité de la pénétration optimale des vehicules spatiaux en atmosphère*, Rev. roum. math., **39**, 2 (1980).
4. J. SPEYER, M. WOMBLE, *Approximate Optimal Re—Entry Trajectories*, AIAA Paper 71—919, 1971.
5. N. X. VINH, *General Theory of Optimal Trajectory for Rocket Flight in a Resisting Medium Journal of Optimization Theory and Applications*, **11**, 2 (1973).
6. W. T. LOH, *Entry Mechanics and Dynamics Re-Entry and Planetary Entry Physics and Technology*, Springer-Verlag, New York, 1968.
7. J. GRIFFIN, N. X. VINH, *Three Dimensional Optimal Maneuvers of Hypervelocity Vehicles*, AIAA Paper 71—920, New York, 1971.

STUDIUL CÎMPULUI DE TEMPERATURI ÎN CAZUL UNEI MIȘCĂRI NESTAȚIONARE A FLUIDELOR VÎSCOASE

de OVIDIU BADEA, VICTOR HOFFMANN, MIRCEA LUPU
Universitatea din Brașov

În lucrare se studiază mișcarea nestațională a unui fluid vîscos, între doi cilindri coaxiali, determinată de rotația nestațională a acestora. Se determină apoi cîmpul de temperatură în fluidul antrenat de rotire nestațională a cilindrilor. De asemenea, se pun în evidență și cîteva cazuri particulare

1. Să studiem mișcarea nestațională a unui fluid vîscos, incompresibil, între doi cilindri coaxiali, determinată de rotația acestora.

Ecuațiile de mișcare ale fluidului vîscos incompresibil, date de Navier-Stokes [1], față de un sistem de axe inerțial Ox_i $(i = 1, 2, 3)$, în absența forțelor masice, sînt

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

unde componentele vitezei sînt v_i $(i = 1, 2, 3)$, p fiind presiunea, ρ densitatea și μ vîscozitatea fluidului; ρ, μ (constante). Fluidul fiind incompresibil, ρ este constant și ecuația de continuitate devine

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \tag{2,}$$

Să considerăm doi cilindri circulari drepți, de raze $r_1 < r_2$, coax ia pe axa $Ox_3 = Oz$, paralelă deci cu generatoarele.

Cilindrii se rotesc în jurul axei Oz, cu vitezele $r_i\omega_i(t)$ $(i = 1, 2)$ unde $\omega_i(t)$ sînt funcții continue și derivabile, date pentru timpul $t \geqslant 0$; fluidul fiind vîscos, aderă la suprafața cilindrilor și este antrenat într-o mișcare plană.

Trecînd la coordonatele cilindrice polare (r, θ, z), componentele vitezei vor fi $v_r = v_z = 0$, $v_\theta = v(t, r)$ și ecuațiile de mișcare (1), folosind ecuația de continuitate (2), devin [1]

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{v^2}{r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Condițiile inițiale și la limită vor fi, respectiv,

$$v(t=0, r) = v_0(r)\,;\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \tag{5}$$

$$v(t, r_1) = r_1\,\omega_1(t)\,;\ v(t, r_2) = r_2\,\omega_2(t),\ t > 0, \tag{6}$$

unde $v_0(r)$ este o funcție dată continuă, cu $v_0(r_1) = r_1\,\omega_1^0$, $v_0(r_2) = r_2\,\omega_2^0$, unde $\omega_i(0) = \omega_i^0 (i = 1, 2)$.

În determinarea funcției $v(t, r)$ avem de rezolvat, pentru ecuația parabolică (3), problema la limită în coroana circulară cu condițiile (5), (6). Făcînd transformarea

$$v(t, r) = \frac{r_2^2\omega_2 - r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\,r - \frac{r_1^2 r_2^2\,(\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}\,\frac{1}{r} + u(t, r), \tag{7}$$

atunci $u\ (t, r)$ trebuie să fie soluția problemei

$$\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) - \rho\,\frac{r_2^2\omega_2' - r_1^2\omega_1'}{r_2^2 - r_1^2}\,r + \rho\,\frac{r_1^2 r_2^2(\omega_2' - \omega_1')}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r} \tag{3'}$$

$$u(0, r) = v_0(r) - \frac{r_2^2\omega_2^0 - r_1^2\omega_1^0}{r_2^2 - r_1^2}\,r + \frac{r_1^2 r_2^2(\omega_2^0 - \omega_1^0)}{r_2^2 - r_1^2}\,\frac{1}{r} = u_0(r), \tag{5'}$$

$$u_1(t, r_1) = 0,\ u(t, r_2) = 0 \ \text{ unde } \ \omega' = \frac{d\omega}{dt},\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2. \tag{6'}$$

Căutăm soluția problemei (3'), (5') (6') de forma

$$u(t, r) = u_1(t, r) + u_2(t, r), \tag{8}$$

unde pentru u_1 și u_2 avem de rezolvat următoarele probleme :

$$\rho\,\frac{\partial u_1}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2}\right), \tag{9}$$

$$u_1(0, r) = u_0(r),\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \tag{10}$$

$$u_1(t, r_1) = 0,\ u_2(t, r_2) = 0, \tag{11}$$

$$\rho\,\frac{\partial u_2}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2}\right) - \rho\,\frac{r_2^2\omega_2' - r_1^2\omega_1'}{r_2^2 - r_1^2}\,r + \rho\,\frac{r_1^2 r_2^2(\omega_2' - \omega_1')}{r_2^2 - r_1^2}\,\frac{1}{r}, \tag{12}$$

$$u_2(0, r) = 0\ ;\ r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \tag{13}$$

$$u_2(t, r_1) = 0,\ u_2(t, r_2) = 0. \tag{14}$$

Folosind principiul superpoziției, pentru u_1 și u_2 observăm că aceste soluții și condiții rezolvă problema (3′) (5′) (6′).

Vom determina $u_1(t, r)$ aplicînd metoda separării variabilelor, $u_1(t, r) = f(t)\, R(r)$ și din (9) rezultă

$$\frac{\rho}{\mu}\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{r^2R'' + rR' - R}{r^2R} = -\lambda^2. \tag{15}$$

Din (15) și (11) rezultă următoarea problemă Sturm-Liouville, care admite valori proprii reale și pozitive, motiv pentru care am notat constanta din (15) cu $-\lambda^2$,

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right] + \frac{1}{r}R = \lambda^2 rR;\ R(r_1) = 0,\ R(r_2) = 0. \tag{16}$$

Facem în (16) schimbarea de variabilă $r = \frac{\xi}{\lambda}$ și vom obține ecuația

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\xi} + (\xi^2 - 1)\,R = 0. \tag{16′}$$

Soluția generală a ecuației (16) obținută din (16′) este $R(r) = A\,J_1(\lambda r) + BY_1(\lambda r)$, unde J_1 și Y_1 sînt funcțiile Bessel de prima speță și, respectiv, a doua speță și ordin 1.

Condițiile la limită din (16) devin

$$AJ_1(\lambda r_i) + BY_1(\lambda r_i) = 0 \quad (i = 1,\ 2). \tag{17}$$

Ca (17) se admită soluții nebanale este necesar și suficient ca determinantul sistemului $J_1(\lambda r_1)\, Y_1(\lambda r_2) - Y_1(\lambda r_1)\, J_1(\lambda r_2) = 0$.

Rădăcinile acestei ecuații sînt tocmai valorile proprii ale problemei (16). Pentru fiecare valoare proprie $\lambda_n (n = 1,2,\ldots.)$ putem considera soluția sistemului (17).

$$A_n = Y_1(\lambda_n r_1) + Y_1(\lambda_n r_2),\ B_n = -J_1(\lambda_n r_1) - J_1(\lambda_n r_2). \tag{18}$$

Funcțiile proprii ale problemei (16) vor fi deci

$$R_n(\lambda_n r) = A_n J_1(\lambda_n r) + B_n Y_1(\lambda_n r).$$

A doua ecuație (15), $\frac{f_n'(t)}{f_n(t)} = -\lambda_n^2 \nu$; $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, prin integrare dă $f_n(f) = \mathrm{e}^{-\nu\lambda_n^2 t}$ și deci soluția generală a problemei (9) (11) va fi

$$u_1(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mathrm{e}^{-\nu\lambda_n^2 t} \cdot R_n(\lambda_n r). \tag{19}$$

Pentru determinarea constantelor α_n vom pune condiția (10).

Din condițiile de ortogonalitate sînt adevărate condițiile de tipul integralelor Lommel [5]:

$$\int_{r_1}^{r_2} rR(\lambda_n r)\, R(\lambda_m r)\, \mathrm{d}r = \begin{cases} 0 & m = n \\ \dfrac{r_2^2 R'^2(\lambda_n r_2) - r_1^2 R'^2(\lambda_n r_1)}{2}, & m \neq n. \end{cases} \tag{20}$$

Deci din condiția (10), $u_1(0, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n R_n(\lambda_n r) = u_0(r)$ și presupunînd $u_0(r)$ dezvoltabilă în serie Fourier după funcțiile $R_n(\lambda_n r)$, atunci folosind ecuațiile (20), obținem

$$\alpha_n = \frac{2}{r_2^2 R'^2(\lambda_n r_2) - r_1^2 R'^2(\lambda_n r_1)} \int_{r_1}^{r_2} r\, u_0(r)\, R(\lambda_n r)\, \mathrm{d}r. \tag{21}$$

Pentru rezolvarea problemei (12) (13) (14) vom determina $u_2(t, r)$ folosind principiul lui Duhamel [2], [3]

$$u_2(t, r) = \int_0^t h(t - \tau, \tau, r)\, \mathrm{d}\tau, \tag{22}$$

unde $h(t, \tau, r)$ este soluția problemei

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{h}{r^2} \right),$$

$$h(0, r) = -\rho \frac{r_2^2 \omega_2'(\tau) - r_1^2 \omega_1'(\tau)}{r_2^2 - r_1^2} r + \rho \frac{r_1^2 r_2^2 [\omega_2'(\tau) - \omega_1'(\tau)]}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} = h_0(r), \tag{23}$$

$$h(t, r_1) = 0, \quad h(t, r_2) = 0.$$

Această problemă este asemănătoare cu problema (9) (10) (11) și deci

$$h(t, \tau, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\tau)\, \mathrm{e}^{-\nu\lambda_n^2 t} R_n(\lambda_n r), \tag{24}$$

$$\beta_n(\tau) = \frac{2}{r_2^2 R'^2(\lambda_n r_2) - r_1^2 R'^2(\lambda_n r_1)} \int_{r_1}^{r_2} r h_0(r)\, R(\lambda_n r)\, \mathrm{d}r. \tag{25}$$

Din relațiile (7), (8), (19) și (22), (23) obținem legea de variație a vitezei.

$$v(t, r) = \frac{r_2^2 \omega_2(t) - r_1^2 \omega_1(t)}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{r_1^2 r_2^2 [\omega_2(t) - \omega_1(t)]}{r_2^2 - r_1^2} \frac{1}{r} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\lambda_n r)\, \mathrm{e}^{-\nu\lambda_n^2 t} \left[\alpha_n + \int_0^t \beta_n(\tau)\, \mathrm{e}^{\nu\lambda_n^2 \tau}\, \mathrm{d}\tau \right]. \tag{26}$$

Cazuri particulare. a) Observăm că dacă ω_1 și ω_2 sînt mărimi constante atunci $\beta_n = 0$, iar $t \to \infty$ mișcarea se stabilizează obținînd soluția pentru mișcarea staționară fluidului vîscos între cei doi cilindrii [1]

$$v(r) = \frac{r_2^2\,\omega_2 - r_1^2\omega_1}{r_2^2 - r_1^2}\,r - \frac{r_1^2 r_2^2[\omega_2 - \omega_1]}{r_2^2 - r_1^2}\,\frac{1}{r}. \tag{26'}$$

b) Dacă $r_1 \to 0$, $v(t, r_1) = v(t, 0) = 0$, se obține mișcarea fluidului în interiorul cilindrului $0 \leqslant r < r_2$; deoarece $J_1(0) = 0$, în sistemul (17) $B = 0$, iar ecuația care dă valorile proprii este $J_1(\lambda r_2) = 0$ și funcțiile proprii devin $R(\lambda_n r) = J_1(\lambda_n r)$. Din (21) rezultă

$$\alpha_n = \frac{2}{r_2^2[J_1'(\lambda_n r_2)]^2}\int_0^{r_2} r u_0(r)\, J_1(\lambda_n r)\,\mathrm{d}r, \tag{21'}$$

unde din (5') $u_0(r) = v_0(r) - \omega_2^0 r$; de asemenea din (25) obținem

$$\beta_n(\tau) = -\frac{2\rho\omega_2'(\tau)}{[r_2 J_1'(\lambda_n r_2)]^2}\int_0^{r_2} r^2 J_1(\lambda_n r)\,\mathrm{d}r. \tag{25'}$$

Soluția problemei (26) devine în acest caz

$$v(t, r) = \omega_2(t)\, r + \sum_{n=1}^{\infty} J_1(\lambda_n r)\, \mathrm{e}^{-\nu\lambda_n^2}\left[\alpha_n - \int_0^t \beta_n(\tau)\, \mathrm{e}^{\nu\lambda_n^2\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]. \tag{26''}$$

Acest caz a fost semnalat de V. Vâlcovici [8] în studiul problemei rotației unui disc fluid.

c) Dacă $r_2 \to \infty$ cu $\lim\limits_{r\to\infty} v(t, r) = 0$, adică $\omega_2(t) = 0$, se obține mișcarea fluidului în exteriorul cilindrului $r_1 \leqslant r < \infty$ datorită rotației cilindrului $r = r_1$. În acest caz $A = 0$ și valorile proprii λ_n se obțin din $Y_1(\lambda r_1) = 0$, iar funcțiile proprii sînt $R(\lambda_n r) = Y_1(\lambda_n r)$. Din (21) rezultă

$$\alpha_n = -\frac{2}{[r_1 Y_1'(\lambda r_1)]^2}\int_{r_1}^{\infty} r\, u_0(r)\, Y_1(\lambda_n r)\,\mathrm{d}r, \tag{21''}$$

unde din (5') $u_0(r) = v_0(r) - \dfrac{\omega_1^0}{r} r_1^2$. Din asimptotica lui $Y_n(x)$ [5] și trecînd la limită în (25), rezultă

$$\beta_n(\tau) = \frac{2\rho\omega_1'(\tau)}{[Y_1'(\lambda_n r_1)]^2}\int_{r_1}^{\infty} Y_1(\lambda_n r)\,\mathrm{d}r. \tag{25''}$$

Soluția (26) în acest caz este

$$v(t, r) = r_1^2\omega_1(t)\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} Y_1(\lambda_n r)\, \mathrm{e}^{-\nu\lambda_n^2 t}\left[\alpha_n + \int_0^t \beta_n(\tau)\, \mathrm{e}^{\lambda_n^2\nu\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]. \tag{26'''}$$

De asemenea, soluțiile (26'), (26''') se particularizează dacă $\omega(t)$ este constant, $\beta_n = 0$ și soluțiile se stabilizează spre mișcarea staționară respectivă (26') (b) $v(r) \to \omega_2 r$; (c) $v(r) \to \frac{\omega_1}{r}$ cînd $t \to \infty$.

d) Alte cazuri particulare se pot obține cînd unul din cilindri stă pe loc și celălalt generează mișcarea fluidului făcînd $\omega_i(t) = 0$.

Utilizînd soluția (26) și relațiile (4) se poate determina distribuția presiunilor. De asemenea tensiunea tangențială $\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right)$ este, folosind (26),

$$\sigma_{r\theta} = -2\mu r_1^2 r_2^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{(r_2^2 - r_1^2)r^2} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \left[R' - \frac{1}{r} R\right] e^{-\nu\lambda_n^2 t} \left[\alpha_n + \int_0^t \beta_n(\tau)\, e^{\nu\lambda_n^2 \tau}\, d\tau\right]$$

și de aici rezultă momentul față de Oz ce acționează asupra unei suprafețe unitare de rază $r \in (r_1, r_2)$, $M = 2\pi r^2 \sigma_{r\theta}$. Se pot obține pentru $\sigma_{r\theta}$ și M formulele pentru cazurile particulare semnalate.

2. Considerăm dată, pentru suprafețele cilindrice, o anumită distribuție de căldură, ecuația transferului nestaționar de căldură în fluidul în mișcare este [4]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + F(t, r), \tag{1}$$

unde

$$F(t, r) = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} v\right)^2, \tag{2}$$

$T(r, t)$ este temperatura, iar constantele C, K sînt, respectiv, căldura specifică și coeficientul de conductivitate termică a fluidului. Se observă că distribuția temperaturii în fluid depinde prin $F(t, r)$ de cîmpul vitezelor pentru care s-a dat soluția în § 1 prin (1.26).

Condițiile inițiale și la limită (de alimentare a cilindrilor cu căldură) sînt, respectiv,

$$T(0, r) = T_0(r); \quad r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \tag{3}$$

$$T(t, r_1) = T_1(t); \quad T(t, r_2) = T_2(t), \tag{4}$$

unde funcțiile $T_0(r)$, $T_1(t)$, $T_2(t)$ sînt funcții derivabile date și deci pentru continuitate avem $T_0(r_1) = T_1^0$, $T_0(r_2) = T_2^0$.

Observăm că trebuie să rezolvăm o problemă la limită pentru ecuația de tip parabolic (1) cu condițiile (3) (4) în domeniul $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, $t \geqslant 0$.

Făcînd transformarea

$$T(t, r) = \frac{T_2(t) - T_1(t)}{\ln r_2/r_1} \ln r + \frac{T_1(t) \ln r_2 - T_2(t) \ln r_1}{\ln r_2/r_1} + Z(t, r), \quad (5)$$

atunci $Z(t, r)$ trebuie să fie soluție pentru

$$\rho C \frac{\partial Z}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z}{\partial r}\right) + F(t, r) - \rho C\left[\frac{T_2' - T_1'}{\ln r_2/r_1} \ln r + \right.$$

$$\left. + \frac{T_1' \ln r_2 - T_2' \ln r_1}{\ln r_2/r_1}\right]. \quad (1')$$

$$Z(0, r) = T_0(r) - \frac{T_2^0 - T_1^0}{\ln r_2/r_1} \ln r - \frac{T_1^0 \ln r_2 - T_2^0 \ln r_1}{\ln r_2/r_1} = Z_0(r), \quad (3')$$

$$Z(t, r_1) = 0, \; Z(t, r_2) = 0. \quad (4')$$

Problema (1'), (3'), (4') este analogă cu problema din § 1, (3'), (5'), (6') și deci căutăm soluția

$$Z(t, r) = Z_1(t, r) + Z_2(t, r), \quad (6)$$

unde

$$\rho C \frac{\partial Z_1}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 Z_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Z_1}{\partial r}\right), \quad (7)$$

$$Z_1(0, r) = Z_0(r), \; r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad (8)$$

$$Z_1(t, r_1) = 0, \; Z_1(t, t_2) = 0, \quad (9)$$

iar $Z_2(t, r)$ satisface ecuația (1') cu condițiile

$$Z_2(0, r) = 0; \; r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad (10)$$

$$Z_2(t, r_1) = 0, \; Z_2(t, r_2) = 0. \quad (11)$$

Analog cu problema din §1 (9) (10) (11), pentru problema (7), (8), (9) avem

$$Z_1(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \, e^{-\frac{k}{\rho C} t} \cdot P(\eta_n r), \quad (12)$$

unde valorile proprii η_n sînt soluții ale ecuației (din (9)), $J_0(\eta r_1) \, Y_0(\eta r_2) - J_0(\eta r_2) \, Y_0(\eta r_1) = 0$, iar funcțiile proprii

$$P(\eta_n r) = C_n J_0(\eta_n r) + D_n Y_0(\eta_n r), \quad (13)$$

unde J_0 și Y_0 sînt funcțiile Bessel de prima speță și, respectiv, a doua speță, și ordin zero, ele rezultînd ca soluții ale unei ecuații analoge cu (1.16') $\frac{d^2P}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dP}{d\xi} + P = 0$ ($\xi = \eta r$), în (13) putem lua $C_n = Y_0(\eta_n r_1) + Y_0(\eta_n r_2)$, $D_n = -J_0(\eta_n r_1) - J_0(\eta_n r_2)$.

Folosind condițiile de ortogonalitate (1.20) și condiția (8), obținem

$$\gamma_n = \frac{2}{[r_2 P'(\eta_n r_2)]^2 - [r_1 P'(\eta_n r_1)]^2} \int_{r_1}^{r_2} r Z_0(r) P(\eta_n r)\, dr. \tag{14}$$

Analog cu soluția (1.22), (1.24), vom avea pentru problema (1') (10) (11)

$$Z_2(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \int_0^t \delta_n(\tau)\, e^{-\frac{k}{\rho C}\eta_n^2(t-\tau)}\, d\tau;\ P_n = P(\eta_n r), \tag{15}$$

$$\delta_n(\tau) = \frac{2}{[r_2 P_n'(r_2)]^2 - [r_1 P_n'(r_1)]^2} \left\{ \rho C \frac{T_1'(\tau) - T_2'(\tau)}{\ln r_2/r_1} \int_{r_1}^{r_2} r \ln r\, P_n\, dr + \right.$$

$$+ \rho C \frac{T_2'(\tau) \ln r_1 - T_1'(\tau) \ln r_2}{\ln r_2/r_1} \int_{r_1}^{r_2} r P_n\, dr + 4 r_1^4 r_2^4 \frac{[\omega_2(\tau) \cdot \omega_1(\tau)]^2}{[r_2^2 - r_1^2]^2} \times$$

$$\times \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^3} P_n\, dr + 4 r_1^2 r_2^2 \frac{\omega_2(\tau) - \omega_1(\tau)}{r_2^2 - r_1^2} \sum_{i=i}^{\infty} e^{-\nu\lambda_i\tau} \left[\alpha_i + \right.$$

$$+ \int_0^{\tau} \beta_i(\theta)\, e^{\nu\lambda_i^2\theta}\, d\theta \left] \int_{r_1}^{r_2} \left[\lambda_i \frac{1}{r} R'(\lambda_i r) - \frac{1}{r^2} R(\lambda_i r) \right] P_n\, dr + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{\infty} e^{-\nu(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\tau} \left[\alpha_i + \int_0^{\tau} \beta_i(\theta)\, e^{\nu\lambda_i^2\theta}\, d\theta \right] \times$$

$$\times \left[\alpha_j + \int_0^{\tau} \beta_j(\theta)\, e^{-\nu\lambda_j^2\theta}\, d\theta \right] \int_{r_1}^{r_2} \left[\lambda_i R'(\lambda_i r) - \frac{1}{r} R(\lambda_i r) \right] \times$$

$$\left. \times \left[\lambda_j R'(\lambda_j r) - \frac{1}{r} R(\lambda_j r) \right] r\, P_n\, dr \right\}. \tag{16}$$

Din (6), (12), (15) rezultă că distribuția temperaturii în fluid este

$$T(t, r) = \frac{T_2(t) - T_1(t)}{\ln r_2/r_1} \ln r + \frac{T_1(t) \ln r_2 - T_2(t) \ln r_1}{\ln r_2/r_1} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} P(\eta_n r)\, e^{-\frac{k}{\rho C}\eta_n^2 t} \left[\gamma_n + \int_0^t \delta_n(\tau)\, e^{\frac{k}{\rho C}\eta_n^2\tau}\, d\tau \right]. \tag{17}$$

Vom analiza cazurile particulare semnalate la §1 a) b) c):

a) Dacă T_1 și T_2 sînt constante, în concordanță cu §1.a) și $t \to \infty$, distribuția temperaturii se stabilizează către cazul staționar [1] deoarece $\delta_n \to 0$.

b) În cazul cilindrului în rotație cu $r_1 \to 0$, § 1 b) în (13) $D_n = 0$ și deci $P(\eta_n r) = J_0(\eta_n r)$, unde valorile proprii η_n sînt soluțiile ecuației $J_0(\eta r_2) = 0$ și deci din (14) obținem

$$\gamma_n = \frac{2}{r_2^2[J_0'(\eta_n r_2)]^2} \int_0^{r_2} r\, Z_0(r)\, J_0(\eta_n r)\, dr; \qquad (14')$$

din (3') cînd $r_1 \to 0$, $Z_0(r) = T_0(r) - T_2^0$. În aceste condiții din relația

$$\delta_n(\tau) = \frac{2}{[r_2 J_0'(\eta_n r_2)]^2} \left\{ -\rho C\, T_2'(\tau) \int_{r_1}^{r_2} r J_0(\eta_n r)\, dr + \right.$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{\infty} e^{-\nu(\lambda_i+\lambda_j^2)\tau} \left[\alpha_i + \int_0^{\tau} \beta_i(\theta)\, e^{\nu\lambda_i^2\theta}\, d\theta \right] \cdot \left[\alpha_j + \int_0^{\tau} \beta_j(\theta)\, e^{\nu\lambda_j^2\theta}\, d\theta \right] \times$$

$$\left. \times \int_0^{r_2} \left[\lambda_i J_1'(\lambda_i r) - \frac{1}{r} J_1(\lambda_i r) \right] \left[\lambda_j J_1'(\lambda_j r) - \frac{1}{r} J_1(\lambda_j r) \right] r\, J_0(\eta_n r)\, dr \right\}.$$

În acest caz distribuția temperaturii în fluidul rotitor încălzit pe $r = r_2$ cu $T = T_2(t)$ și $v = r_2\, \omega_2$ este

$$T(t, r) = T_2(t) + \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\eta_n r)\, e^{-\frac{k}{\rho C}\eta_n^2 t} \left[\gamma_n + \int_0^t \delta_n(\tau)\, e^{\frac{k}{\rho C}\eta_n^2 \tau}\, d\tau \right],$$

unde γ_n, δ_n sînt dați mai sus, iar α_i β_j din ξ 1 (21') și (25').

c) Cînd $r_2 \to \infty$, § 1.c) în (13) $C_n = 0$ și deci fluidul rotitor este în exteriorul cilindrului $r = r_1$ care se rotește cu $v = r_1\omega_1(t)$ și este încălzit cu $T(r_1, t) = T_1(t)$; rezultă că valorile proprii η_n sînt rădăcinile ecuației $Y_0(\eta r_1) = 0$, iar funcțiile proprii $P(\eta_n r) = Y_0(\eta_n r)$.

Din (14) rezultă $\gamma_n = \dfrac{-2}{[r_1 Y_0'(\eta_n r_1)]^2} \displaystyle\int_r^{\infty} r\, Z_0(r)\, Y_0(\eta_n r)\, dr$, unde din (3') cînd $r_2 \to \infty$, $Z_0(r) = T_0[(r) - T_1^0$.

Folosind (1.21''), (1.25''), atunci din (16), pentru $r_2 \to \infty$, avem

$$\delta_n(\tau) = \frac{-2}{[r_1 Y_0'(\eta_n r_1)]^2} \left\{ -\rho C T_1'(\tau) \int_{r_1}^{\infty} r Y_0(\eta_n r)\, dr + 4r_1^4\omega_1^2(\tau) \int_{r_1}^{\infty} \frac{Y_0(\eta_n r)}{r^3} dr - \right.$$

$$\left. - 4r_1^2\omega_1(\tau) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu\lambda_i^2\tau} \left[\alpha_i + \int_0^{\tau} \beta_i(\theta)\, e^{\nu\lambda_i^2\theta}\, d\theta \right] \int_{r_1}^{\infty} \left[\lambda_i Y_1'(\lambda_i r) - \right. \right.$$

$$-\frac{1}{r}Y_i(\lambda_i r)\Big] Y_0(\eta_n r)\,dr + \sum_{i,j=2}^{\infty} e^{-\nu(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\tau}\Big[\alpha_i + \int_0^\tau \beta_i(\theta)\, e^{\nu\lambda_i^2\theta}\,d\theta\Big]\times$$

$$\times\Big[\alpha_j + \int_0^\tau \beta_j(\theta)\, e^{\nu\lambda_j^2\theta}\,d\theta\Big]\int_{r_1}^{\infty}\Big[\lambda_i Y_1'(\lambda_i r) - \frac{1}{r}Y_1(\lambda_i r)\Big]\times$$

$$\times\Big[\lambda_j Y_1'(\lambda_j r) - \frac{1}{r}Y_1(\lambda_j r)\Big] r Y_0(\eta_n r)\,dr\Big\}.$$

Deci distribuția temperaturii cu γ_n și δ_n de mai sus, este

$$T(t, r) = T_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_0(\eta_n r)\, e^{-\frac{k}{\rho C}\eta_n^2 t}\Big[\gamma_n + \int_0^t \delta_n(\tau)\, e^{\frac{k}{\rho C}\eta_n^2 \tau}\,d\tau\Big].$$

d) Alte cazuri se pot obține cînd unul din cilindrii, sau ambii au temperatură constantă.

Observație. Pentru calcule numerice efective, valorile proprii λ_n, η_n ca rădăcini ale ecuațiilor specificate, sînt determinate într-o serie de lucrări [5], [6], [7]; de asemenea sînt tabelate integralele și valorile funcțiilor Bessel în aceleași lucrări.

Primită la redacție la 22 aprilie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Edit. Academiei R. S. România, 1967.
2. N. TEODORESCU, V. OLARIU, *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, Edit. tehnică, 1978.
3. O. BADEA, M. LUPU, Buletin șt. al Universității din Brașov, Seria A, 1980.
4. I. VLADEA, *Manual de termotehnică*, Edit. didactică și pedagogică, 1963.
5. A. GRAY, G. B. MATHEWS, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică*, Edit. tehnică, 1958.
6. E. JANKE, F. EMDE, F. LES, *Tablifi funcții s formulami i crivimi*, 1968 (rusă).
7. A. KALÄHNE, Zeitschrift für Mathem. und Ph., **LIV** (1907).
8. V. VÂLCOVICI, Revue Roumaine de Mth. Pures et Appliquées, **X**, *1* (1965).

MIȘCAREA AXIAL SIMETRICĂ A UNUI FLUID IDEAL DE ADÎNCIME FINITĂ, DATORITĂ UNEI PERTURBAȚII PRODUSE LA SUPRAFAȚA SA

de FLORICA GLOD

În prezenta lucrare se studiază mișcarea tridimensională axial simetrică a unui fluid ideal greu, nemărginit, de adîncime finită, datorită unui impuls aplicat pe suprafața sa la momentul inițial. Se obține expresia profilului suprafeței libere $\zeta(r, t)$ și se prezintă grafic acest profil.
Ca tehnică de lucru se folosesc transformatele Hankel și Laplace.

Se consideră mișcarea axial simetrică datorită unui impuls aplicat la suprafața liberă la $t = 0$, cînd lichidul este în poziția de echilibru. Se presupune că valurile sînt de mică amplitudine și lichidul (în particular apa) de adîncimea finită h. Mișcarea se raportează la sistemul de axe $oxyz$, cu axa oz îndreptată vertical în sus și axele x și y — suprafața orizontală.

Ecuațiile, scrise în coordonate cilindrice, care guvernează această mișcare sînt :

$$\frac{\partial u(r, z; t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(r, z; t)}{\partial r}, \qquad \frac{\partial w(r, z; t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p(r, z; t)}{\partial z}, \tag{1}$$

unde s-au neglijat termenii de ordinul doi, în baza presupunerii că oscilațiile sînt de mică amplitudine, și

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ur) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

ecuația de continuitate. Vor trebui satisfăcute condițiile la limită :

$$-p_0 = -p(r; t) + \rho g z \quad \text{pe suprafața liberă } z = \zeta(r; t), \tag{3}$$

$$u = w = 0 \quad \text{pentru } z = -h, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Forma suprafeței libere este $z = \zeta(r; t)$, cu $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 2, 1982, P. 199–206

Pentru oscilații mici $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = (w)_{z=0}$, de unde

$$\zeta = \int_0^t (w)_{z=0}\, \mathrm{d}t + \zeta_0(r), \tag{5}$$

cu $\zeta(r\,;\,0) = \zeta_0(r)$.

În cazul oscilațiilor mici se consideră condiția (3) valabilă pe suprafața neperturbată $z = 0$:

$$p(r\,;\,t) - \rho g \int_0^t w\, \mathrm{d}t = p_0(r\,;\,t) + \zeta_0(r). \tag{3'}$$

Condițiile inițiale sînt :

$$u = w = 0 \quad \text{pentru} \quad t = 0. \tag{6}$$

Pentru rezolvarea problemei se folosesc transformata Hankel pentru variabila r și transformata Laplace pentru variabila t.

Se definește transformata Hankel de ordinul ν a lui $f(r)$:

$$\mathcal{H}_\nu[f(r)] = F_\nu(\psi) = \int_0^\infty r\, f(r)\, J_\nu(r)\, \mathrm{d}r \qquad (0 < \psi < +\infty),$$

cu J_ν funcția Bessel de ordinul ν.

Formula de inversare devine :

$$f(r) = \mathcal{H}_\nu^{-1}[F_\nu(\psi)] = \int_0^\infty F_\nu(\psi)\, J_\nu(\psi r)\, \psi\, \mathrm{d}\psi \qquad (0 < r < +\infty).$$

Se va aplica transformata Hankel pentru variabila r, ecuațiilor (1) și anume transformata de ordinul întîi ecuației în u și transformata de ordinul zero ecuației în w (se înmulțește cu $r\, J_\nu(\psi r)$, $\nu = 0\ ;\ 1$, se integrează în intervalul $0 < r < +\infty$) și se obține :

$$\frac{\partial U(\psi, z\,;\,t)}{\partial t} = \frac{\psi}{\rho}\, \bar{P}(\psi, z\,;\,t)^{\star}),$$

---

*) $$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty ru(r, z\,;\,t)\, J_1(\psi r)\, \mathrm{d}r = -\frac{1}{\rho} \int_0^\infty r\, \frac{\partial p(r, z\,;\,t)}{\partial r}\, J_1(\psi r)\, \mathrm{d}r,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty ru(r, z\,;\,t)\, J_1(\psi r)\, \mathrm{d}r = \frac{\psi}{\rho} \int_0^\infty rp(r, z\,;\,t)\, J_0(\psi r)\, \mathrm{d}r$$

deoarece

$$\int_0^\infty r\, \frac{\partial p}{\partial r}\, J_1(\psi r)\, \mathrm{d}r = -\psi \int_0^\infty r\, p\, J_0(\psi r)\, \mathrm{d}r.$$

$$\frac{\partial W(\psi, z; t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}(\psi, z; t)}{\partial z}, \tag{7}$$

cu

$$U(\psi, z; t) = \int_0^\infty ru(r, z; t) J_1(\psi r)\, \mathrm{d}r,$$

$$\bar{P}(\psi, z; t) = \int_0^\infty rp(r, z; t) J_0(\psi r)\, \mathrm{d}r,$$

$$W(\psi, z; t) = \int_0^\infty rw(r, z; t) J_0(\psi r)\, \mathrm{d}r,$$

utilizînd regula de derivare a transformatei Hankel de ordinul întîi:

$$\mathcal{H}_1\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) = -\psi \mathcal{H}_0(f)$$

şi ţinînd cont de comportarea lui u şi w la infinit.

Aplicînd transformata Hankel şi celorlalte ecuaţii obţinem:

$$\psi U(\psi, z; t) + \frac{\partial W(\psi, z; t)}{\partial z} = 0^{*)} \tag{8}$$

din ecuaţia de continuitate, cu condiţiile la limită:

$$U(\psi, z; t) = W(\psi, z; t) = 0 \text{ pentru } z = -h, \quad t \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\bar{P}(\psi, z; t) - \rho g \int_0^t W(\psi, z; t)\, \mathrm{d}t = \bar{P}_0(\psi; t) + \rho g \bar{H}_0(\psi), \tag{10}$$

$$\bar{H}(\psi; t) = \int_0^\infty W(\psi, z; t)\, \mathrm{d}t + \bar{H}_0(t), \tag{11}$$

cu $\bar{H}(\psi; t)$ şi $\bar{H}_0(\psi)$ transformatele Hankel de ordinul zero a lui $\zeta(r; t)$ şi $\zeta_0(r)$.

---

*) $$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}(ur) J_0(\psi r)\, \mathrm{d}r + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty rw J_0(\psi r)\, \mathrm{d}r = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial r}(ur) J_0(\psi r)\, \mathrm{d}r = ur J_0(\psi r)\Big|_0^\infty + \psi \int_0^\infty ur J_1(\psi r)\, \mathrm{d}r = 0 + \psi U$$

deoarece

$$\frac{\partial}{\partial r} J_0(\psi r) = -\psi J_1(\psi r).$$

Condițiile inițiale devin:

$$U(\psi, z; t) = W(\psi, z; t) = 0 \qquad \text{pentru} \quad t = 0. \tag{12}$$

Se definește transformata Laplace a lui $f(t)$

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

cu formula de inversare:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i}^{c+i} e^{st} F(s)\, ds, \quad \text{cu} \quad s = a + ib.$$

Se aplică ecuațiilor (7) — (11) transformata Laplace, în variabila t (se înmulțește cu e^{-st} și se integrează în intervalul $0 < t < +\infty$), se ține cont de formula de derivare a transformatei Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right] = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t} e^{-st}\, dt = sF - f(0),$$

de condițiile inițiale (12) și se obține:

$$\begin{aligned} s\, X(\psi, z; s) &= \frac{\psi}{\rho} P(\psi, z; s), \\ s\, Z(\psi, z; s) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P(\psi, z; s)}{\partial z}; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\psi X(\psi, z; s) + \frac{\partial Z(\psi, z; s)}{\partial z} = 0 \tag{14}$$

(din ecuația de continuitate), cu condițiile la limită:

$$X(\psi, z; s) = Z(\psi, z; s) = 0 \qquad \text{pentru} \quad z = -h, \quad t \geqslant 0, \tag{15}$$

$$P(\psi, z; s) - \frac{1}{s}\rho g Z(\psi, z; s) = P_0(\psi; s) + \rho g H_0(\psi)^{\star)}$$

$$\text{pentru} \quad z = 0, \quad t > 0, \tag{16}$$

$$H(\psi; s) = \frac{1}{s} Z(\psi, z; s) + H_0(\psi), \tag{17}$$

⋆) $\int_0^\infty \left(\int_0^t W(\tau)\, d\tau\right) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty W(\tau)\left(\int_s^t e^{-st}\, dt\right) d\tau = \frac{1}{s}\int_0^\infty W(t)\, e^{-st}\, dt.$

cu $X(\psi, z; s)$, $Z(\psi, z; s)$, $P(\psi, z; s)$, $H(\psi, s)$ şi $H_0(\psi)$ transformatele Laplace ale funcţiilor $U(\psi, z; t)$, $W(\psi, z; t)$, $\overline{P}(\psi, z; t)$, $\overline{H}(\psi, t)$ şi $\overline{H}_0(\psi)$.

Derivînd prima ecuaţie din (13) în raport cu z şi adunînd-o cu a doua înmulţită cu ψ, obţinem:

$$s\frac{\partial X}{\partial z} + s\,\psi\,Z = 0.$$

Se derivează (14) în raport cu z:

$$\psi\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0.$$

Din aceste ultime două ecuaţii, prin înmulţire respectiv cu ψ şi s şi scăzînd, rezultă

$$s\,\psi^2 Z - s\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0.$$

S-a ajuns la rezolvarea ecuaţiei:

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\partial z^2} - \psi^2 Z = 0 \tag{18}$$

cu condiţiile la limită:

$$Z = 0 \quad \text{pentru } z = -h, \quad t \geqslant 0, \tag{19}$$

$$s^2\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} + g\,\psi^2 Z = -\frac{s\,\psi^2}{\rho}(P_0 + \rho\,g\,H_0)$$

$$\text{pentru } z = 0, \quad t > 0, \tag{20}$$

eliminînd P din folosirea primei ecuaţii din (13) şi (14).

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (18) este de forma:

$$Z(\psi, z; s) = A(\psi; s)\,\mathrm{e}^{|\psi|z} + B(\psi; s)\,\mathrm{e}^{-|\psi|z}, \tag{21}$$

cu $A(\psi; s)$ şi $B(\psi; s)$ ce se vor determina din condiţiile la limită.

Utilizînd (19):

$$A(\psi; s)\,\mathrm{e}^{-|\psi|h} + B(\psi; s)\,\mathrm{e}^{|\psi|h} = 0,$$

de unde

$$A(\psi; s) = -B(\psi; s)\,\mathrm{e}^{2|\psi|h}$$

şi

$$Z(\psi, z; s) = B(\psi; s)(-\mathrm{e}^{2|\psi|h}\,\mathrm{e}^{|\psi|h} + \mathrm{e}^{-|\psi|z}).$$

Din (20):

$$s^2B(\psi;s)\,|\psi|(-e^{2|\psi|h}-1)+$$

$$+g\psi^2B(\psi;s)(-e^{2|\psi|h}+1)=-\frac{s\psi^2}{\rho}(P_0+\rho H_0),$$

$$B(\psi;s)=\frac{s|\psi|}{\rho}(P_0+\rho g H_0)\frac{1}{s^2(e^{2|\psi|h}+1)+g|\psi|(e^{2|\psi|h}-1)},$$

$$A(\psi;s)=-\frac{s|\psi|}{\rho}(P_0+\rho g H_0)\frac{1}{s^2(1+e^{-2|\psi|h})+g|\psi|(1-e^{-2|\psi|h})}$$

$$Z(\psi,z;s)=-\frac{s\,|\psi|(P_0+\rho g H_0)}{\rho}\frac{e^{|\psi|z}}{s^2(1+e^{-2|\psi|h})+g|\psi|(1-e^{-2|\psi|h})}-$$

$$-\frac{e^{-|\psi|z}}{s^2(e^{2|\psi|h}+1)+g|\psi|(e^{2|\psi|h}-1)}.$$

Odată $Z(\psi,z;s)$ aflat se poate obține $X(\psi,z;s)$, $P(\psi,z;s)$ și $H(\psi,z;s)$. Ceea ce interesează în final este în special forma suprafeței libere, care se obține din:

$$H=\frac{1}{s}Z+H_0,$$

H este funcția transformată și problema care se pune acum este aflarea originalei ζ.

Se aplică întîi inversa transformatei Laplace funcției:

$$H(\psi;s)=-\frac{|\psi|}{\rho}(P_0+\rho g H_0)\frac{e^{|\psi|z}\dfrac{1}{1+e^{-2|\psi|h}}}{s^2+g|\psi|\dfrac{1-e^{-2|\psi|h}}{1+e^{-2|\psi|h}}}-$$

$$-\frac{e^{-|\psi|z}\dfrac{1}{e^{2|\psi|h}+1}}{s^2+g|\psi|\dfrac{e^{2|\psi|h}-1}{e^{2|\psi|h}+1}}+H_0.$$

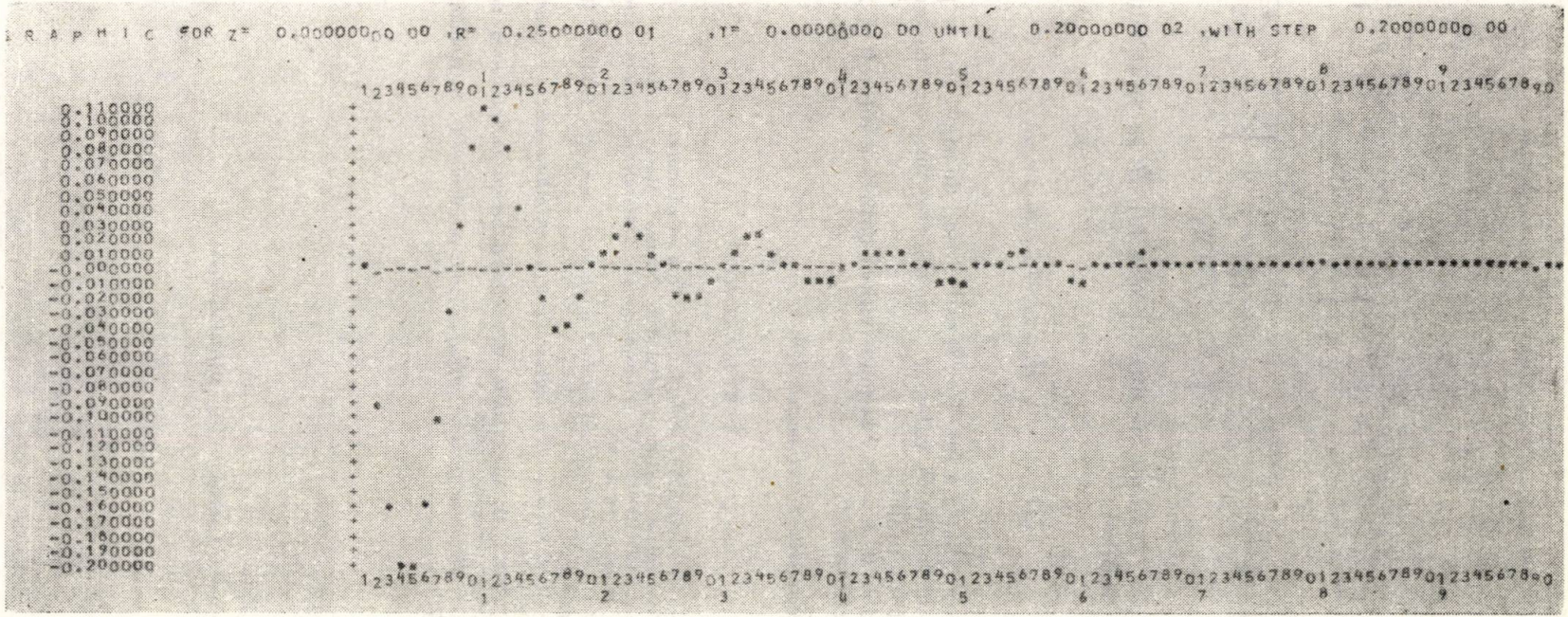

R A P H I C FOR Z= 0.00000000 00 ,R= 0.25000000 01 ,T= 0.00000000 00 UNTIL 0.20000000 02 ,WITH STEP 0.20000000 00
0.110000
0.100000
0.090000
0.080000
0.070000
0.060000
0.050000
0.040000
0.030000
0.020000
0.010000
-0.000000
-0.010000
-0.020000
-0.030000
-0.040000
-0.050000
-0.060000
-0.070000
-0.080000
-0.090000
-0.100000
-0.110000
-0.120000
-0.130000
-0.140000
-0.150000
-0.160000
-0.170000
-0.180000
-0.190000
-0.200000

Fig. 1

Se obține, ca inversa transformatei Laplace a funcției $H(\psi; s)$*), funcția :

$$\overline{H}(\psi; t) = -\frac{|\psi|}{\rho}(\overline{P}_0 + \rho g \overline{H}_0)\frac{e^{|\psi|z}}{1+e^{-2|\psi|h}}\frac{1}{\sqrt{g|\psi|\frac{1-e^{-2|\psi|h}}{1+e^{-2|\psi|h}}}}\sin\sqrt{g|\psi|\frac{1-e^{-2|\psi|h}}{1+e^{-2|\psi|h}}}\,t +$$

$$+\frac{|\psi|}{\rho}(\overline{P}_0 + \rho g\,\overline{H}_0)\frac{e^{-|\psi|z}}{1+e^{2|\psi|h}}\frac{1}{\sqrt{g|\psi|\frac{e^{2|\psi|h}-1}{e^{2|\psi|h}+1}}}\sin\sqrt{g|\psi|\frac{e^{2|\psi|h}-1}{e^{2|\psi|h}+1}}\,t + \overline{H}_0.$$

Funcția $\zeta(r; t)$ se obține din expresia lui $\overline{H}(\psi; t)$ aplicînd inversa transformatei Hankel :

$$\zeta(r; t) = \int_0^\infty \overline{H}(\psi; t)\, J_\nu(\psi r)\, \psi\, \mathrm{d}\psi .$$

Expresia analitică a lui $\zeta(r; t)$ este dificil de aflat, dar se pot obține cu ajutorul calculatorului valorile ei în diferite puncte, trasîndu-se și un grafic cu profilul undei.

Pentru $z = 0$, $r = 2{,}5$ și t cu valori cuprinse între 0 și 20 profilul are forma din figura 1.

Primită la redacție la 21 august 1981

BIBLIOGRAFIE

1. H. BATEMAN, A. ERDELYI, *Tabliți integral'nih preobrazovanii*, tom I, Preobrazovania Fur'e, Laplasa, Mellina, Izdatel'stvo „Nauka", Moskva, 1969.
2. V. DITKINE, A. PROUDNIKOV, *Transformations Intégrales et calcul opérationnel*, Edition Mir, Moscou, 1978.
3. J. HLADIC, *La transformation de Laplace à plusieurs variables*, Edition Masson, Paris, 1969.
4. G. KORN, T. KORN, *Sprovocinik po matematike dlja naucinih rabotnikov i injenerov*, „Nauka", Moskva, 1973.
5. M. A. LAVRENTIEV, B. V. SABAT, *Metodi teorii funcții kompleksnovo peremennovo*, „Nauka", Moskva, 1965.
6. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor viscoase*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1967.

*) Transformata Laplace : $f(t)$ $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$

$$\sin at \qquad \frac{a}{s^2 + a^2}$$

UNELE PROBLEME DE OPTIM PRIVIND SECȚIONAREA ZONELOR DE AMESTEC ÎN CAZUL TRANSPORTULUI SUCCESIV DE PRODUSE PETROLIERE

de T. OROVEANU, B. SIRO
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se definește noțiunea de volum minim de produs în cadrul unui ciclu de pompări succesive și apoi se utilizează ca parametru de referință pentru volumele partidelor produselor pompate succesiv. Se stabilesc criteriile pentru secționarea optimă a zonelor de amestec pentru unele cazuri, dintre care cele mai principale sînt : a) volumul partidei produsului P_j este mai mic decît volumul său minim ; b) volumul partidei produsului P_j este mai mare decît volumul său minim, dar volumele partidelor produselor adiacente lui $P_j(P_{j-1}, P_{j+1})$ sînt mai mici decît volumele lor minime.

1. INTRODUCERE

Printre problemele principale ale transportului succesiv de produse petroliere este și aceea a secționării zonelor de amestec ce se formează în timpul transportului, atunci cînd ele ajung la capătul final al conductei, în vederea recuperării lor totale sau parțiale. Noțiunile de bază cu care operează specialistul cînd are de rezolvat o astfel de problemă sînt concentrația și volumul, deși ele intră în mod obișnuit și în analiza altor elemente cum sînt costurile parțiale și totale ale transportului de produse, consumurile energetice, numărul de cicluri corespunzător unei perioade de timp etc. De aceea, pentru aceste noțiuni se simte nevoia definirii unor parametri de referință față de care să fie raportate toate celelalte valori ale lor.

În [1] autorii acestui studiu au definit și au prezentat pentru noțiunea de concentrație un astfel de parametru de referință : concentrația optimă de secționare pentru o zonă de amestec. Astfel, se ia în considerație un segment dintr-un ciclu de pompare succesivă (fig. 1) :

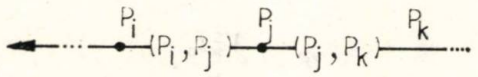


Fig. 1

în care j este indicele curent al produselor din ciclu ; pentru simplificarea indexării s-a notat $i = j - 1$ și $k = j + 1$, iar simbolul $(P_j, P_k) \equiv ZA_{jk}$ reprezintă zona de amestec formată între perechea de produse P_j, P_k. În mod obișnuit, zona de amestec ZA_{jk} ajunsă la capătul final al conductei se distribuie în rezervorul produsului curat P_j, respectiv al produsului P_k, ideal fiind ca întreaga această zonă, formată în timpul pompării succesive a celor două produse, să fie distribuită în rezervoarele cu produse standard. Ca o consecință a acestui fapt, s-a definit concentrația

optimă de secționare (C^0), ca fiind acea concentrație la care trebuie secționată o zonă de amestec, în vederea repartizării sale totale pe produse standard, astfel încît costurile totale aferente depozitării și amestecării perechii de produse transportate succesiv să fie minime. Din [1] avem

$$C^o = \frac{K_1}{K_1 + K_2}, \tag{1}$$

în care K_1, K_2 sînt niște constante pentru un număr anual dat de cicluri k, ce depind de unii parametri tehnico-economici cum sînt costul produselor, pierderile specifice de produse prin respirația zilnică și ciclică a rezervoarelor, valoarea investiției pentru depozitarea produselor etc. Prin intermediul constantelor K_1, K_2, concentrația C^0 depinde de numărul anual de cicluri k.

Tot în [1] este definit, referitor la aceeași pereche de produse P_j, P_k, modulul volumului

$$\Omega_{jk} = V_c \sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}}}, \tag{2}$$

care are dimensiunea unui volum și în care $\varkappa$ este coeficientul efectiv de difuzie dat de relația:

$$\varkappa = 8{,}9886\, \mathscr{P}_m \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left(1 - \frac{26{,}2317}{R\mathscr{S}c \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \right), \tag{3}$$

unde λ este coeficientul de rezistență hidraulică, $\mathscr{S}c = \nu/D$ este numărul lui Schmidt, ν fiind viscozitatea cinematică, iar D coeficientul de difuzie moleculară pentru cele două produse ce vin în contact; $\mathscr{R}e = V_m \cdot r_c/\nu$ este numărul lui Reynolds definit cu ajutorul vitezei medii de pompare V_m și a razei r_c a conductei de transport; $\mathscr{P}_m = r_c V_m / D_0$ este numărul lui Péclet în care D_0 este o valoare de referință a coeficientului de difuzie, iar $\mathscr{P}$ este numărul lui Péclet cu expresia

$$\mathscr{P} = \frac{V_m^2 t_0}{D_0}, \tag{4}$$

în care t_0 reprezintă timpul necesar ca o anumită secțiune marcată de produs să străbată cu viteza V_m lungimea L_c a conductei, iar V_c reprezintă volumul conductei. Expresia lui Ω_{jk} apare atunci cînd se determină volumul produsului P_j (sau P_k), cuprins între anumite limite ale concentrației din zona de amestec respectivă ZA_{jk}, utilizînd următoarea expresie pentru concentrația medie într-o secțiune transversală a unei conducte de transport [2]

$$C_m = \frac{C_0}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\xi}{2\sqrt{\varkappa \tau}} - \frac{\mathscr{P}_m}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}} \right], \tag{5}$$

în care $\xi = x/r_c$ este lungimea adimensională luată în sensul curgerii produselor, iar $\tau = t\, D_0/\, r_c^2$ este timpul adimensional.

Din cele anterioare rezultă în mod evident că Ω_{jk} depinde de modelul matematic (ecuația diferențială) luat în considerație la studiul problemelor de transport succesiv.

În ceea ce privește privește noțiunea de volum și în acest caz apare necesitatea definirii unui volum de referință pentru un produs dat P_j. Astfel dacă se ia în considerație segmentul de ciclu din figura 1 și ne referim la ambele zone de amestec ZA_{ij}, respectiv ZA_{jk}, atunci fiecare dintre ele poate fi caracterizată (fig. 2) printr-o concentrație optimă de secționare C_{ij}^0, respectiv C_{jk}^0.

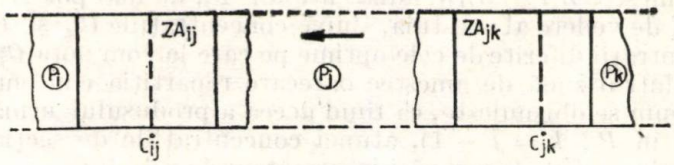


Fig. 2

Considerînd problema din punctul de vedere al produsului P_j, rezultă că va fi necesar un volum de produs P_j — V_{jk}^{mc} care să „acopere", la nivelul concentrației admisibile K_{kj} (a produsului P_k în P_j), o parte din zona de amestec ZA_{jk} și anume pînă la concentrația C_{jk}^0, la care trebuie să se mai adauge un volum de produs P_j— V_{ij}^{mc}, care să „acopere", la nivelul concentrației admisibile K_{ij} (a produsului P_i în P_j), partea din zona de amestec ZA_{ij} pînă la C_{ij}^0. Din cele anterioare rezultă imediat relația de definiție pentru volumul minim (de referință), V_j^{mc}, pentru produsul P_j

$$V_j^{mc} = V_{ij}^{mc} + V_{jk}^{mc}. \tag{6}$$

Așadar, volumul minim de produs P_j reprezintă volumul acestui produs ce trebuie pompat în cadrul unui ciclu, astfel încît zonele de amestec adiacente acestui produs, ZA_{ij} și ZA_{jk}, să fie secționate, din punctul de vedere al produsului P_j după concentrațiile optime respective C_{ij}^0 și C_{jk}^0. Reamintind că aceste concentrații optime depind de numărul de cicluri k, rezultă că și volumul minim pentru produsul P_j este o funcție de acest parametru și de aceea a fost notat V_j^{mc}.

2. DEFINIREA UNOR PROBLEME DE OPTIM PRIVIND SECȚIONAREA ZONELOR DE AMESTEC

Volumul V_j^{mc}, definit prin relația (6), poate fi considerat un parametru de referință în studiul unor probleme de optim ale transportului succesiv de produse, pentru că volumul partidei produsului P_j în cadrul unui ciclu, la un număr anual dat de cicluri, V_j^c, în raport cu V_j^{mc}, se poate afla într-una din următoarele relații:

$$V_j^c \gtrless V_j^{mc}. \tag{7}$$

Apare evident faptul că, în cazul în care

$$V_j^c \geqslant V_j^{mc}, \tag{8}$$

zonele de amestec adiacente produsului P_j, ZA_{ij} și ZA_{jk}, pot fi secționate, din punctul de vedere al produsului P_j, după concentrațiile optime corespunzătoare acestor zone C_{ij}^0, respectiv C_{jk}^0. În cazul în care avem însă între volume relația

$$V_j^c < V_j^{mc}, \tag{9}$$

zonele de amestec ZA_{ij}, ZA_{jk}, adiacente lui P_j, nu mai pot fi secționate, din punctul de vedere al acestuia, după concentrațiile C_{ij}^0 și C_{jk}^0, ci după niște concentrații diferite de cele optime pe care le vom nota C_{ji}^s, respectiv C_{jk}^s. Dacă într-o zonă de amestec oarecare repartiția concentrației este luată, așa cum se obișnuiește, ca fiind aceea a produsului următor în cel curent (P_k în P_j, $k = j + 1$), atunci concentrațiile de secționare menționate și cele optime se vor găsi în următoarele relații:

$$C_{ji}^s > C_{ij}^0, \text{ respectiv } C_{jk}^s < C_{jk}^0, \tag{10}$$

cu mențiunea că într-o zonă de amestec oarecare, de exemplu ZA_{jk}, există definită o singură concentrație optimă C_{jk}^0, dar pot exista două concentrații de secționare, C_{jk}^s corespunzătoare produsului P_j, respectiv C_{kj}^s corespunzătoare produsului P_k.

Cele precedente sînt ilustrate în figura 3. Din această figură mai rezultă însă și următorul aspect: în ambele zone de amestec ZA_{ij} și ZA_{jk}, apar unele volume de amestec, cuprinse între concentrațiile optime respective și concentrațiile de secționare, ce nu pot fi preluate de rezervoarele produsului P_j pentru că nu vor fi realizate concentrațiile admisibile K_{ij} și, respectiv, K_{kj}. Dacă aceste volume nu pot fi „acoperite suplimentar" de produse adiacente produsului P_j, adică de produsele P_i și P_k, atunci ele urmează să fie depozitate separat în rezervoare speciale

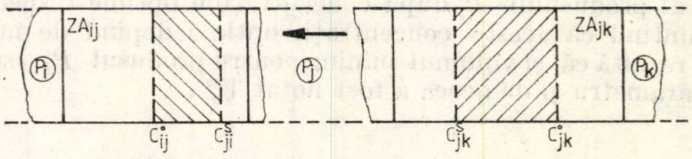


Fig. 3

de amestec ale produselor respective și trimise apoi spre rafinare. Ideea „acoperirii suplimentare" a celor două porțiuni din zonele de amestec ZA_{ij} și ZA_{jk}, se poate realiza însă numai dacă volumele produselor adiacente produsului P_j, pompate la un număr anual dat de cicluri, îndeplinesc condițiile

$$V_i^c > V_i^{mc}, \text{ respectiv } V_k^c > V_k^{mc}. \tag{11}$$

Avînd în vedere cele anterioare, ca și din analiza altor variante, posibile, se ajunge la concluzia că schema logică cu ajutorul căreia se poate studia comportarea unui produs oarecare P_j, în ceea ce privește concentrațiile de secționare din zonele de amestec adiacente acestui produs, dintr-un ciclu de pompare succesivă, poate fi reprezentată ca în figura 4.

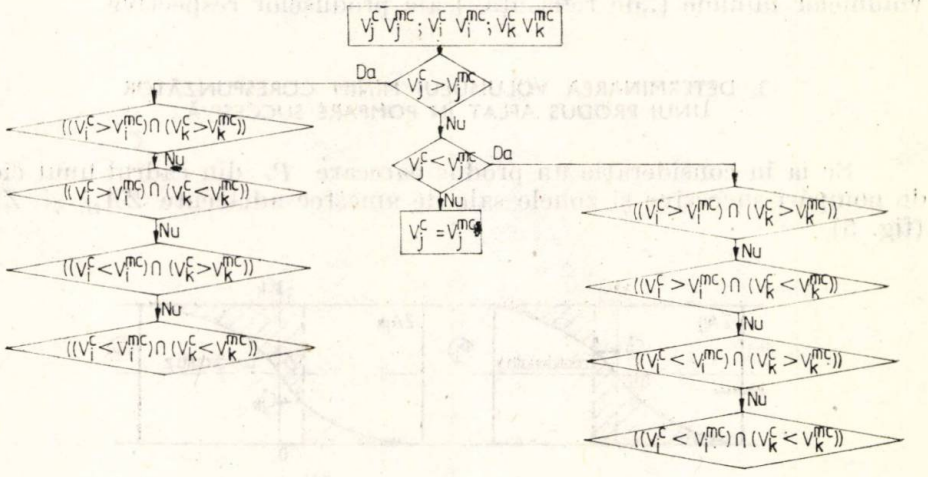


Fig. 4

Din această schemă se desprind două variante mai deosebite :

$$V_j^c < V_j^{mc},\ (j = 2,\ 3, \ldots,\ N-1), \tag{12}$$

respectiv

$$(V_j^c > V_j^{mc}) \cap ((V_i^c < V_i^{mc}) \cap (V_k^c < V_k^{mc})),\quad (j = 2,\ 3,\ 1 \ldots,\ N-1;\ i = j-1;\ k = j+1) \tag{13}$$

și care din anumite puncte de vedere sînt „simetrice" una alteia.

Cazul (12) a fost studiat, iar problema de optim privind secționarea zonelor de amestec, ce poate fi considerată pentru această variantă este următoarea : care trebuie să fie valoarea noilor concentrații de secționare C_{ji}^s și C_{jk}^s, astfel încît costurile privind depozitarea, amestecarea și rerafinarea produselor să fie minime în condițiile respectării concentrațiilor admisibile K_{ij}, respectiv K_{kj}?

Cazul (13) este acela în care produsul P_j posedă unele disponibilități în ceea ce privește „acoperiri suplimentare" din zonele de amestec adiacente ZA_{ij}, ZA_{jk}, ținînd seama că pentru ambele produse adiacente P_i, P_k condiția de volum minim conform relației (11) nu este îndeplinită. Problema de optim ce poate fi luată în considerație, în legătură cu secționarea zonelor de amestec, în cazul acestei variante este următoarea : cum trebuie să se realizeze „extinderea" de către produsul P_j, în ceea ce privește „acoperirile suplimentare" a zonelor de amestec adiacente

„peste" concentrațiile optime respective, astfel încît costurile totale privind depozitarea, amestecarea produselor și rerafinarea amestecurilor să fie minime?

Așa cum am menționat mai inainte această problemă de optim din urmă, este „simetrică" celui enunțați anterior și aceasta rezultă din însăși relațiile de bază (12) și (13) dintre volumele partidelor și cele ale volumelor minime („de referință") ale produselor respective.

3. DETERMINAREA VOLUMULUI MINIM CORESPUNZĂTOR UNUI PRODUS AFLAT ÎN POMPARE SUCCESIVĂ

Se ia în considerație un produs oarecare P_j din cadrul unui ciclu de pompări succesive și zonele sale de amestec adiacente ZA_{ij} și ZA_{jk} (fig. 5).

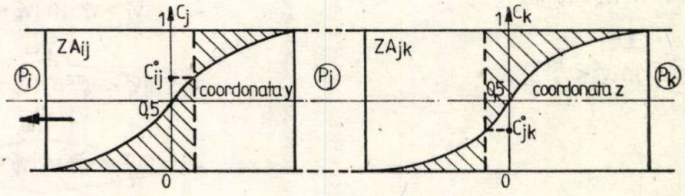


Fig. 5

Operînd ca în [1], volumul de produs P_k cuprins în zona de amestec ZA_{jk} (fig. 5) între concentrațiile $0 \div C^s$, se poate determina cu relația

$$V_k^{am}|_0^{C^s} = V_c \sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}}} \left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - z\,(1 - \operatorname{erf}(z)) \right], \tag{14}$$

după cum volumul produsului P_j cuprins între concentrațiile $C^s \div 1$ (în aceeași zonă de amestec) se poate determina cu relația

$$V_j^{am}|_{C^s}^1 = V_c \sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}}} \left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z(1 + \operatorname{erf}(z)) \right], \tag{15}$$

în care z reprezintă argumentul funcției erf din cadrul relației (5) cu care se determină concentrația într-o zonă de amestec. Dacă se notează în cazul general

$$\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z\,[a + \operatorname{erf}(z)] = F(z\,;\,a), \tag{16}$$

atunci relațiile (14) și (15) se pot scrie astfel

$$V_k^{am}|_0^{C^s} = \Omega_{jk} F\,(z\,;\,-a), \text{ respectiv } V_j^{am}|_{C^s}^1 = \Omega_{jk} F(z\,;\,a), \tag{17}$$

unde avem $a = 1$ și s-a ținut seama de relația (2) pentru modulul volumului.

Referindu-ne la cazul concret reprezentat în figura 5 se poate scrie — pentru zona de amestec ZA_{ij}:

$$V_i^{am}|_{C_{ij}^0}^{1} = \Omega_{ij} F(y_{ij}^0; a), \text{ respectiv } V_j^{am}|_0^{C_{ij}^0} = \Omega_{ij} F(y_{ij}^0; -a); \tag{18}$$

— pentru zona de amestec ZA_{jk}:

$$V_j^{am}|_{C_{jk}^0}^{1} = \Omega_{jk} F(z_{jk}^0 - a), \text{ respectiv } V_k^{am}|_0^{C_{jk}^0} = \Omega_{jk} F(z_{jk}^0; a), \tag{19}$$

în care z_{jk}^0, y_{ij}^0 sînt argumentele funcțiilor erf cu care se determină concentrațiile optime C_{jk}^0, C_{ij}^0 din zonele de amestec respective, iar $a = 1$.

Pentru a îndeplini condiția tehnologică a concentrației admisibile a produsului P_i în P_j (K_{ij}), respectiv a produsului P_k în $P_j(K_{kj})$, în cazul unui volum al partidei V_j^c pentru produsului P_j, este necesar să se respecte relația

$$\frac{V_i^{am}|_{C_{ij}^0}^{1}}{K_{ij}} \leqslant V_j^c - \frac{V_k^{am}|_0^{C_{jk}^0}}{K_{kj}} - V_j^{am}|_{C_{jk}^0}^{1} - V_j^{am}|_0^{C_{ij}^0}. \tag{20}$$

În cazul în care în (20) se ia în considerație egalitatea, atunci volumul V_j^c devine volumul minim V_j^{mc} de produs P_j. Așa cum s-a specificat mai înainte, V_j^{mc} depinde de numărul anual al ciclurilor k prin intermediul concentrațiilor optime C_{ij}^0 și C_{jk}^0.

Dacă se ține seama de relațiile (16), (17), (18) și (19), atunci expresia (20) devine

$$V_j^{mc} = \Omega_{ij}\left[\frac{1}{K_{ij}}\left(\frac{e^{-(y_{ij}^0)^2}}{\sqrt{\pi}} + y_{ij}^0(1+\operatorname{erf}(y_{ij}^0))\right) + \frac{e^{-(y_{ij}^0)^2}}{\sqrt{\pi}} - y_{ij}^0(1-\operatorname{erf}(y_{ij}^0))\right] + \tag{21}$$

$$+\Omega_{jk}\left[\frac{1}{K_{kj}}\left(\frac{e^{-(z_{jk}^0)^2}}{\sqrt{\pi}} - z_{jk}^0(1-\operatorname{erf}(z_{jk}^0))\right) + \frac{e^{-(z_{jk}^0)^2}}{\sqrt{\pi}} + z_{jk}^0(1+\operatorname{erf}(z_{jk}^0))\right]$$

și printr-o prelucrare corespunzătoare se poate transcrie sub forma

$$V_j^{mc} = \Omega_{jk}\frac{1+K_{kj}}{K_{kj}}\left[\frac{e^{-(z_{jk}^0)^2}}{\sqrt{\pi}} - z_{jk}^0\left(\frac{1-K_{kj}}{1+K_{kj}} - \operatorname{erf}(z_{jk}^0)\right)\right] +$$

$$+ \Omega_{ij}\frac{1+K_{ij}}{K_{ij}}\left[\frac{e^{-(y_{ij}^0)^2}}{\sqrt{\pi}} + y_{ij}^0\left(\frac{1-K_{ij}}{1+K_{ij}} + \operatorname{erf}(y_{ij}^0)\right)\right]. \tag{22}$$

Dacă se ţine seama de notaţia introdusă în (16), formula precedentă devine

$$V_j^{mc} = \Omega_{jk} \frac{1 + K_{kj}}{K_{kj}} F(z_{jk}^0; -A_k) + \Omega_{ij} \frac{1 + K_{ij}}{K_{ij}} F(y_{ij}^0; A_i), \quad (23)$$

în care avem

$$A_x = \frac{1 - K_{xj}}{1 + K_{xj}} < 1, \text{ iar } x = \{k, i\}. \quad (24)$$

Aşadar, expresia (23) reprezintă volumul minim necesar de produs P_j, la un număr dat k de cicluri anuale, pentru a putea „acoperi", în limitele condiţiilor tehnologice impuse de concentraţiile admisibile, porţiunile din zonele adiacente de amestec ZA_{ij} şi ZA_{jk}, dacă acestea s-ar secţiona după concentraţiile optime respective.

Totodată este necesar să fie remarcat faptul că pentru un volum dat V_j^c al partidei produsului P_j, formula (20) poate fi privită ca o „relaţie de legătură" dintre elementele zonei de amestec ZA_{ij} şi cele ale zonei ZA_{jk}. Astfel, dacă se utilizează relaţiile şi notaţiile introduse anterior, formula (20) devine în cazul general

$$F(y; A_i) = \frac{V_j^c}{\Omega_{ij}} \frac{K_{ij}}{1 + K_{ij}} - \frac{\Omega_{jk}}{\Omega_{ij}} \frac{K_{ij}}{K_{kj}} \frac{1 + K_{kj}}{1 + K_{ij}} F(z; -A_k),$$

iar dacă se notează:

$$\frac{V_j^c}{\Omega_{ij}} \frac{K_{ij}}{1 + K_{ij}} = \mu_1; \quad \frac{\Omega_{jk}}{\Omega_{ij}} \frac{K_{ij}}{K_{kj}} \frac{1 + K_{kj}}{1 + K_{ij}} = \mu_2, \quad (25)$$

relaţia precedentă apare sub forma

$$F(y; A_i) = \mu_1 - \mu_2 F(z; -A_k), \quad (26)$$

în care A_x are expresia (24), iar μ_1 şi μ_2 sînt nişte coeficienţi adimensionali, primul fiind dependent de numărul anual de cicluri k prin intermediul volumului partidei V_j^c pentru produsul P_j.

4. ASUPRA UNOR PROBLEME DE OPTIM PRIVIND SECŢIONAREA ZONELOR DE AMESTEC

La sosirea unei zone de amestec ZA la capătul final al conductei de transport se pune problema secţionării sale şi a repartizării amestecului (în limitele admisibile) pe rezervoarele produselor vandabile şi eventual în rezervoare speciale de amestec. Acest lucru este important din punctul de vedere al practicianului care se ocupă de problemele transportului succesiv de produse petroliere, dar şi din punctul de vedere al proiectantului transportului succesiv, al celui ce implementează eventual o anumită

tehnică automată de calcul în cadrul acestei tehnologii etc., pentru că toți, în ultima instanță trebuie să rezolve efectele tehnologice ale acestei acțiuni.

Luînd în considerație un segment dintr-un ciclu de pompări succesive (fig. 1) și analizînd schema relațională din figura 4, se constată că cele mai interesante cazuri legate de secționarea zonei de amestec, sosite la capătul final al conductei, sînt cele precizate prin relațiile (12) și (13). Celelalte variante sînt de tipul

$$(V_j^c > V_j^{mc}) \cap ((V_i^c > V_i^{mc}) \cap (V_k^c > V_k^{mc})), \tag{27}$$

la care este evident că secționarea zonelor de amestec ZA_{ij} și ZA_{jk} adiacente produsului P_j, se va face după concentrațiile optime respective C_{ij}^0 și C_{jk}^0, precum și alte cazuri care, în ultima instanță, se reduc la varianta

$$(V_j > V_j^{mc}) \cap ((V_i^c > V_i^{mc}) \cap (V_k^c < V_k^{mc})), \tag{28}$$

respectiv la varianta

$$(V_j > V_j^{mc}) \cap ((V_i^c < V_i^{mc}) \cap (V_k^c > V_k^{mc})). \tag{29}$$

În ultimele două variante, produsul P_j apare cu unele „disponibilități" (în raport cu volumul său minim) ce pot fi utilizate în cadrul zonei de amestec pentru care adiacentul său are minusuri în raport cu volumul lui de amestec. Din punct de vedere matematic, problemele din (28) și (29) nu diferă, ele se adresează doar zonelor de amestec „din fața" produsului P_j, respectiv „din urma" acestuia (luate în sensul pompării produselor). În această idee se ia în considerație cazul dat de relația (28), al cărui model schematic este reprezentat în figura 6.

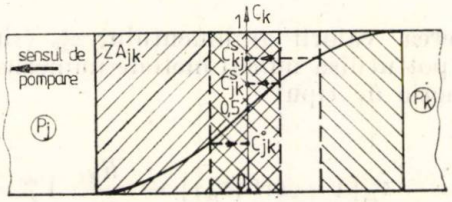


Fig. 6

Deoarece $V_k^c < V_k^{mc}$, rezultă că zona ZA_{jk} nu poate fi secționată, din punctul de vedere al produsului P_k, după concentrația optimă corespunzătoare acestei zone, ci după o altă concentrație $C_{kj}^s < C_{jk}^0$ astfel încît volumul $V_j^{am}|_{C_{kj}^s}^1$ să poată fi „acoperit" de o parte corespunzătoare a produsului P_k cu realizarea concentrației admisibile K_{jk}. Pe de altă parte, deoarece $V_j^c > V_j^{mc}$, un volum disponibil de produs P_j, dat de relația

$$V_j^{dc} = V_j^c - V_j^{mc}, \tag{30}$$

poate „prelua" un segment suplimentar din ZA_{jk} (dublu haşurat în figura 6), astfel încît să fie îndeplinită condiţia tehnologică.

$$V_j^{dc} \geqslant \frac{V_k^{am}\left|{}^{C_{jk}^s}_{C_{jk}^0}\right.}{K_{kj}}, \tag{31}$$

impusă de concentraţia admisibilă K_{kj}. În (31) C_{jk}^s reprezintă noua concentraţie de secţionare a zonei ZA_{jk}, din punctul de vedere al produsului P_j şi care, în cazul general, se găseşte în următoarele relaţii cu celelalte concentraţii din zonă

$$C_{jk}^0 < C_{jk}^s \leqslant C_{kj}^s, \tag{32}$$

ideală fiind acea situaţie (din punctul de vedere ale „recuperării" zonei de amestec ZA_{jk}) în care avem

$$C_{jk}^s = C_{kj}^s. \tag{33}$$

Este posibil ca relaţia (31) să conducă la o concentraţie de secţionare $C_{jk}^s > C_{kj}^s$, ceea ce în mod concret duce la aplicarea relaţiei (33).

Pentru a determina însă, în cazul general, noua concentraţie de secţionare C_{jk}^s pentru produsul P_j în zona ZA_{jk}, relaţia (31) cu notaţiile menţionate anterior, poate fi transcrisă sub forma

$$V_j^{dc} = \frac{\Omega_{jk}}{K_{kj}} [F(z_{jk}^s; -a) - F(z_{jk}^0; -a)] \tag{34}$$

z_{jk}^s fiind argumentul corespunzător concentraţiei de secţionare C_{jk}^s şi $a = 1$.

Pentru deducerea valorii argumentului z_{jk}^s (singura necunoscută din relaţia (34)), se pot utiliza numai metode numerice, definind în baza expresiei (34) o funcţie de tipul

$$E(z_{jk}^s) = \frac{e^{-(z_{jk}^s)^2}}{\sqrt{\pi}} - z_{jk}^s[1 - \operatorname{erf}(z_{jk}^s)] - \frac{K_{kj}}{\Omega_{jk}} V_j^{dc} - F(z_{jk}^0; -a), \tag{35}$$

în care, pentru explicitare, s-a utilizat şi relaţia (16) şi $a=1$. Zeroul acestei funcţii se poate căuta prin metoda coardei (sau o altă metodă iterativă) în limitele $z = (-3) \div (+3)$ ţinînd seama de faptul că $\operatorname{erf}(3) \cong 1$.

Metodele iterative sînt convergente în cazul funcţiei din (35) pentru că ecuaţia $E(z) = 0$ poate fi pusă sub forma

$$z = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z \operatorname{erf}(z) - \frac{K_{kj}}{\Omega_{jk}} V_j^{dc} - F(z_{jk}^0; -1) = g(z), \tag{36}$$

iar conform cu [3], [4] condiția de convergență

$$|g'(z)| = \left| -2z\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2z}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2} \right| \leqslant \lambda < 1, \tag{37}$$

este într-adevăr îndeplinită pentru întregul domeniu de variație ($-\infty \ldots +\infty$) a argumentului z.

Cu argumentul z^s_{jk} determinat, concentrația de secționare se poate stabili din relația

$$C^s_{kj} = \frac{1}{2}[1 - \text{erf}\ (z^s_{jk})], \tag{38}$$

iar în cazul în care $C^s_{jk} > C^s_{kj}$ se ia $C^s_{jk} = C^s_{kj}$.

5. PROBLEMA DE OPTIM PENTRU CAZUL $V^c_j < V^{mc}_j$

Această problemă de optim a fost enunțată anterior, și pentru analiza ei se vor face referiri la figura 3, după cum pentru prezentarea detaliilor problemei se fac următoarele notații și mențiuni:

C_j — costul produsului de indice j, [lei/kg];
ρ_j — densitatea produsului P_j, [kg/m³];
σ — valoarea investiției per m³ volum de depozitare, [lei/m³];
α — coeficientul anual de amortizare;
C_s — costurile ce includ retribuția și valoarea utilităților energetice corespunzătoare întreținerii și exploatării unui m³ volum de depozitare pe an, [lei/m³ · an];
T — numărul de zile dintr-un an afectate pompărilor succesive pe conducta dată de transport;
k — numărul anual de cicluri;
G_{zj}, G_{cj}, — pierderile specifice de produs P_j prin respirația mică (zilnică), respectiv mare (ciclică) a rezervoarelor, [kg/m³ · zi], respectiv [kg/m³ · ciclu];
P_r — prețul transportului amestecului pentru rerafinare [lei/kg · km];
D_t — distanța pe care trebuie transportat amestecul pentru rerafinare, [km];
C_{jk} — costul rerafinării amestecului de produse P_j și P_k, [lei/kg];
η_j — coeficientul de umplere al rezervorului cu produsul P_j;
z^{0c}_{jk}, y^{0c}_{ij} — argumentele concentrațiilor optime C^0_{jk}, respectiv C^0_{ij} la un număr dat k de cicluri anuale ținînd seama că aceste concentrații depind de k;
z, y — argumentul funcției concentrației din ZA_{jk}, respectiv ZA_{ij}.

a) Pentru zona de amestec ZA_{jk} se definesc:
— modulul volumului

$$\Omega_{jk} = V_c\sqrt{\frac{\varkappa_{jk}}{\mathscr{P}_{jk}}};$$

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA 1965 BUCUREȘTI

— volumul de produs P_k ce va intra în rezervorul produsului P_j cînd ZA_{jk} se va secționa după concentrația C^s_{jk};

$$V_k^{amc}\Big|_0^{C^s_{jk}} = \Omega_{jk}\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - z(1 - \operatorname{erf}(z))\right] = \Omega_{jk}F(z\,;\,-1)\,;$$

— volumul de produs P_j rămas în amestec atunci cînd zona ZA_{jk} se secționează după concentrația C^s_{jk}

$$V_j^{amc}\Big|_{C^s_{jk}}^1 = \Omega_{jk}\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z(1 + \operatorname{erf}(z))\right] = \Omega_{jk}F(z\,;\,1).$$

b) Pentru zona de amestec ZA_{ij} se definesc următoarele:
— modulul volumului

$$\Omega_{ij} = V_c\sqrt{\frac{\varkappa_{ij}}{\mathscr{P}_{ij}}}\,;$$

— volumul de produs P_i care va intra în rezervorul produsului P_j cînd ZA_{ij} se va secționa după concentrația C^s_{ji} (în domeniul argumentului y)

$$V_i^{amc}\Big|_{C^s_{ji}}^1 = \Omega_{ij}\left[\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} + y(1 + \operatorname{erf}(y))\right] = \Omega_{ij}F(y\,;\,1)\,;$$

— volumul de produs P_j ce va rămîne în amestec, atunci cînd ZA_{ij} este secționată după concentrația C^s_{ji}

$$V_j^{amc}\Big|_0^{C^s_{ji}} = \Omega_{ij}\left[\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} - y(1 - \operatorname{erf}(y))\right] = \Omega_{ij}F(y\,;\,-1).$$

Pierderea datorită deversării unui produs superior P_k în rezervorul produsului inferior P_j este

$$C'_{ap} = \rho_k V_k^{amc}\Big|_0^{C^s_{jk}}(C_k - C_j) = \Omega_{jk}\rho_k(C_k - C_j)F(z\,;\,-1),$$

iar profitul datorat deversării unui produs inferior P_i în rezervorul produsului P_j va fi

$$C''_{ap} = \rho_i V_i^{amc}\Big|_{C^s_{ji}}^1(C_j - C_i) = \Omega_{ij}\rho_i(C_j - C_i)F(y\,;\,1).$$

Costurile aferente amestecării produselor la secționarea celor două zone de amestec după concentrațiile propuse, pentru un număr anual de cicluri k, vor fi date de relația

$$C_{ap} = k[\Omega_{jk}\rho_k(C_k - C_j)\,F(z\,;\,-1) - \Omega_{ij}\rho_i(C_j - C_i)F(y\,;\,1)]. \quad (39)$$

Datorită secționării zonelor ZA_{jk} și ZA_{ij}, din punctul de vedere al produsului P_j, după noile concentrații C^s_{jk}, respectiv C^s_{ji}, cel puțin volumele

$$V^{sc}_{ji}\Big|^{C^s_{ji}}_{C^0_{ij}} = 2\Omega_{ij}(y^{0c}_{ij} - y)$$

din zona ZA_{ij} și, respectiv,

$$V^{sc}_{jk}\Big|^{C^0_{jk}}_{C^s_{jk}} = 2\Omega_{jk}(z - z^{0c}_{jk})$$

din zona ZA_{jk}, vor fi depozitate în rezervoare speciale de amestec pentru a fi apoi expediate spre rerafinare. În acest fel costurile aferente transportului și rerafinării acestor amestecuri la un număr k de cicluri anuale, vor fi date de relația

$$C_{raf} = 2k[\Omega_{jk}\rho_{jk}(P_rD_t + C^r_{jk})(z - z^{ac}_{jk}) + \Omega_{ij}\rho_{ij}(P_rD_t + C^r_{ij})(y^{0c}_{ij} - y)]. \quad (40)$$

Se admite legea aditivității pentru densitățile amestecurilor de produse și atunci se poate nota

$$\rho_{jk} = \frac{\rho_j V^{amc}_j\Big|^{C^0_{jk}}_{C^s_{jk}} + \rho_k V^{amc}_k\Big|^{C^0_{jk}}_{C^s_{jk}}}{V^{amc}\Big|^{C^0_{jk}}_{C^s_{jk}}} =$$

$$= \frac{\rho_j\Omega_{jk}|F(z\,;\,1) - F(z^{0c}_{jk}, 1)| + \rho_k\Omega_{jk}|F(z^{0c}_{jk}\,;\,-1) - F(z\,;\,-1)|}{2\Omega_{jk}|\,z - z^{0c}_{jk}|} \quad (41)$$

respectiv

$$\rho_{ji} = \frac{\rho_i|F(y^{0c}_{ij}\,;\,1) - F(y\,;\,1)| + \rho_j|F(y\,;\,-1) - F(y^{0c}_{ij}\,;\,-1)|}{2\,|y^{0c}_{ij} - y|}. \quad (42)$$

Similar, se admite legea aditivității pentru costurile de rerafinare ale amestecurilor, ținînd seama de costurile produselor curate

$$C^r_{jk} = \frac{\rho_jC_j|F(z\,;\,1) - F(z^{0c}_{jk}\,;\,1)| + \rho_kC_k|F(z^{0c}_{jk}\,;\,-1) - F(z\,;\,-1)|}{2\,\rho_{jk}|z - z^{0c}_{jk}|}, \quad (43)$$

respectiv

$$C^r_{ij} = \frac{\rho_iC_i|F(y^{0c}_{ij}, 1) - F(y\,;\,1)| + \rho_jC_j|F(y\,;\,-1) - F(y^{0c}_{ij}\,;\,-1)|}{2\,\rho_{ij}|\,y^{0c}_{ij} - y|}, \quad (44)$$

în care pentru ρ_{jk}, și ρ_{ji} trebuie să se țină seama de relațiile (41) și (42). Cu relațiile (41)...(44) expresia costului privind rerafinarea produselor

devine

$$C_{raf} = 2k[\Omega_{jk}(P_r D_t(\rho_j(F(z;1) - F(z_{jk}^{0c};1)) + \rho_k(F(z_{jk}^{0c};-1) -$$

$$- F(z;-1))) + \rho_j C_j(F(z;1) - F(z_{jk}^{0c};1)) + \rho_k C_k(F(z_{jk}^{0c};-1) -$$

$$- F(z;-1))) + \Omega_{ij}(P_r D_t(\rho_i(F(y_{ij}^{0c};1) - F(y;1)) +$$

$$+ \rho_j(F(y;-1) - F(y_{ij}^{0c};-1))) + \rho_i C_i(F(y_{ij}^{0c};1) -$$

$$- F(y;1)) + \rho_j C_j(F(y;1) - F(y_{ij}^{0c};-1)))]. \quad (45$$

În ceea ce privește volumele de depozitare, este necesar să fie luate în considerație :

— volumul de depozitare pentru produsul P_j

$$V_j^{rez} = \frac{V_k^{amc}|_0^{C_{jk}^s}}{\eta_j K_{kj}} + \frac{V_i^{amc}|_{C_{ji}^s}^1}{\eta_j K_{kj}} = \frac{\Omega_{jk}}{\eta_j K_{kj}} F(z;-1) + \frac{\Omega_{ij}}{\eta_j K_{ij}} F(y;1), \quad (46)$$

în care s-a ținut seama de coeficientul de umplere a rezervorului V_j pentru produsul P_j ;

— volumele de depozitare pentru produsele de amestec care trebuie să preia $\frac{1}{n_c} = \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{10}$ din volumul total (anual) al amestecului.

$$V_{ij}^{rez} = 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{ij}}{\eta_{ji}}(y_{ij}^{0c} - y)\,;\; V_{jk}^{rez} = 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega}{\eta_{jk}}(z - z_{jk}^{0c}), \quad (47)$$

în care se poate pune

$$\eta_{jx} = \begin{cases} \eta_x & \text{dacă } \eta_x > \eta_j \\ \eta_j & \text{dacă } \eta_j > \eta_x \end{cases} \quad \text{și } x = \{i, k\}. \quad (48)$$

Cheltuielile legate de investițiile, exploatarea și întreținerea volumelor de depozitare se obțin din relația

$$I_{rez} = (\sigma \cdot \alpha + C_s)\,[V_j^{rez} + V_{ij}^{rez} + V_{jk}^{rez}],$$

sau, dacă se ține seama de expresiile (45), (47), se poate scrie

$$I_{rez} = (\sigma \cdot \alpha + C_s)\left[\frac{\Omega_{jk}}{\eta_j K_{kj}} F(z;-1) + \frac{\Omega_{ij}}{\eta_j K_{ij}} F(y;-1) + \right.$$

$$\left. + 2\frac{k}{n_c}\left(\frac{\Omega_{jk}}{\eta_{jk}}(z - z_{jk}^{0c}) + \frac{\Omega_{ij}}{\eta_{ij}}(y_{ij}^{0c} - y)\right)\right]. \quad (49)$$

Dacă se admite, de asemenea, legea aditivității la determinarea pierderilor specifice zilnice și ciclice pentru amestecurile de produse, vom avea

$$G_{zjk} = \frac{G_{zj}|F(z;1) - F(z_{jk}^{0c};1)| + G_{zk}|F(z_{jk}^{0c};-1) - F(z;-1)|}{2|z - z_{jk}^{0c}|},$$

$$G_{zji} = \frac{G_{zi}|F(y_{ij}^{0c};1) - F(y;1) + G_{zj}|F(y;-1) - F(y_{ij}^{0c};-1)|}{2|y_{ij}^{0c} - y|},$$

$$G_{cjk} = \frac{G_{cj}|F(z;1) - F(z_{jk}^{0c};1)| + G_{ck}|F(z_{jk}^{0c};1) - F(z;-1)|}{2|Z - Z_{jk}^{0c}|}, \tag{50}$$

$$G_{cji} = \frac{G_{ci}|F(y_{ij}^{0c};1) - F(y;1)| + G_{cj}|F(y;-1) - F(y_{ij}^{0c};-1)}{2|y_{ij}^{0c} - y|},$$

iar costurile legate de pierderi de produse prin respirația zilnică și ciclică a rezervoarelor pot fi determinate din relația

$$P_{rez} = C_j(TG_{zj} + kG_{cj})\left[\frac{\Omega_{jk}}{\eta_j K_{kj}}F(z;-1) + \frac{\Omega_{ij}}{\eta_j K_{ij}}F(z;1)\right] +$$

$$+ 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{jk}}{\eta_{jk}}[TG_{zj}(F(z;1) - F(z_{jk}^{0c};1)) + TG_{zk}(F(z_{jk}^{0c};-1) -$$

$$- F(z;-1)) + n_c G_{cj}(F(z;1) - F(z_{jk}^{0c};1)) + n_c G_{ck}(F(z_{jk}^{0c};-1) -$$

$$- F(z;-1))]C_{jk} + 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{ij}}{\eta_{ij}}[TG_{zi}(F(y_{ij}^{0c};1) - F(y;1)) +$$

$$+ TG_{zj}(F(y;-1) - F(y_{ij}^{0c};-1)) + n_c G_{ci}(F(y_{ij}^{0c};1) - F(y;1)) +$$

$$+ n_c G_{cj}(F(y;-1) - F(y_{ij}^{0c};-1))]C_{ij}, \tag{51}$$

în care prețurile produselor de amestec pot fi considerate

$$C_{jk} = \frac{C_j + C_k}{2}, \text{ respectiv } C_{ij} = \frac{C_i + C_j}{2}.$$

Costul total, în problema de optim dată, se obține din expresia:

$$C_{ost} = C_{ap} + C_{raf} + I_{rez} + P_{rez} \tag{52}$$

iar dacă introducem notațiile

$$C_1 = k\Omega_{jk}\Big[P_r D_t(\rho_j - \rho_k) + (\rho_j C_j - \rho_k C_k) +$$

$$+ \frac{C_j + C_k}{2n_c\eta_{jk}}(TG_{zj} - TG_{zk} + n_c G_{cj} - n_c G_{ck}) + \rho_k(C_k - C_j) +$$

$$+ \frac{\sigma\alpha + C_s}{k\eta_j K_{kj}} + (TG_{zj} + kG_{cj})\frac{C_j}{k\eta_j K_{kj}}\Big],$$

$$C_2 = k\Omega_{ij}\Big[P_r D_t(\rho_j - \rho_i) + (\rho_j C_j - \rho_i C_i) +$$

$$+ \frac{C_j + C_i}{2n_c\eta_{ij}}(TG_{zj} - TG_{zi} + n_c C_{cj} - n_c G_{ci}) + \rho_i(C_i - C_j) +$$

$$+ \frac{\sigma\alpha + C_s}{k\eta_j K_{ij}} + (TG_{zj} + kG_{cj})\frac{C_j}{k\eta_j K_{ij}}\Big],$$

$$C_3 = 2k\Omega_{jk}\Big[P_r D_t\rho_j + \rho_j C_j + \frac{C_j + C_k}{2n_c\eta_{jk}}(TG_{zj} + n_c G_{cj}) + \frac{\sigma\alpha + C_s}{n_c\eta_{jk}}\Big], \quad (53)$$

$$C_4 = 2k\Omega_{ij}\Big[P_r D_t\rho_j + \rho_j C_j + \frac{C_j + C_i}{2n_c\eta_{ij}}(TG_{zj} + n_c G_{cj}) + \frac{\sigma\alpha + C_s}{n_c\eta_{ij}}\Big],$$

$$C_5 = k\Big[\Omega_{jk}(P_r D_t\rho_k F(z_{jk}^{0c}; -1) - P_r D_t\rho_j F(z_{jk}^{0c}; 1) - \rho_j C_j F(z_{jk}^{0c}; 1) +$$

$$+ \rho_k C_k F(z_{jk}^{0c}; -1) - 2\frac{\sigma\alpha + C_s}{n_c\eta_{jk}} z_{ij}^{0c} +$$

$$+ \frac{C_j + C_k}{2n_c\eta_{jk}}(TG_{zk}F(z_{jk}^{0c}; -1) - TG_{zj}F(z_{jk}^{0c}; 1) +$$

$$+ n_c G_{ck}F(z_{jk}^{0c}; -1) - n_c G_{ij}F(z_{jk}^{0c}; 1))) + \Omega_{ij}(P_r D_t\rho_i F(y_{ij}^{0c}; 1) -$$

$$- P_r D_t\rho_j F(y_{ij}^{0c}; -1) + \rho_i C_i F(y_{ij}^{0c}; 1) - \rho_j C_j F(y_{ij}^{0c}; -1) +$$

$$+ 2\frac{\sigma\alpha + C_s}{n_c\eta_{ij}} y_{ij}^{0c} + \frac{C_j + C_i}{2n_c\eta_{ij}}(TG_{zi}F(y_{ij}^{0c}; 1) - TG_{zj}F(y_{ij}^{0c}; -1) +$$

$$+ n_c G_{ci}F(y_{ij}^{0c}; 1) - n_c G_{cj}F(y_{ij}^{0c}; -1)))\Big],$$

expresia costului total (52) poate fi transcrisă sub forma

$$C_{ost} = C_1F(z\,;\,-1) + C_2F(y\,;\,1) + C_3z - C_4y + C_5, \tag{54}$$

în care $C_1 \ldots C_5$ reprezintă niște constante pentru un număr dat k de cicluri anuale.

Pe de altă parte, între zonele de amestec ZA_{jk} și ZA_{ij} trebuie să existe relația de legătură de tipul (26) și anume

$$F(y\,;\,A_y) = \mu_1 - \mu_2F(z\,;\,A_z), \tag{55}$$

în care μ_1, μ_2 sînt date de (25), iar A_y și A_z sînt constante dependente de concentrațiile admisibile ale produselor implicate în analiză

$$A_y = \frac{1 - K_{ij}}{1 + K_{ij}}; \quad A_z = \frac{1 - K_{kj}}{1 + K_{kj}}. \tag{56}$$

Admițînd în (54) pe z drept variabila independentă, din figura 3 rezultă că această variabilă are drept limită inferioară de variație z^{0c}_{jk} corespunzătoare concentrației C^{0c}_{jk}, iar variabila y are limita superioară y^{0c}_{ij} corespunzătoare concentrației C^{0c}_{ij}. Limita superioară pentru z se poate stabili astfel încît y să nu-și depășească limita sa superioară și ca urmare din (55) se deduce

$$F(Z_{ls}\,;\,-A_z) = \frac{\mu_1 - F(y^{0c}_{ij}\,;\,A_y)}{\mu_2} \to z_{ls}. \tag{57}$$

Dacă $z_{ls} > 3$ se va lua $z_{ls} = 3$ (pentru că erf(3) $\cong$ 1) și similar, limita inferioară pentru y se stabilește astfel încît z să nu-și depășească limita sa inferioară și anume astfel

$$F(y_{li}\,;\,A_y) = \mu_1 - \mu_2F(z^{0c}_{jk}\,;\,-A_z) \to y_{li}, \tag{58}$$

iar în cazul în care $y_{li} > 3$, se va lua $y_{li} = 3$.

Avînd posibilitatea de a stabili limitele de variație ale variabilei independente z, problema de optim, pentru cazul dat al secționării zonelor de amestec, poate fi formulată astfel:

„să se determine variabila z pentru:

$$\min[C_1F(z\,;\,-1) + C_2F(y\,;\,1) + C_3z - C_4z + C_5],$$

cu restricțiile:

$$z^{0c}_{jk} - z \leqslant 0\,; \quad z - z_{ls} \leqslant 0, \tag{59}$$

și relația de legătură:

$$F(y\,;\,A_y) = \mu_1 - \mu_2F(z\,;\,-A_z),$$

funcția obiectiv nefiind explicită".

Funcția Lagrange în cazul utilizării multiplicatorilor Lagrange [5] este

$$L(z, w_1^2, w_2^2, \lambda_1, \lambda_2) = C_1F(z\,;\,-1) + C_2F(y\,;\,1) + C_3z - C_4y + C_5 +$$

$$+ \lambda_1 (w_1^2 + z_{jk}^{0c} - z) + \lambda_2(w_2^2 + z - z_{ls}). \tag{60}$$

Derivatele parțiale ale funcției Lagrange egalate cu zero vor da condițiile pentru obținerea unui punct staționar

$$\frac{\partial L}{\partial z} = -C_1[1 - \operatorname{erf}(z)] + C_2[1 + \operatorname{erf}(z)]\frac{dy}{dz} + C_3 - C_4\frac{dy}{dz} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = w_1^2 + z_{jk}^{0c} - z = 0\,; \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = w_2 + z - z_{ls} = 0\,; \tag{61}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = 2\lambda_1 w_1 = 0\,; \qquad \frac{\partial L}{\partial w_2} = 2\lambda_2 w_2 = 0,$$

în care w_1, w_2 sînt variabilele auxiliare, iar λ_1, λ_2 sînt multiplicatorii lui Lagrange. Din relația de legătură (55) rezultă

$$\frac{dy}{dz} = 2\frac{A_z - \operatorname{erf}(z)}{A_y + \operatorname{erf}(y)}. \tag{62}$$

Ținînd seama că restricțiile nu se pot anula decît dacă w_1, $w_2 = 0$, rezultă condițiile necesare Kuhn-Tucker pentru un minim local și pentru unul global

$$-C_1[1 - \operatorname{erf}(z)] + \mu_2C_2[1 + \operatorname{erf}(y)]\frac{A_z - \operatorname{erf}(z)}{A_y + \operatorname{erf}(y)} +$$

$$+ C_3 - \mu_2C_4\frac{A_z - \operatorname{erf}(z)}{A_y + \operatorname{erf}(y)} - \lambda_1 + \lambda_2 = 0\,;$$

$$z_{jk}^{0c} - z \leqslant 0\,; z - z_{ls} \leqslant 0\,; \tag{63}$$

$$\lambda_1(z_{jk}^{0c} - z) = 0\,; \quad \lambda_2(z - z_{ls}) = 0\,; \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \geqslant 0.$$

Aceste „condiții" nu sînt însă operabile în vederea stabilirii minimului căutat, deoarece prima funcție din (63) nu devine explicită în raport cu z datorită formei funcțiilor $F(z\,;-1)$, $F(y\,;1)$ și a relației de legătură. Rezolvarea problemei de optim enunțate nu se poate realiza prin metodele analitice clasice, dar poate fi realizată, în orice caz, prin metode numerice.

6. PROBLEMA DE OPTIM PENTRU CAZUL :

$$(V_j^c > V_j^{mc}) \cap ((V_i^c < V_i^{mc}) \cap (V_k^c < V_k^{mc}))$$

În această variantă produsul P_j are unele disponibilități în raport cu volumul său minim, iar zonele adiacente nu pot fi secționate, din punctul de vedere al produsului $P_i (i = j - 1)$ și al produsului $P_k (k = j + 1)$, după concentrațiile optime corespunzătoare. Problema de optim a fost enunțată mai înainte și, referindu-ne la cazul general cînd $C_{ij}^s \neq C_{ji}^s$ și $C_{ij}^s < C_{ji}^s$, respectiv $C_{kj}^s \neq C_{jk}^s$ și $C_{kj}^s > C_{jk}^s$, „redistribuirea" disponibilului de produs P_j trebuie realizată astfel în cadrul zonelor adiacente încît costul total aferent acestei variante să fie minim.

Procedînd similar ca în cazul precedent, într-o prezentare sintetizată, vom putea scrie :

a) costul datorat amestecării produselor :

$$C_{ap} = k[\Omega_{jk}\rho_k(C_k - C_j)F(z\,;-1) - \Omega_{ij}\rho_i(C_j - C_i)F(y\,;1)]\,; \quad (64)$$

b) costul rerafinării produselor ținînd seama și de transportul lor pînă la locul rerafinării :

$$\begin{aligned} C_{raf} = k[&\Omega_{jk}(P_r D_t(\rho_j(F(z\,;1) - F(z_{jk}^{0c}\,;1)) + \rho_k(F(z_{kj}^{sc}\,;-1) - F(z\,;-1))) + \\ &+ \rho_j C_j(F(z\,;1) - F(z_{kj}^{sc}\,;1)) + \rho_k C_k(F(z_{kj}^{sc}\,;-1) - F(z\,;-1))) + \\ &+ \Omega_{ij}(P_r D_t(\rho_i(F(y_{ij}^{sc}\,;1) - F(y\,;1)) + \rho_j(F(y\,;-1) - F(y_{ij}^{sc}\,;-1))) + \\ &+ \rho_i C_i(F(y_{ij}^{sc}\,;1) - F(y\,;1) + \rho_j C_j(F(y\,;-1) - F(y_{ij}^{sc}\,;-1)))], \end{aligned} \quad (65)$$

cu mențiunea că în acest caz în locul concentrațiilor optime de secționare din zonele ZA_{ij} și ZA_{jk} trebuie să fie luate în considerație concentrațiile de secționare C_{ij}^{sc}, respectiv C_{kj}^{sc} cu argumentele lor y_{ij}^{sc}, respectiv z_{kj}^{sc} ;

c) în privința volumelor de depozitare se poate pune

— pentru produsul curat P_j :

$$V_j^{rez} = \frac{1}{\eta_j}[V_j^c - 2(\Omega_{jk}z - \Omega_{ij}y)]\,; \quad (66)$$

— pentru produsele de amestec :

$$V_{ij}^{rez} = 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{ij}}{\eta_{ij}}(y_{ij}^{sc} - y), \text{ respectiv } V_{jk}^{rez} = 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{jk}}{\eta_{jk}}(z - z_{kj}^{sc})\,; \quad (67)$$

d) costurile privind amortizarea investițiilor pentru volumele de depozitare, a exploatării și întreținerii lor :

$$I_{rez} = (\sigma\alpha + C_s)\left[\frac{V_j^c - 2(\Omega_{jk}z - \Omega_{ij}y)}{\eta_{ij}} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{jk}}{\eta_{jk}}(z - z_{kj}^{sc}) + 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{ij}}{\eta_{ij}}(y_{ij}^{sc} - y)\right]; \qquad (68)$$

e) costurile privind pierderile de produse prin respirația (zilnică și ciclică) a rezervoarelor

$$P_{rez} = C_j(TG_{zj} + kG_{cj})\frac{V_j^c - 2(\Omega_{jk}z - \Omega_{ij}y)}{\eta_{ij}} + 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{jk}}{\eta_{jk}}[TG_{zj}(F(z\,;1) -$$

$$- F(z_{kj}^{sc}\,;1)) + TG_{zk}(F(z_{kj}^{sc}\,;-1) - F(z\,;-1)) + n_cG_{cj}(F(z\,;1) -$$

$$- F(z_{kj}^{sc}\,;1)) + n_cG_{ck}(F(z_{kj}^{sc}\,;-1) - F(z\,;-1))] +$$

$$+ 2\frac{k}{n_c}\frac{\Omega_{ij}}{\eta_{ij}}[TG_{zi}(F(y_{ij}^{sc}\,;1) - F(y\,;1)) + TG_{zj}(F(y\,;-1) -$$

$$- F(y_{ij}^{sc}\,;-1)) + n_cG_{ci}(F(y_{ij}^{sc}\,;1) - F(y\,;1)) + n_cG_{cj}(F(y\,;-1) -$$

$$- F(y_{ij}^{sc}\,;-1))].$$

Costul total, în problema de optim dată, se obține ținînd seama de toate costurile parțiale și este

$$C_{ost} = C_{ap} + C_{raf} + I_{rez} + P_{rez}, \qquad (70)$$

iar dacă introducem notațiile pentru $C_1 \ldots C_4$ după relațiile (53) și se ia, tot din (53)

$$C_5' = C_5(z_{jk}^{0c} = z_{kj}^{sc}\,;\; y_{ij}^{0c} = y_{ij}^{sc}), \qquad (71)$$

atunci (70) poate fi transcris astfel

$$C_{ost} = C_1F(z\,;-1) + C_2F(y\,;1) + C_3z - C_4y + C_5'. \qquad (72)$$

Din analiza celor de mai sus rezultă următoarele :

— relația costului total are aceeași formă ca și cea precedentă, avînd în vedere că însăși problema pusă este „simetrică" celei din varianta precedentă ;

— dintre constantele din (54) și (72) diferă numai C_5 și C_5', între ele fiind stabilită o relație de corespondență (71) ;

— în ceea ce privește definirea problemei de optim pentru această variantă, se poate constata imediat că se modifică numai restricțiile sub forma

$$z_{kj}^{sc} - z \leqslant 0, \text{ respectiv } z - z_{ls} \leqslant 0, \tag{73}$$

în care z_{ls} se determină prin metode numerice din expresia :

$$F(z_{ls}; -1) = \frac{\mu_1 - F(y_{ij}^{sc}; 1)}{\mu_2}, \tag{74}$$

celelalte aspecte privind rezolvarea acestei probleme de optim fiind valabile, în mod evident, și în acest caz.

7. O SOLUȚIE PENTRU PROBLEMELE DE OPTIM PRECEDENTE

În paragrafele anterioare s-a arătat că determinarea minimului pentru o funcție de costuri de tip

$$C_{ost} = C_1F(z; -1) + C_2F(y; 1) + C_3z - C_4y + C_5,$$

în care variabila z, considerată variabila independentă, are un domeniu definit de variație, iar variabila y este dependentă de z prin, așa-numita, „relație de legătură" de tipul

$$F(y; A_y) = \mu_1 - \mu_2F(z; -A_z),$$

nu a fost posibilă prin metoda analitică a multiplicatorilor lui Lagrange pentru că nu se obțin relații explicite în z. Prin alte metode se ajunge la același impas, datorită expresiilor complicate ale funcțiilor de tip $F(u; A)$, care au fost definite anterior. Aceste funcții au unele proprietăți interesante al căror studiu merită să fie adîncit avînd în vedere că multe probleme de optim, mai ales cele privitoare la secționarea zonelor de amestec, conțin acest tip de funcții.

În ceea ce privește problemele de optim din paragrafele precedente, un studiu mai atent efectuat asupra funcției obiectiv (C_{ost}) și a „relației de legătură" conduce la unele concluzii interesante, din care apoi se poate extrage soluția problemelor respective.

Astfel, în primul rînd, relația costului se poate scrie detaliat sub forma

$$C_{ost} = C_1\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - z(1 - \operatorname{erf}(z))\right] + C_2\left[\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} + y(1 + \operatorname{erf}(y))\right] + \\ + C_3z - C_4y + C_5,$$

sau

$$C_{ost} = C_1\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z\left(\frac{C_3 - C_1}{C_1} + \operatorname{erf}(z)\right)\right] + \\ + C_2\left[\frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} + y\left(\frac{C_2 - C_4}{C_2} + \operatorname{erf}(y)\right)\right] + C_5,$$

ceea ce se poate transcrie sub forma

$$C_{ost} = C_1 F\left(z; \frac{C_3 - C_1}{C_1}\right) + C_2 F\left(y; \frac{C_2 - C_4}{C_2}\right) + C_5. \quad (75)$$

În (75) funcția $F\left(y; \frac{C_2 - C_4}{C_2}\right)$ trebuie înlocuită printr-o „relație de legătură" corespunzătoare, astfel încît în relația costului să apară numai argumentul z. Cu alte cuvinte, apare următoarea problemă: avînd, în cazul general, o expresie liniară

$$F(u; \nu_1') = \mu_1 - \mu_2 F(v; -\nu_2'), \quad (76)$$

ce valoare trebuie să ia parametrul ν_2, atunci cînd parametrul ν_1 capătă valoarea ν_1'', iar coeficienții expresiei liniare rămîn aceiași? Din cele anterioare rezultă cu necesitate

$$F(u; \nu_1'') = \mu_1 - \mu_2 F(v; -\nu_2'') \quad (77)$$

și făcînd diferența dintre (76) și (77), rezultă imediat

$$u(\nu_1' - \nu_1'') = \mu_2(\nu_2' - \nu_2'')\, v, \quad (78)$$

unde s-a ținut seama și de relația de definiție (16). Dar pentru că u și v reprezintă de fapt argumentele uneia și aceleiași funcții de eroare, din (78) rezultă că noua valoare pe care trebuie s-o adoptăm pentru parametrul ν_2 este

$$\nu_2'' = \nu_2' - \frac{\nu_1' - \nu_1''}{\mu_2}. \quad (79)$$

Revenind la expresia costului total din (75) și ținînd seama de cele precizate anterior, se poate pune

$$C_{ost} = C_1 F\left(z; \frac{C_3 - C_1}{C_1}\right) + \mu_1 C_2 - \mu_2 C_2 F\left(z; -\frac{\mu_2 C_2 A_z - C_2 A_y + C_2 - C_4}{\mu_2 C_2}\right) + C_5. \quad (80)$$

Dacă se utilizează proprietatea aditivității pentru funcțiile de tip $F(v; \nu)$ și anume

$$\beta_1 F(v; \nu_1) + \beta_2 F(v; \nu_2) = (\beta_1 + \beta_2)\left[\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{\pi}} + v\left(\frac{\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2}{\beta_1 + \beta_2} + \operatorname{erf}(v)\right)\right] =$$

$$= (\beta_1 + \beta_2) F\left(v; \frac{\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2}{\beta_1 + \beta_2}\right), \quad (81)$$

relația (80) poate fi transcrisă sub forma

$$C_{ost} = (C_1 - \mu_2 C_2)F\left(z; \frac{C_2 + C_3 - (C_1 + C_4) + C_2(\mu_2 A_z - A_y)}{C_1 - \mu_2 C_2}\right) + \mu_1 C_2 + C_5. \tag{82}$$

Ținînd seama de expresia (16), dacă se derivează relația costului total (82) în raport cu z și se egalează cu zero, se găsește

$$(C_1 - \mu_2 C_2)\left[\frac{C_2 + C_3 - (C_1 + C_4) + C_2(\mu_2 A_z - A_y)}{C_1 - \mu_2 C_2} + \operatorname{erf}(z)\right] = 0,$$

din care rezultă imediat

$$\operatorname{erf}(z_{jk}^{osc}) = \frac{C_2 + C_3 - (C_1 + C_4) + C_2(\mu_2 A_z - A_y)}{C_1 - \mu_2 C_2}, \tag{84}$$

unde z_{jk}^{osc} reprezintă argumentul adimensional optim al funcției de eroare cu ajutorul căreia se obține concentrația la care trebuie să se efectueze secționarea zonei ZA_{jk} în condițiile problemelor de optim date. După relația (56) pentru A_y și A_z și relația generală pentru concentrație, rezultă

$$C_z(z_{jk}^{osc}) = \frac{1}{(C_1 - \mu_2 C_2)(1 + K_{kj})(1 + K_{ij})} \times \tag{85}$$

$$\times\left[\frac{C_4 - C_3}{2}(1 + K_{kj})(1 + K_{ij}) - \mu_2 C_2(1 + K_{ij}) - C_2 K_{ij}(1 + K_{kj})\right]$$

Găsind z_{jk}^{osc} din relația (85) sau (84), cu ajutorul „relației de legătură”:

$$F(y_{ij}^{osc}; A_y) = \mu_1 - \mu_2 F(z_{jk}^{osc}; -A_z), \tag{86}$$

se determină, prin metode numerice argumentul y_{ij}^{osc} corespunzător zonei ZA_{ij}, iar cu aceasta concentrația de secționare a zonei respective

$$C_y(y_{ij}^{osc}) = \frac{1}{2}[1 - \operatorname{erf}(y_{ij}^{osc})], \tag{87}$$

problema fiind în acest fel încheiată.

Ceea ce rămîne însă important de reținut, este faptul că argumentul adimensional z_{kj}^{osc} (evident și y_{ij}^{osc}) ar putea să iasă din domeniul de variație $z_{ls} \ldots z_{jk}^{oc}$ admis pentru acest argument. Cu alte cuvinte, soluția propusă nu operează și cu restricțiile problemelor de optim propriu-zise enunțate anterior, dar pentru simplitatea rezultatelor obținute, se consideră că verificările privind încadrarea argumentelor z_{jk}^{osc} și y_{ij}^{osc} în limitele admise

și eventual „reducerea" lor la una din limitele (superioară sau inferioară) intervalului, rămîn o problemă de rutină curentă.

Dacă se fac notațiile:

$$\nu = C_1 - \mu_2 C_2; \quad \beta = \frac{1}{\nu}[C_2 + C_3 - (C_1 + C_4) + C_2(\mu_2 A_z - A_y]; \tag{88}$$

$$\theta = \mu_1 C_2 + C_5$$

atunci expresia costului total devine

$$C_{ost} = \nu F(z; \beta) + \theta \tag{89}$$

în care primii doi parametri din (88) pot fi denumiți „coeficienți de formă" ai caracteristicii costului pentru că ei stabilesc alura acestei caracteristici. În cazul în care $\beta = 0$, atunci $z_{jk}^{osc} = 0$, iar $C_z(z_{jk}^{osc}) = 0{,}5$.

8. CONCLUZII

Secționarea zonelor de amestec ce se formează la pomparea succesivă a produselor petroliere, în vederea recuperării unor părți ale acestora sau în totalitatea lor, atunci cînd aceste zone ajung la capătul final al conductei își are importanța sa incontestabilă, recunoscută de altfel de întreaga literatură de specialitate. Efectuarea în condițiile optime a acestor operațiuni pentru diverse variante ale posibilităților de recuperare a unor cantități cît mai mari din amestecul de produse ridică însă probleme complexe.

În scopul găsirii unor „elemente de reazem" la realizarea unui astfel de studiu s-a utilizat din [1] conceptul de concentrație optimă de secționare, iar în cadrul acestei lucrări s-a definit noțiunea de volum minim pentru un produs P_j pompat succesiv, ambele noțiuni fiind utilizate ca parametri de referință. În raport cu acești parametri se analizează cazurile reale ale partidelor de produse din cadrul unui ciclu de pompări succesive „extrăgîndu-se" variantele cele mai semnificative pentru care se caută soluțiile optime de secționare ale zonelor de amestec. Pentru două dintre aceste variante, care posedă o anumită simetrie una în raport cu alta, nu pot fi găsite soluții optima prin metoda multiplicatorilor lui Lagrange sau a altor metode clasice.

Problemele respective își găsesc o soluție printr-o analiză mai amănunțită efectuată asupra funcției obiectiv (funcția costului total) și a unor relații de legătură dintre elementele funcției obiectiv. Singura „corecție" ce trebuie eventual aplicată soluției găsite este aceea a reîncadrării sale în domeniul admisibil de variație pentru argumentul funcției obiectiv, cînd aceasta iese în afara sa, prin adaptarea limitei de interval corespunzătoare.

Ca în majoritatea cazurilor, la astfel de probleme de optim, funcția obiectiv este un cost, însă complexitatea sa deosebită rezultă din faptul

că sînt implicați practic toți parametrii tehnico-economici ce pot fi luați în considerație la secționarea unei zone de amestec.

Modelele propuse pentru problemele de optim privind secționarea zonelor de amestec pot fi rezolvate în general prin metode numerice, datorită structurii unor funcții mai deosebite, însă aspecte deosebite în aplicarea tehnicilor calculului automat nu apar, ele încadrîndu-se în limitele obișnuite ale unor astfel de probleme. În această idee, algoritmul propus pentru secționarea optimă a zonelor de amestec, poate fi inclus într-un program mai amplu cu ajutorul căruia sa realizează un studiu privind proiectarea, transporturilor succesive de produse petroliere sau implementarea unui calculator de proces ce urmărește optimizarea transportului respectiv. Oricum, rezultatele prezentului studiu și soluțiile propuse au o aplicabilitate practică evidentă, iar implementarea acestora în practică poate aduce noi elemente de cercetare.

Primită la redacție la 25 noiembrie 1981

BIBLIOGRAFIA

1. T. OROVEANU, B. SIRO, *Asupra unor posibilități de optimizare a transportului succesiv de produse petroliere*, St. cerc. mec. aplic., **38**, 3 (1979).
2. T. OROVEANU, *Sur un problème de difusion convective en régime turbulent*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc.Appl., **19**, 2 (1974).
3. GH. DODESCU, *Metode numerice în algebră*, Edit. tehnică, București, 1979.
4. ST. DUMITRESCU, I. DUMITRESCU, O. PAIU, *Aplicații inginerești ale calculatoarelor ca exemple din industria petrolieră și petrochimică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
5. JU. ZAJCENKO, *Issledovanie operații*, Kiev, „Viscea școla", 1975.

CALCULUL REZONANȚEI HIDRAULICE LA UZINE HIDROELECTRICE. II

de MIHAIL POPESCU
Institutul de cercetări hidrotehnice

În partea a doua a lucrării se studiază rezonanța hidraulică la uzine hidroelectrice pentru schema hidraulică fundamentală cu două castele de echilibru și pentru următoarele scheme hidraulice complexe :

A — sistem paralel de castele de echilibru ;

B — sistem hidrotehnic complex cu două lacuri de acumulare și trei castele de echilibru ;

C — sistem hidrotehnic complex prevăzut cu *n* castele de echilibru pe galeria de aducțiune ;

D — sistem hidrotehnic complex prevăzut cu *n* lacuri de acumulare racordate la un castel de echilibru.

Se descrie o modalitate teoretică de analiză a fenomenelor de rezonanță hidraulică la uzine hidroelectrice concepute pe scheme complexe, care poate conduce la o metodologie generală de calcul, și se exemplifică cu o aplicație practică.

În practica de proiectare a uzinelor hidroelectrice moderne s-au adoptat scheme hidraulice dintre cele mai complexe, care cuprind în alcătuirea lor mai multe lacuri de acumulare, galerii de aducțiune, castele de echilibru și centrale. Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al acestor scheme, privind oscilațiile extreme de nivel din castele sau stabilitatea hidraulică de funcționare, se poate efectua în mod practic prin metode numerice [1], [2].

În lucrarea de față vom trata problema calculului rezonanței hidraulice la uzine hidroelectrice concepute pe scheme hidraulice complexe, pentru cîteva scheme întîlnite mai frecvent în practica inginerească. Vom adopta un mod simplificat de notare a lor cu literele *A*, *B*, *C* și *D*.

Ecuațiile generale ale mișcării apei în sistemul hidraulic analizat se tratează în ipoteza unor tipuri de perturbații periodice mici la centrală. Pe modelul de calcul liniarizat în jurul regimului staționar se studiază răspunsul la perturbații armonice și se obțin frecvențele de rezonanță corespunzătoare amplitudinilor maxime ale variațiilor presiunii apei din conducta forțată în secțiunea turbinelor. Frecvențele astfel obținute sînt testate prin simulare numerică pe modelul matematic neliniar al sistemului hidraulic. Metodologia de calcul general se exemplifică cu o aplicație practică la una dintre schemele hidraulice analizate. Calculele efectuate sînt în esență echivalente cu „metoda impedanței" [5].

1. SCHEMA HIDRAULICĂ CU DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU DISPUSE ÎN SISTEM

În partea I a lucrării am tratat cazul schemei hidraulice fundamentale (fig. 1 — I), [3], [4].

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 2, 1982, P. 233–254

Înainte de a trece la cazul schemelor hidraulice complexe, vom analiza schema hidraulică fundamentală prevăzută cu două castele de echilibru dispuse în sistem (fig. 1 — II).

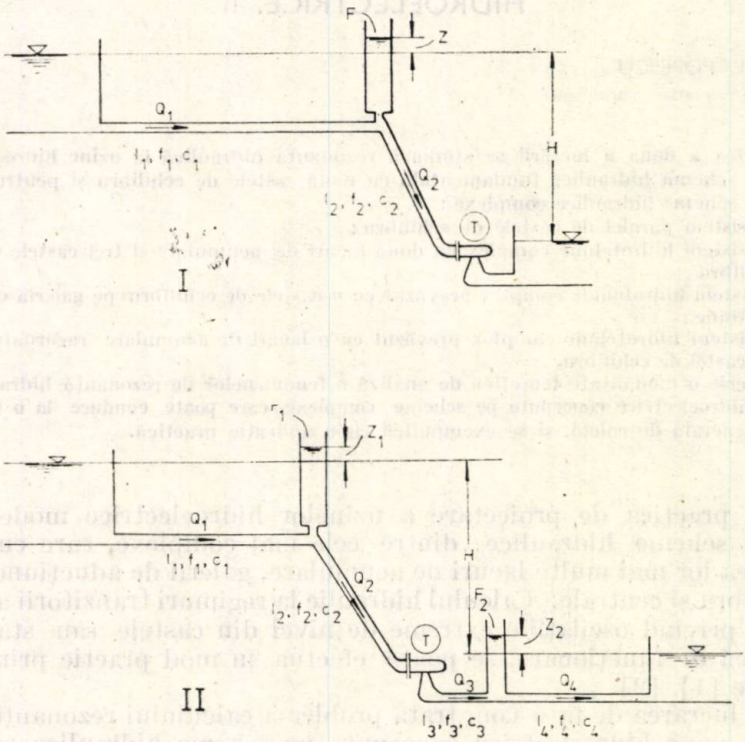


Fig. 1. — Uzine hidroelectrice concepute pe scheme hidraulice fundamentale : I) cu un castel de echilibru, II) cu două castele de echilibru dispuse în sistem.

1.1. MODELUL MATEMATIC

Ecuațiile generale ale mișcării apei în sistem sînt următoarele :

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + a_i c_i^2 \frac{\partial Q_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x} + a_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} = 0\,; \quad i = 1\,;2\,;3\,;4,$$

$$F_1 \frac{\mathrm{d}Z_1(t)}{\mathrm{d}t} + Q_2(0, t) = Q_1(l_1, t), \tag{1}$$

$$F_2 \frac{\mathrm{d}Z_2(t)}{\mathrm{d}t} + Q_4(0, t) = Q_3(l_3, t).$$

cu condițiile la limită :

$$H_1(0, t) = H, \quad H_4(l_4, t) = 0,$$

$$Q_2(l_2, t) = Q_3(0, t),$$

$$H_1(l_1, t) = H + Z_1(t) + R_1' \left| \frac{dZ_1(t)}{dt} \right| \frac{dZ_1(t)}{dt} = H_2(0, t),$$

$$H_3(l_3, t) = Z_2(t) + R_2' \left| \frac{dZ_2(t)}{dt} \right| \frac{dZ_2(t)}{dt} = H_4(0, t), \tag{2}$$

a) $$\gamma g Q_2(l_2, t)\,[H + Z_1(t) - Z_2(t)] = N$$

(admițînd reglajul uzinei pe putere constantă), sau

b) $$Q_2(l_2, t) = \alpha \sqrt{H_2(l_2, t) - H_3(0, t)}$$

(admițînd o lege de debit la centrală).

Regimul staționar corespunzător este dat de relațiile :

a) $$H_1 = H_2 = H, \; Z_1 = Z_2 = 0, \; H_3 = H_4 = 0,$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = q = \frac{N}{\gamma g H},$$

(3)

b) $$H_1 = H_2 = H, \; Z_1 = Z_2, \quad H_3 = H_4 = 0,$$

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = q = \alpha \sqrt{H}.$$

1.2. PROBLEMA REZONANȚEI

Se presupune că în condițiile la limită de tip a) și respectiv b), apar perturbații de forma :

a) $$\gamma g Q_2(l_2, t)[H + Z_1(t) - Z_2(t)] = N + \varepsilon A \sin \omega t,$$

(4)

b) $$Q_2(l_2, t) = (\alpha + \varepsilon A \sin \omega t) \sqrt{H_2(l_2, t) - H_3(0, t)}.$$

Ca urmare a unor astfel de perturbații, se vor considera perturbațiile corespunzătoare ale regimului staționar, admițînd pentru ecuațiile (1)

soluţii de forma :

a)
$$Q_i(x, t) = \frac{N}{\eta g H} + \varepsilon \widetilde{Q}_i(x, t) + \ldots,$$
$$H_j(x, t) = H + \varepsilon \widetilde{H}_j(x, t) + \ldots,$$
$$H_k(x, t) = \varepsilon \widetilde{H}_k(x, t) + \ldots.,$$
$$Z_j(t) = \varepsilon \widetilde{Z}_j(t) + \ldots,$$

b)
$$Q_i(x, t) = \alpha \sqrt{H} + \varepsilon \widetilde{Q}_i(x, t) + \ldots, \qquad (5)$$
$$H_j(x, t) = H + \varepsilon \widetilde{H}_j(x, t) + \ldots,$$
$$H_k(x, t) = \varepsilon \widetilde{H}_k(x, t) + \ldots,$$
$$Z_j(t) = \varepsilon \widetilde{Z}_j(t) + \ldots,$$

cu $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$; $k = 3, 4$.

În continuare, pentru uşurarea calculelor, perturbaţiile armonice se vor exprima sub forma complexă $\varepsilon A\, e^{i\omega t}$.

Pentru noile necunoscute $\widetilde{Q}_i$, $\widetilde{H}_i$, $\widetilde{Z}_j$ $(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2)$ se obţine următorul sistem de ecuaţii liniare de primă aproximaţie :

$$\frac{\partial \widetilde{H}_i}{\partial t} + a_i c_1^2 \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{H}_i}{\partial x} + a_i \frac{\partial \widetilde{Q}_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$F_1 \frac{d\widetilde{Z}_1(t)}{dt} + \widetilde{Q}_2(0, t) = \widetilde{Q}_1(l_1, t),$$

$$F_2 \frac{d\widetilde{Z}_2(t)}{dt} + \widetilde{Q}_4(0, t) = \widetilde{Q}_3(l_3, t),$$

$$\widetilde{H}_1(0, t) = 0, \quad \widetilde{H}_4(l_4, t) = 0, \quad \widetilde{Q}_3(0, t) = \widetilde{Q}_2(l_2, t), \qquad (6)$$

$$\widetilde{H}_1(l_1, t) = \widetilde{Z}_1(t) = \widetilde{H}_2(0, t), \quad \widetilde{H}_3(l_3, t) = \widetilde{Z}_2(t) = \widetilde{H}_4(0, t),$$

a)
$$\eta g H \widetilde{Q}_2(l_2, t) + \frac{N}{H} [\widetilde{Z}_1(t) - \widetilde{Z}_2(t)] = A\, e^{i\omega t},$$

b)
$$\widetilde{Q}_2(l_2, t) - \frac{\alpha}{2H} [\widetilde{H}_2(l_2, t) - \widetilde{H}_3(0, t)] = A \sqrt{H}\, e^{i\omega t}.$$

Pentru selectarea frecvenţelor periculoase, se caută frecvenţele ω pentru care mărimea $|H_2(l_2, t)|$ ia valori maxime.

1.3. METODA CARACTERISTICILOR

Făcînd schimbarea de variabile:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}}(\widetilde{H}_i + a_i c_i \widetilde{Q}_i), \quad v_i = \frac{1}{\sqrt{a_i}}(a_i c_i \widetilde{Q}_i - \widetilde{H}_i), \tag{7}$$

deci

$$\widetilde{H}_i = \frac{\sqrt{a_i}}{2}(u_i - v_i), \quad \widetilde{Q}_i = \frac{1}{2c_i\sqrt{a_i}}(u_i + v_i), \tag{8}$$

ecuațiile de propagare devin:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} - c_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{9}$$

Introducînd funcțiile $\eta_i(t) = u_i(0, t)$, $\zeta_i(t) = v_i(l_i, t)$, rezultă:

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_i(x, t) &= \frac{\sqrt{a_i}}{2}\left[\eta_i\left(t - \frac{x}{c_i}\right) - \zeta_i\left(t - \frac{l_i - x}{c_i}\right)\right],\\
\widetilde{Q}_i(x, t) &= \frac{1}{2c_i\sqrt{a_i}}\left[\eta_i\left(t - \frac{x}{c_i}\right) + \zeta_i\left(t - \frac{l_i - x}{c_i}\right)\right],\\
\widetilde{Z}_1(t) &= \frac{\sqrt{a_1}}{2}\left[\eta_1\left(t - \frac{l_1}{c_1}\right) - \zeta_1(t)\right] = \frac{\sqrt{a_2}}{2}\left[\eta_2(t) - \zeta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right)\right],\\
\widetilde{Z}_2(t) &= \frac{\sqrt{a_3}}{2}\left[\eta_3\left(t - \frac{l_3}{c_3}\right) - \zeta_3(t)\right] = \frac{\sqrt{a_4}}{2}\left[\eta_4(t) - \zeta_4\left(t - \frac{l_4}{c_4}\right)\right].
\end{aligned} \tag{10}$$

În acest caz, condițiile la limită ale sistemului devin:

$$\begin{aligned}
&\eta_1(t) - \zeta_1\left(t - \frac{l_1}{c_1}\right) = 0; \quad \eta_4\left(t - \frac{l_4}{c_4}\right) - \zeta_4(t) = 0,\\
&\frac{1}{2c_3\sqrt{a_3}}\left[\eta_3(t) + \zeta_3\left(t - \frac{l_3}{c_3}\right)\right] = \frac{1}{2c_2\sqrt{a_2}}\left[\eta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right) + \zeta_2(t)\right],\\
&\frac{\sqrt{a_1}}{2}\left[\eta_1\left(t - \frac{l_1}{c_1}\right) - \zeta_1(t)\right] = \frac{\sqrt{a_2}}{2}\left[\eta_2(t) - \zeta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right)\right] = \widetilde{Z}_1(t),\\
&\frac{\sqrt{a_3}}{2}\left[\eta_3\left(t - \frac{l_3}{c_3}\right) - \zeta_3(t)\right] = \frac{\sqrt{a_4}}{2}\left[\eta_4(t) - \zeta_4\left(t - \frac{l_4}{c_4}\right)\right] = \widetilde{Z}_2(t),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$F_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_1(t) + \frac{1}{2c_2\sqrt{a_2}}\left[\eta_2(t) + \zeta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2c_1\sqrt{a_1}}\left[\eta_1\left(t - \frac{l_1}{c_1}\right) + \zeta_1(t)\right],$$

$$F_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Z_2(t) + \frac{1}{2c_4 a_4}\left[\eta_4(t) + \zeta_4\left(t - \frac{l_4}{c_4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2c_3\sqrt{a_3}}\left[\eta_3\left(t - \frac{l_3}{c_3}\right) + \zeta_3(t)\right].$$

Modelul de calcul astfel obținut, la care se adaugă condițiile :

$$\text{a)} \quad \eta g H \frac{1}{2c_2\sqrt{a_2}}\left[\eta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right) + \zeta_2(t)\right] +$$

$$+ \eta g q\,[Z_1(t) - Z_2(t)] = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

$$\text{b)} \quad \frac{1}{2c_2\sqrt{a_2}}\left[\eta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right) + \zeta_2(t)\right] - \tag{12}$$

$$- \frac{q}{2H}\left\{\frac{\sqrt{a_2}}{2}\left[\eta_2\left(t - \frac{l_2}{c_2}\right) - \zeta_2(t)\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{a_3}}{2}\left[\eta_3(t) - \zeta_3\left(t - \frac{l_3}{c_3}\right)\right]\right\} = A\sqrt{H}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

se poate reduce la un sistem de două ecuații diferențiale cu argument deplasat în ζ_1 și η_3.

1.4. RĂSPUNSUL PERIODIC

Vom căuta funcțiile η_k, ζ_k, care verifică ecuațiile de mai sus, sub forma

$$\eta_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tilde{\eta}_k(\omega), \quad \zeta_k(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\tilde{\zeta}_k(\omega).$$

Pentru determinarea funcțiilor necunoscute $\tilde{\eta}_k(\omega)$, $\tilde{\zeta}_k(\omega)$ rezultă, din condițiile la limită, următorul sistem de ecuații algebrice :

$$\tilde{\eta}_1(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_1}{c_1}}\tilde{\zeta}_1(\omega); \quad \tilde{\zeta}_4(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_4}{c_4}}\tilde{\eta}_4(\omega),$$

$$\frac{1}{c_3\sqrt{a_3}}\,[\tilde{\eta}_3(\omega)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_3}{c_3}}\tilde{\zeta}_3]=\frac{1}{c_2\sqrt{a_2}}\cdot[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\eta}_2(\omega)+\tilde{\zeta}_2(\omega)],$$

$$\sqrt{a_1}[\tilde{\eta}_1(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_1}{c_1}}-\tilde{\zeta}_1(\omega)]=\sqrt{a_2}[\tilde{\eta}_2(\omega)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\zeta}_2(\omega)],$$

$$\sqrt{a_3}[\tilde{\eta}_3(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_3}{c_3}}-\tilde{\zeta}_3(\omega)]=\sqrt{a_4}[\tilde{\eta}_4(\omega)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_4}{c_4}}\tilde{\zeta}_4(\omega)],$$

$$\mathrm{i}\omega F_1[\tilde{\eta}_1(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_1}{c_1}}-\tilde{\zeta}_1(\omega)]+\frac{1}{c_2a_2}[\tilde{\eta}_2(\omega)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_2}{c_2}}\tilde{\zeta}_2(\omega)]=$$

$$=\frac{1}{c_1\sqrt{a_1c_1}}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_1}{c_1}}\tilde{\eta}_1(\omega)+\tilde{\zeta}_1(\omega)],$$

$$\mathrm{i}\omega F_2[\tilde{\eta}_3(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_3}{c_3}}-\tilde{\zeta}_3(\omega)]+\frac{1}{c_4a_4}[\tilde{\eta}_4(\omega)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_4}{c_4}}\tilde{\zeta}_4(\omega)]=$$

$$=\frac{1}{c_3\sqrt{a_3c_3}}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{l_3}{c_3}}\tilde{\eta}_3(\omega)+\tilde{\zeta}_3(\omega)],$$

(13)

la care se atașează relațiile a) și b) scrise sub forma (12).

Din formulele fundamentale (10) vom avea :

$$\tilde{H}_k(x,t)=\frac{\sqrt{a_k}}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{x}{c_k}\right)}\tilde{\eta}_k(\omega)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{l_k-x}{c_k}\right)}\tilde{\zeta}_k(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\hat{H}_k(x,\omega),$$

$$\tilde{Q}_k(x,t)=\frac{1}{2c_k\sqrt{a_k}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{x}{c_k}\right)}\tilde{\eta}_k(\omega)+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{l_k-x}{c_k}\right)}\tilde{\zeta}_k(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\hat{Q}_k(x,\omega)$$

și, corespunzător, $\tilde{Z}_k(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\hat{Z}_k(\omega)$.

1.5. FUNCȚII DE TRANSFER

Se caută să se obțină formule care să exprime pe $\hat{Q}_2(l_2,\omega)$, $\hat{Z}_1(\omega)$, $\hat{Z}_2(\omega)$, $\hat{H}_3(0,\omega)$ în funcție de $\hat{H}_2(l_2,\omega)$; după aceasta, înlocuirea lor în condițiile a) și b) din sistemul (6), furnizează expresia mărimii $|\tilde{H}_2(l_2,t)|=|\hat{H}_2(l_2,\omega)|$.

Efectuînd calculele, din ecuațiile sistemului (13) rezultă succesiv:

$$\hat{Q}_2(l_2, \omega) = \frac{\mathrm{i} f_2(\omega)}{c_2 a_2 f_1(\omega)} \hat{H}_2(l_2, \omega),$$

$$\hat{Z}_2(\omega) = \frac{f_2(\omega) \sin \omega \dfrac{l_4}{c_4}}{c_2 a_2 g_2(\omega) f_1(\omega)} \hat{H}_2(l_2, \omega),$$

$$\hat{Z}_1(\omega) = \frac{\sin \omega \dfrac{l_1}{c_1}}{c_2 a_2 f_1(\omega)} \hat{H}_2(l_2, \omega), \tag{14}$$

$$\hat{H}_3(0, \omega) = \frac{c_3 a_3}{c_2 a_2} \frac{g_1(\omega) f_2(\omega)}{g_2(\omega) f_1(\omega)} \hat{H}_2(l_2, \omega),$$

unde

$$f_1(\omega) = \left(\omega F_1 \sin \omega \frac{l_1}{c_1} - \frac{1}{c_1 a_1} \cos \omega \frac{l_1}{c_1}\right) \sin \omega \frac{l_2}{c_2} -$$

$$- \frac{1}{c_2 a_2} \sin \omega \frac{l_1}{c_1} \cos \omega \frac{l_2}{c_2},$$

$$f_2(\omega) = \left(\omega F_1 \sin \omega \frac{l_1}{c_1} - \frac{1}{c_1 a_1} \cos \omega \frac{l_1}{c_1}\right) \cos \omega \frac{l_2}{c_2} +$$

$$+ \frac{1}{c_2 a_2} \sin \omega \frac{l_1}{c_1} \sin \omega \frac{l_2}{c_2},$$

$$g_1(\omega) = \left(\omega F_2 \sin \omega \frac{l_4}{c_4} - \frac{1}{c_4 a_4} \cos \omega \frac{l_4}{c_4}\right) \sin \omega \frac{l_3}{c_3} - \tag{15}$$

$$- \frac{1}{c_3 a_3} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} \cos \omega \frac{l_3}{c_3},$$

$$g_2(\omega) = \left(\omega F_2 \sin \omega \frac{l_4}{c_4} - \frac{1}{c_4 a_4} \cos \omega \frac{l_4}{c_4}\right) \cos \omega \frac{l_4}{c_4} +$$

$$+ \frac{1}{c_3 a_3} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} \sin \omega \frac{l_3}{c_3}.$$

1.6. CALCULUL REZONANȚEI

Cu ajutorul relațiilor (14) rezultă următoarele expresii pentru mărimea $|\widetilde{H}_2(l_2, t)|$, în cele două cazuri analizate:

$$\text{a)} \quad |\widetilde{H}_2(l_2, t)| = \left| \frac{A c_2 a_2 f_1(\omega)}{i f_2(\omega) - \frac{Q}{H}\left[\sin \omega \frac{l_1}{c_1} - \frac{f_2(\omega)}{g_2(\omega)} \sin \omega \frac{l_4}{c_4}\right]} \right|,$$

$$\text{b)} \quad |\widetilde{H}_2(l_2, t)| = \left| \frac{A c_2 a_2 \sqrt{H} f_1(\omega)}{i f_2(\omega) - \frac{Q}{2H}\left[c_2 a_2 f_1(\omega) - c_3 a_3 \frac{g_1(\omega)}{g_2(\omega)} f_2(\omega)\right]} \right|, \tag{16}$$

funcțiile $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$, $g_1(\omega)$, $g_2(\omega)$ fiind definite prin relațiile (15).

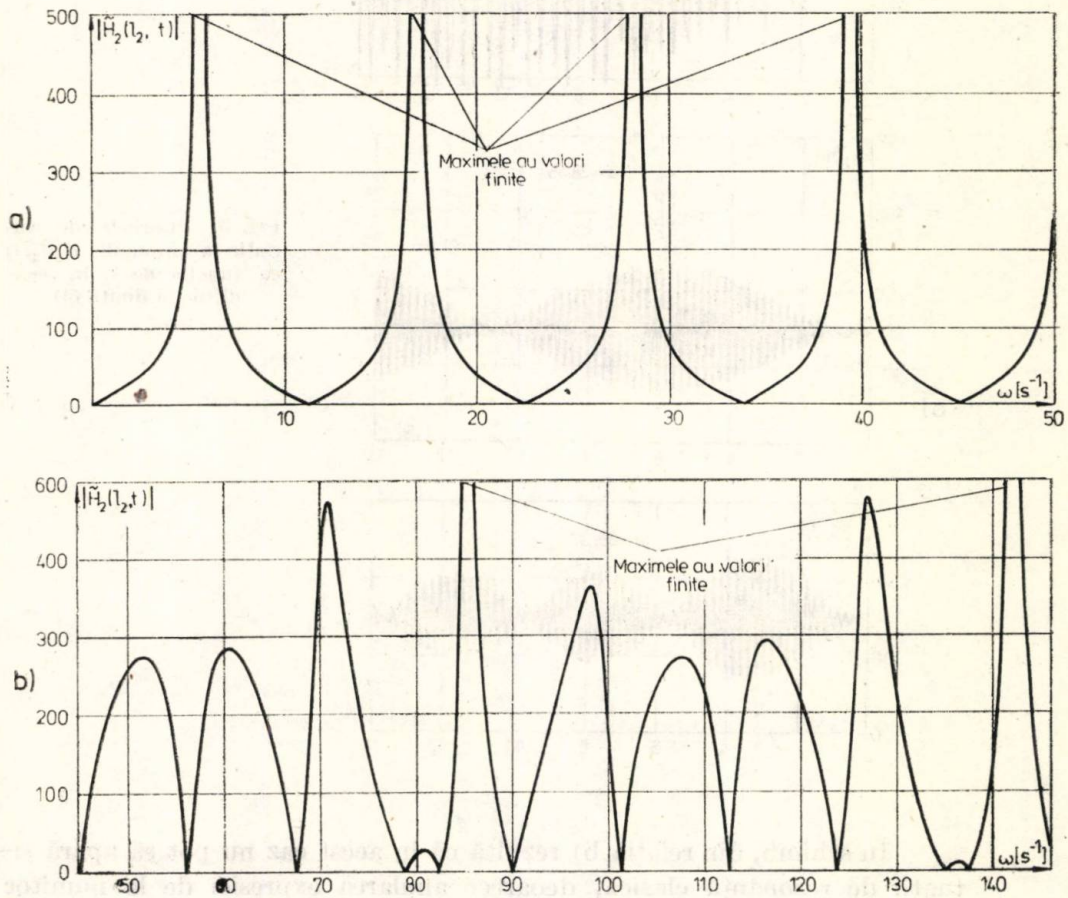


Fig. 2. — Graficul mărimii $|\widetilde{H}_2(l_2, t)|$ ca funcție de ω, în condițiile la limită (4).

Observație. Din relația a) rezultă că se poate obține o situație de rezonanță clasică, prin anularea expresiei de la numitor, în condițiile:

$$\sin \omega \frac{l_1}{c_1} = 0, \quad \sin \omega \frac{l_4}{c_4} = 0, \quad \cos \omega \frac{l_2}{c_2} = 0. \tag{17}$$

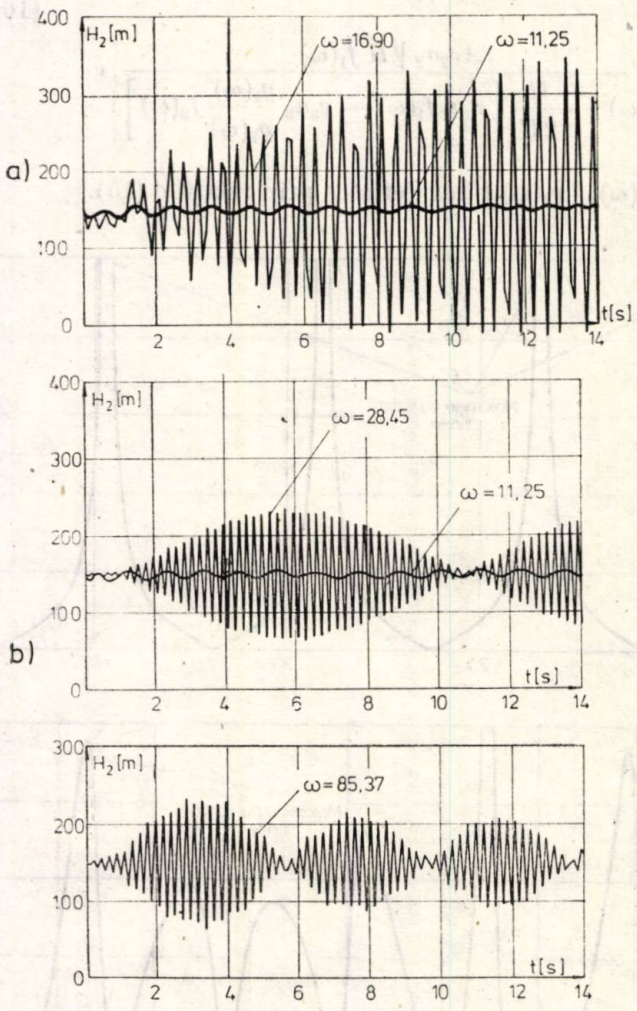


Fig. 3. — Curbele de variație a presiunii $H_2(l_2, t)$ ca funcție de t, în condițiile la limită (4).

În schimb, din relația b) rezultă că în acest caz nu pot să apară situații de rezonanță clasică, deoarece anularea expresiei de la numitor conduce și la anularea numărătorului.

Prin particularizare, se pot regăsi rezultatele obținute anterior pentru cazul schemei hidraulice fundamentale [3]:

$$\text{a)} \quad |\widetilde{H}_2(l_2, t)| = Ac_2a_2 \left| \frac{f_1(\omega)}{if_2(\omega) - \frac{Q}{H} \sin \omega \frac{l_1}{c_1}} \right|, \tag{18}$$

$$\text{b)} \quad |\widetilde{H}_2(i_2, t)| = Ac_2a_2 \sqrt{H} \left| \frac{f_1(\omega)}{if_2(\omega) - \frac{c_2a_2}{2} \frac{Q}{H} f_1(\omega)} \right|.$$

1.7. APLICAȚIE

S-a ales cazul unei uzine hidroelectrice, analizată anterior [1], cu următoarele caracteristici principale:

$l_1 = 5\,000$ m; $f_1 = 38{,}5$ m^2; $F_1 = 400$ m^2,

$l_2 = 300$ m; $f_2 = 24{,}4$ m^2; $F_2 = 100$ m^2,

$l_3 = 60$ m; $f_3 = 38{,}5$ m^2; $R_1 = R_2 = 0{,}001\ Q_c^2$.

$l_4 = 500$ m; $f_4 = 38{,}5$ m^2;

$Q = 110$ m^3/s $H = 130$ m;

Uzina are o funcționare hidraulică stabilă la un reglaj pe putere constantă. Ca și în cazul analizat al schemei hidraulice fundamentale [3], pentru evidențierea frecvențelor periculoase, în ipoteza unor factori perturbatori de excitație cu condiții la limită de tip a) sau b), s-au calculat și reprezentat grafic funcțiile $|H_2(l_2, t)|$, (fig. 2). Astfel, au fost puse în evidență domeniile de frecvență de excitație periculoase pentru această uzină.

Urmărind metodologia generală de calcul prin integrarea numerică a sistemului neliniar de ecuații (1), s-a calculat comportarea sistemului hidraulic în cazul unor frecvențe de excitație care au rezultat ca periculoase din calculele anterioare. O parte a rezultatelor calculelor numerice, prelucrate sub formă grafică, sînt prezentate în figura 3 și ele arată că și în acest caz frecvențele detectate prin analiza liniară sînt într-adevăr periculoase.

De asemenea, s-au evidențiat frecvențele care practic nu au nici un efect.

2. SCHEMA HIDRAULICĂ A

În acest caz ecuațiile cu derivate parțiale ale mișcării sînt următoarele:

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + a_i c_i^2 \frac{\partial Q_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_i}{\partial x} + a_i \frac{\partial Q_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{19}$$

La acestea se adaugă condițiile la limită care, după liniarizare în jurul punctului de echilibru, devin (fig. 4 — A):

$$H_1(0, t) = 0\,; \quad H_1(l_1, t) = H_2(0, t) = H_4(0, t),$$

$$Q_1(l_1, t) = Q_2(0, t) + Q_4(0, t),$$

$$F_1 \frac{\mathrm{d}Z_1(t)}{\mathrm{d}t} + Q_3(0, t) = Q_2(l_2, t)\,; \quad F_2 \frac{\mathrm{d}Z_2(t)}{\mathrm{d}t} + Q_5(0, t) = Q_4(l_4, t),$$

$$H_2(l_2, t) = Z_1(t) = H_3(0, t)\,; \quad H_4(l_4, t) = Z_2(t) = H_5(0, t), \tag{20}$$

a), a) $\quad Q_3(l_3, t) + \beta H_3(0, t) = A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$

$$Q_5(l_5, t) + \beta' H_5(0, t) = A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

b), b) $\quad Q_3(l_3, t) + \beta H_3(l_3, t) = A_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$

$$Q_5(l_5, t) + \beta' H_5(l_5, t) = A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

unde s-au folosit notațiile:

$$\beta = \frac{N_1}{\eta g H_{20}^2}\,; \quad \beta' = \frac{N_2}{\eta g H_{20}^2} \text{ în cazul a), a) și}$$

$$\beta = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{H_{20}}}\,; \quad \beta' = \frac{\alpha_2}{2\sqrt{H_{20}}} \text{ în cazul b), b).} \tag{21}$$

În plus, se menționează că notațiile a), a), respectiv b), b) se referă la faptul că s-a adoptat același tip de factor perturbator la cele două centrale — reglaj pe putere constantă sau lege de debit.

Folosind aceeași metodă de calcul ca în cazul precedent și introducînd notațiile :

$$h_1(\omega) = \omega F_1 \cos \omega \frac{l_2}{c_2} \sin \omega \frac{l_3}{c_3} + \frac{1}{c_2 a_2} \sin \omega \frac{l_2}{c_2} \sin \omega \frac{l_3}{c_3} -$$

$$- \frac{1}{c_3 a_3} \cos \omega \frac{l_2}{c_2} \cos \omega \frac{l_3}{c_3},$$

$$h_2(\omega) = \omega F_1 \sin \omega \frac{l_2}{c_2} \sin \omega \frac{l_3}{c_3} - \frac{1}{c_2 a_2} \cos \omega \frac{l_2}{c_2} \sin \omega \frac{l_3}{c_3} -$$

$$- \frac{1}{c_3 a_3} \sin \omega \frac{l_2}{c_2} \cos \omega \frac{l_3}{c_3},$$

$$g_1(\omega) = \omega F_1 \cos \omega \frac{l_2}{c_2} \cos \omega \frac{l_3}{c_3} + \frac{1}{c_2 a_2} \sin \omega \frac{l_2}{c_2} \cos \omega \frac{l_3}{c_3} +$$

$$+ \frac{1}{c_3 a_3} \cos \omega \frac{l_2}{c_2} \sin \omega \frac{l_3}{c_3},$$

$$g_2(\omega) = \omega F_1 \sin \omega \frac{l_2}{c_2} \cos \omega \frac{l_3}{c_3} - \frac{1}{c_2 a_2} \cos \omega \frac{l_2}{c_2} \cos \omega \frac{l_3}{c_3} +$$

$$+ \frac{1}{c_3 a_3} \sin \omega \frac{l_2}{c_2} \sin \omega \frac{l_3}{c_3},$$

$$\hat{h}_1(\omega) = \omega F_2 \cos \omega \frac{l_4}{c_4} \sin \omega \frac{l_5}{c_5} + \frac{1}{c_4 a_4} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} \sin \omega \frac{l_5}{c_5} -$$

$$- \frac{1}{c_5 a_5} \cos \omega \frac{l_4}{c_4} \cos \omega \frac{l_5}{c_5}, \tag{22}$$

$$h_4(\omega) = \omega F_2 \sin \omega \frac{l_4}{c_4} \sin \omega \frac{l_5}{c_5} - \frac{1}{c_4 a_4} \cos \omega \frac{l_4}{c_4} \sin \omega \frac{l_5}{c_5} -$$

$$- \frac{1}{c_5 a_5} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} \cos \omega \frac{l_5}{c_5},$$

$$\hat{g}_1(\omega) = \omega F_2 \cos\omega\frac{l_4}{c_4}\cos\omega\frac{l_5}{c_5} + \frac{1}{c_4a_4}\sin\omega\frac{l_4}{c_4}\cos\omega\frac{l_5}{c_5} +$$

$$+ \frac{1}{c_5a_5}\cos\omega\frac{l_4}{c_4}\sin\omega\frac{l_5}{c_5},$$

$$g_4(\omega) = \omega F_2 \sin\omega\frac{l_4}{c_4}\cos\omega\frac{l_5}{c_5} - \frac{1}{c_4a_4}\cos\omega\frac{l_4}{c_4}\cos\omega\frac{l_5}{c_5} +$$

$$+ \frac{1}{c_5a_5}\sin\omega\frac{l_4}{c_4}\sin\omega\frac{l_5}{c_5}$$

în cazul b), b) rezultă pe rînd relațiile:

$$\hat{H}_3(l_3, \omega) =$$

$$= ic_3a_3\left[c_1a_1h_1(\omega)\hat{Q}_1(0, \omega)\sin\omega\frac{l_1}{c_1} + a_2c_2h_2(\omega)\hat{Q}_2(0, \omega)\right],$$

$$\hat{Q}_3(l_3, \omega) =$$

$$= -c_1a_1g_1(\omega)\hat{Q}_1(0, \omega)\sin\omega\frac{l_1}{c_1} - c_2a_2g_2(\omega)\hat{Q}_2(0, \omega),$$

(23)

$$\hat{H}_5(l_5, \omega) =$$

$$= ic_5a_5\left[c_1a_1\hat{h}_1(\omega)\hat{Q}_1(0, \omega)\sin\omega\frac{l_1}{c_1} + c_4a_4h_4(\omega)\hat{Q}_4(0, \omega)\right],$$

$$\hat{Q}_5(l_5, \omega) =$$

$$= -c_1a_1\hat{g}_1(\omega)\hat{Q}_1(0, \omega)\sin\omega\frac{l_1}{c_1} - c_2a_2g_4(\omega)\hat{Q}_4(0, \omega),$$

respectiv:

$$\hat{Q}_2(0, \omega) = -\frac{A_1}{c_2a_2} - \frac{c_1a_1}{c_2a_2}\frac{g_1(\omega) - i\beta c_3a_3\hat{h}_1(\omega)}{g_2(\omega) - i\beta c_3a_3\hat{h}_2(\omega)}\hat{Q}_1(0, \omega)\sin\omega\frac{l_1}{c_1},$$

(24)

$$\hat{Q}_4(0, \omega) = -\frac{A_2}{c_4a_4} - \frac{c_1a_1}{c_4a_4}\frac{\hat{g}_1(\omega) - i\beta' c_5a_5\hat{h}_1(\omega)}{g_4(\omega) - i\beta' c_5a_5h_4(\omega)}\hat{Q}_1(0, \omega)\sin\omega\frac{l_1}{c_1},$$

și, respectiv,

$$\left\{\frac{1}{c_1a_1}\cos\omega\frac{l_1}{c_1}+\left[\frac{1}{c_2a_2}\frac{g_1(\omega)-i\beta c_3a_3h_1(\omega)}{g_2(\omega)-i\beta c_3a_3h_2(\omega)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{c_4a_4}\frac{\hat{g}_1(\omega)-i\beta' c_5a_5\hat{h}_1(\omega)}{g_4(\omega)-i\beta' c_5a_5h_4(\omega)}\sin\omega\frac{l_1}{c_1}\right\}\hat{Q}_1(0,\omega)=\right.$$

$$=\frac{1}{c_1a_1}\left(\frac{A_1}{c_2a_2}+\frac{A_2}{c_4a_4}\right). \tag{25}$$

Calculul rezonanței hidraulice la cele două centrale se efectuează pe etape astfel : se calculează $\hat{Q}_1(0,\omega)$ din relația (25), apoi pe rînd $\hat{Q}_2(0,\omega)$ și $\hat{Q}_4(0,\omega)$ din relațiile (24), iar relațiile (23) permit să se calculeze $\hat{H}_3(l_3,\omega)$ și $\hat{H}_5(l_5,\omega)$; ținînd seama că : $|\widetilde{H}_3(l_3,t)|=|\hat{H}_3(l_3,\omega)|$ și $|\widetilde{H}_5(l_5,t)|=|\hat{H}_5,(l_5,\omega)|$ formulele respective permit calculul oscilațiilor de presiune la cele două centrale.

3. SCHEMA HIDRAULICĂ B

Ecuațiile diferențiale ale mișcării și condițiile la limită pentru această schemă hidraulică se scriu ca și în cazurile precedente, iar după liniarizare devin (fig. 4 — B) :

$$H_1(0,t)=0\,;\quad H_4(l_4,t)=0,$$

$$F_1\frac{dZ_1(t)}{dt}+Q_2(0,t)=Q_1(l_1,t),$$

$$F_2\frac{dZ_2(t)}{dt}+Q_5(0,t)=Q_2(l_2,t)+Q_3(l_3,t),$$

$$F_3\frac{dZ_3(t)}{dt}+Q_3(0,t)=Q_4(l_4,t), \tag{26}$$

$$H_1(l_1,t)=Z_1(t)=H_2(0,t),$$

$$H_2(l_2,t)=Z_2(t)=H_3(l_3,t)=H_5(0,t),$$

$$H_3(0,t)=Z_3(t)=H_4(l_4,t),$$

a) $$Q_5(l_5,t)+\beta H_5(0,t)=A\,e^{i\omega t},$$

b) $$Q_5(l_5,t)+\beta H_5(l_5,t)=A\,e^{i\omega t}.$$

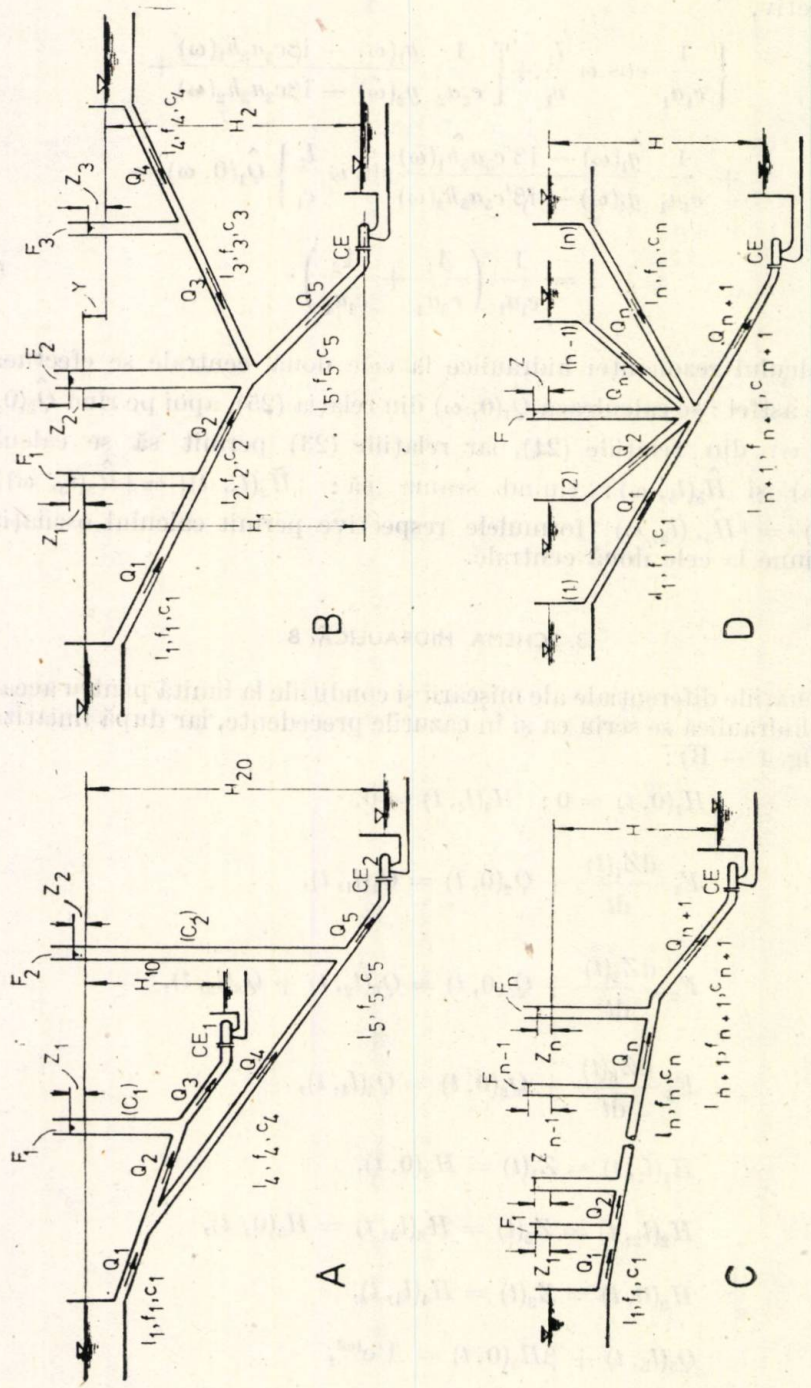


Fig. 4. — Uzine hidroelectrice concepute pe scheme hidraulice complexe.

Cu $f_1(\omega)$ și $f_2(\omega)$ definite în relațiile (15) și introducînd în plus următoarele notații :

$$f_3(\omega) = \omega F_3 \sin \omega \frac{l_3}{c_3} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} + \frac{1}{c_3 a_3} \cos \omega \frac{l_3}{c_3} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} + \\ + \frac{1}{c_4 a_4} \cos \omega \frac{l_4}{c_4} \sin \omega \frac{l_3}{c_3},$$

$$g_3(\omega) = \omega F_3 \cos \omega \frac{l_3}{c_3} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} - \frac{1}{c_3 a_3} \sin \omega \frac{l_3}{c_3} \sin \omega \frac{l_4}{c_4} + \\ + \frac{1}{c_4 a_4} \cos \omega \frac{l_4}{c_4} \cos \omega \frac{l_3}{c_3} \tag{27}$$

rezultă, de exemplu, în cazul b), că $\hat{H}_5(l_5, \omega)$ se poate calcula din formula :

$$\hat{H}_5(l_5, \omega) \left[\beta + \frac{\mathrm{i}}{c_5 a_5} \frac{\Phi(\omega) \cos \omega \frac{l_5}{c_5} - \Psi(\omega) \sin \omega \frac{l_5}{c_5}}{\Psi(\omega) \cos \omega \frac{l_5}{c_5} + \Phi(\omega) \sin \omega \frac{l_5}{c_5}} \right] = A, \tag{28}$$

unde

$$\Phi(\omega) = f_1(\omega) \left[\omega F_2 - \frac{1}{c_3 a_3} g_3(\omega) + \frac{1}{c_2 a_2} f_2(\omega) f_3(\omega) \right],$$

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{c_5 a_5} f_1(\omega) f_3(\omega).$$

4. SCHEMA HIDRAULICĂ C

Ecuațiile de propagare sînt cele uzuale, iar condițiile la limită după liniarizare devin (fig. 4 — C) :

$$H_1(0, t) = 0,$$

$$F_k \frac{\mathrm{d}Z_k(t)}{\mathrm{d}t} + Q_{k+1}(0, t) = Q_k(l_k, t),$$

$$H_k(l_k, t) = Z_k(t) = H_{k+1}(0, t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{29}$$

a) $$Q_{n+1}(l_{n+1}, t) + \beta H_{n+1}(0, t) = A \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

b) $$Q_{n+1}(l_{n+1}, t) + \beta H_{n+1}(l_{n+1}, t) = A \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Deoarece în centrul atenției se află secțiunea conductei forțate — amonte de turbine, se va urmări comportarea lui $\hat{H}_{n+1}(l_{n+1}, t)$.

Formulele fundamentale date de metoda caracteristicilor, în acest caz, sînt următoarele :

$$H_k(x,t) = \frac{\sqrt{a_k}}{2}\left[\eta_k\left(t - \frac{x}{c_k}\right) - \zeta_k\left(t - \frac{l_k - x}{c_k}\right)\right],$$

$$Q_k(x,t) = \frac{1}{2c_k\sqrt{a_k}}\left[\eta_k\left(t - \frac{x}{c_k}\right) + \zeta_k\left(t - \frac{l_k - x}{c_k}\right)\right]. \tag{30}$$

Strategia generală de calcul se bazează pe scrierea relațiilor între $\hat{H}_k(0,\omega)$, $\hat{Q}_k(0,\omega)$ și $\hat{H}_k(l_k,\omega)$, $\hat{Q}_k(l_k,\omega)$.

Folosind condițiile la limită obținem :

$$\hat{H}_k(l_k,\omega) = \hat{H}_k(0,\omega)\cos\omega\frac{l_k}{c_k} - \mathrm{i}c_k a_k \hat{Q}_k(0,\omega)\sin\omega\frac{l_k}{c_k},$$

$$\hat{Q}_k(l_k,\omega) = \hat{Q}_k(0,\omega)\cos\omega\frac{l_k}{c_k} - \frac{\mathrm{i}}{c_k a_k}\hat{H}_k(0,\omega)\sin\omega\frac{l_k}{c_k}. \tag{31}$$

În nodurile cu castele de echilibru avem relațiile :

$$\hat{H}_{k+1}(0,\omega) = H_k(l_k,\omega),$$

$$\hat{Q}_{k+1}(0,\omega) = \hat{Q}_k(l_k,\omega) - \mathrm{i}\omega F_k \hat{H}_k(l_k,\omega). \tag{32}$$

Folosind relațiile (31) și (32) se obține formula :

$$\frac{\hat{Q}_{k+1}(l_{k+1},\omega)}{\hat{H}_{k+1}(l_{k+1},\omega)} = \frac{\mathrm{i}}{c_{k+1}a_{k+1}} \times$$

$$\times \frac{\omega F_k \cos\omega\dfrac{l_{k+1}}{c_{k+1}} + \dfrac{1}{c_{k+1}a_{k+1}}\sin\omega\dfrac{l_{k+1}}{c_{k+1}} + \mathrm{i}\dfrac{\hat{Q}_k(l_k,\omega)}{\hat{H}_k(l_k,\omega)}\cos\omega\dfrac{l_{k+1}}{c_{k+1}}}{\omega F_k \sin\omega\dfrac{l_{k+1}}{c_{k+1}} - \dfrac{1}{c_{k+1}a_{k+1}}\cos\omega\dfrac{l_{k+1}}{c_{k+1}} + \mathrm{i}\dfrac{\hat{Q}_k(l_k,\omega)}{\hat{H}_k(l_k,\omega)}\sin\omega\dfrac{l_{k+1}}{c_{k+1}}}, \tag{33}$$

la care urmează să analizăm calculul raportului pentru $k = 1$.

Ținînd seama că $\hat{H}_1(0, \omega) = 0$, rezultă

$$\frac{\hat{Q}_1(l_1, \omega)}{\hat{H}_1(l_1, \omega)} = \frac{\mathrm{i}}{c_1 a_1} \frac{\cos \omega \frac{l_1}{c_1}}{\sin \omega \frac{l_1}{c_1}} \tag{34}$$

și deci

$$\frac{\hat{Q}_2(l_2, \omega)}{\hat{H}_2(l_2, \omega)} = \frac{\mathrm{i}}{c_2 a_2} \times$$

$$\times \frac{\omega F_1 \cos \omega \frac{l_2}{c_2} + \frac{1}{c_2 a_2} \sin \omega \frac{l_2}{c_2} - \frac{1}{c_1 a_1} \frac{\cos \omega \frac{l_1}{c_1}}{\sin \omega \frac{l_1}{c_1}} \cos \omega \frac{l_2}{c_2}}{\omega F_1 \sin \omega \frac{l_2}{c_2} - \frac{1}{c_2 a_2} \cos \omega \frac{l_2}{c_2} - \frac{1}{c_1 a_1} \frac{\cos \omega \frac{l_1}{c_1}}{\sin \omega \frac{l_1}{c_1}} \sin \omega \frac{l_2}{c_2}}. \tag{35}$$

Dacă notăm

$$\frac{\hat{Q}_k(l_k, \omega)}{\hat{H}_k(l_k, \omega)} = \frac{1}{c_k a_k} \varphi_k(\omega), \tag{36}$$

rezultă formula de recurență:

$$\varphi_{k+1}(\omega) =$$

$$= \frac{\omega F_k \cos \omega \frac{l_{k+1}}{c_{k+1}} + \frac{1}{c_{k+1} a_{k+1}} \sin \omega \frac{l_{k+1}}{c_{k+1}} - \frac{1}{c_k a_k} \varphi_k(\omega) \cos \omega \frac{l_{k+1}}{c_{k+1}}}{\omega F_k \sin \omega \frac{l_{k+1}}{c_{k+1}} - \frac{1}{c_{k+1} a_{k+1}} \cos \omega \frac{l_{k+1}}{c_{k+1}} - \frac{1}{c_k a_k} \varphi_k(\omega) \sin \omega \frac{l_{k+1}}{c_{k+1}}}. \tag{37}$$

Pentru calculul rezonanței hidraulice — exemplu, în cazul b) — avem:

$$\hat{H}_{n+1}(l_{n+1}, \omega) = \frac{A}{\beta + \frac{\mathrm{i}}{c_{n+1} a_{n+1}} \varphi_{n+1}(\omega)}, \tag{38}$$

iar frecvențele de rezonanță se obțin studiind minimele funcției

$$\left| \beta + \frac{\mathrm{i}}{c_{n+1} a_{n+1}} \varphi_{n+1}(\omega) \right|.$$

Pentru cazul a), calculul rezonanței hidraulice se efectuează cu relația :

$$\hat{H}_{n+1}(l_{n+1}, \omega) =$$

$$= \frac{Ac_{n+1}a_{n+1}}{\beta + i\varphi_{n+1}(\omega)\left[\omega F_n \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_{n+1}a_{n+1}} \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_n a_n} \varphi_n(\omega) \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}\right]}. \tag{39}$$

În cazul particular, $n = 2$, care se referă la schema hidraulică fundamentală cu două castele de echilibru, situate pe galeria de aducțiune, avem

$$\varphi_2(\omega) = \frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)}, \tag{40}$$

$$\varphi_3(\omega) = \frac{\left[\omega F_2 \cos \omega \frac{l_3}{c_3} + \frac{1}{c_3 a_3} \sin \omega \frac{l_3}{c_3}\right] f_1(\omega) - \frac{1}{c_2 a_2} f_2(\omega) \cos \omega \frac{l_3}{c_3}}{\left[\omega F_2 \sin \omega \frac{l_3}{c_3} - \frac{1}{c_3 a_3} \cos \omega \frac{l_3}{c_3}\right] f_1(\omega) - \frac{1}{c_3 a_3} f_2(\omega) \sin \omega \frac{l_3}{c_3}},$$

iar calculul efectiv al frecvențelor de rezonanță se poate efectua cu formula (39).

5. SCHEMA HIDRAULICĂ D

În acest caz, condițiile la limită sînt următoarele :

$$H_k(0, t) = 0, \quad k = 1,2,\ldots n,$$

$$F \frac{dZ(t)}{dt} + Q_{n+1}(0, t) = Q_1(l_1, t) + Q_2(l_2, t) + \ldots + Q_n(l_n, t),$$

$$H_k(l_k, t) = Z(t) = H_{n+1}(0, t), \tag{41}$$

a) $$Q_{n+1}(l_{n+1}, t) + \beta H_{n+1}(0, t) = A\, e^{i\omega t},$$

b) $$Q_{n+1}(l_{n+1}, t) + \beta H_{n+1}(l_{n+1}, t) = A\, e^{i\omega t}.$$

Efectuînd calculele, după aceeași procedură folosită anterior, rezultă

$$\frac{\hat{Q}_{n+1}(l_{n+1}, \omega)}{\hat{H}_{n+1}(l_{n+1}, \omega)} = \frac{i}{c_{n+1}a_{n+1}} \times$$

$$\times \frac{\left(\omega F - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k a_k} \frac{\cos \omega \frac{l_k}{c_k}}{\sin \omega \frac{l_k}{c_k}}\right) \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} + \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}}{\left(\omega F - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k a_k} \frac{\cos \omega \frac{l_k}{c_k}}{\sin \omega \frac{l_k}{c_k}}\right) \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}}, \tag{42}$$

iar calculul efectiv al rezonanței hidraulice se poate efectua pentru cazul a) cu formula :

$$\left[\frac{\mathrm{i}}{c_{n+1} a_{n+1}} \frac{\left(\omega F - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k a_k} \frac{\cos \omega \frac{l_k}{c_k}}{\sin \omega \frac{l_k}{c_k}}\right) \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} + \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}}{\left(\omega F - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k c_k} \frac{\cos \omega \frac{l_k}{c_k}}{\sin \omega \frac{l_k}{c_k}}\right) \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta}{c_{n+1} a_{n+1}} \frac{1}{\left(\omega F - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k a_k} \frac{\cos \omega \frac{l_k}{c_k}}{\sin \omega \frac{l_k}{c_k}}\right) \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}} \right] \times$$

$$\times \hat{H}_{n+1}(l_{n+1}, \omega) = A, \tag{43}$$

iar pentru cazul b), cu formula :

$$\left[\beta + \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \times \frac{\left(\omega F - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k a_k} \frac{\cos \omega \frac{l_k}{c_k}}{\sin \omega \frac{l_k}{c_k}}\right) \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} + \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}}{\left(\omega F - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k a_k} \frac{\cos \omega \frac{l_k}{c_k}}{\sin \omega \frac{l_k}{c_k}}\right) \sin \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}} - \frac{1}{c_{n+1} a_{n+1}} \cos \omega \frac{l_{n+1}}{c_{n+1}}} \right] \times$$

$$\times \hat{H}_{n+1}(l_{n+1}, \omega) = A.$$

Pentru $n = 1$, se regăsesc formulele pentru calculul rezonanței hidraulice în cazul schemei hidraulice fundamentale cu un castel de echilibru [3], [4].

Primită la redacție la 17 august 1981

BIBLIOGRAFIE

1. M. POPESCU, *Modèle mathématique pour l'étude de la stabilité d'un système de deux chambres d'équilibre*, C. R. Acad. Sc. Paris, **273**, 129—132 (1971).
2. M. POPESCU, *Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice concepute pe scheme complexe*, St. cerc. mec. aplic., *6* (1977).
3. M. POPESCU, *Calculul rezonanței hidraulice la uzine hidroelectrice (partea I-a)*, St. cerc. mec. aplic. *1* (1982).
4. M. POPESCU, A. HALANAY, *A computing technique for hydraulic resonance in hydropower plants with surge tanks*. Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Apl., **26**, *3*, p. 421—431 (1981).
5. V. STREETER, E. WYLIE, *Hydraulic transient*, McGraw Hill, Book Co., New York, 1967.

VIBRAȚIILE ELEMENTELOR CINEMATICE RECTILINII, CU PROPRIETĂȚI VÎSCOELASTICE, ALE MECANISMELOR PLANE

de M. BUCULEI, D. BAGNARU
Universitatea din Craiova

Folosind analogia elasto-vîscoelastică a lui Alfrey și Lee, lucrarea prezintă răspunsul dinamic al elementelor cinematice, cu proprietăți vîscoelastice, din structura mecanismelor plane cu bare rectilinii. Se folosesc ecuații de mișcare adecvat deduse pentru solide deformabile în mișcare de rototranslație plană. Exemplificarea se face pe bare rectilinii tip Maxwell, model frecvent folosit în practică. Studiul deplasărilor longitudinale și transversale se face plecînd de la ecuații de mișcare cuplate sau decuplate.

1. MODELUL CUPLAT

În [2, 3] s-au dedus ecuațiile de mișcare în deplasări pentru un element cinematic rectiliniu, liniar-elastic, aflat în mișcare de rototranslație plană (fig. 1), în varianta cuplată:

$$-EA\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-\rho A\,\omega^2 u_1-2\rho A\,\omega\frac{\partial u_2}{\partial t}-\rho A\,\varepsilon u_2+$$

$$+\rho A\,a_{01}-\rho A\,\omega\,v_{02}-\rho\omega^2 Ax-f_1=0, \tag{1}$$

$$EI\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\rho I\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2\,\partial t^2}-\rho A\omega^2 u_2+2\rho A\,\omega\frac{\partial u_1}{\partial t}+$$

$$+\rho A\varepsilon u_1-\rho A\omega\,v_{01}+\rho Aa_{02}+\rho A\varepsilon x-f_2=0, \tag{2}$$

unde

E reprezintă modulul lui Young;

A — aria secțiunii transversale ($A = \text{const}$);

I — momentul de inerție geometric al secțiunii transversale, în raport cu axa neutră ($I = \text{const}$);

ρ — masa specifică;

$\omega(t)$ — viteza unghiulară instantanee;

$\varepsilon(t)$ — accelerația unghiulară instantanee;

$\bar{v}_0 = v_{01}(t)\bar{i} + v_{02}(t)\bar{j}$ — viteza extremității 0;

$\bar{a}_0 = a_{01}(t)\,\bar{i} + a_{02}(t)\bar{j}$ — accelerația extremității 0;
$\bar{f}(x, t) = f_1(x, t)\,\bar{i} + f_2(x, t)\bar{j}$ — forța exterioară raportată la unitatea de lungime.

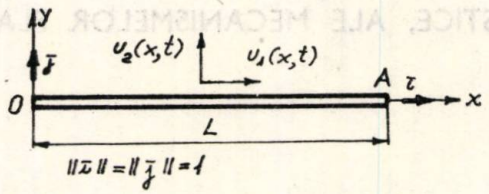


Fig. 1. — Element cinematic în mișcare plană.

Ecuațiilor de mișcare (1) și (2) li se atașează condițiile la limită:

$$u_1(0, t) = q_1(t); \qquad u_1(L, t) = q_4(t);$$

$$u_2(0, t) = q_2(t), \qquad u_2(L, t) = q_5(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0, t) = \lambda_1(t), \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(L, t) = \lambda_2(t),$$

unde

$$\lambda_1(t) = \frac{M_0}{EI}, \qquad \lambda_2(t) = \frac{M_A}{EI}, \qquad M_0 \text{ și } M_A$$

fiind momentele de legătură în 0 și A.

Fie $[0\,;\, t_n]$ intervalul temporal de observare a mișcării. Se face o diviziune a intervalului $[0\,;\, t_n]$ în:

$$[0\,;\, t_n] = \bigcup_{j=0}^{n-1} [t_j\,;\, t_{j+1}]. \tag{4}$$

cu $t_0 = 0$.

Fie

$$u_1(x, t_j) = \mu_j(x); \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t_j) = \beta_j(x),$$

$$u_2(x, t_j) = \gamma_j(x); \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t_j) = \delta_j(x). \tag{5}$$

Se consideră $\mu_0(x) = \beta_0(x) = \gamma_0(x) = \delta_0(x) \equiv 0$.

Se consideră, de asemenea, că pe subintervalul $[t_j\,;\, t_{j+1}]$ elementele $v_{01}, v_{02}, a_{01}, a_{02}, \omega, \varepsilon$ sînt constante (diviziunea se poate alege ca atare astfel ca aproximația să fie permisă).

Fie

$$v_{01}(t) = v_{01\,j}; \quad v_{02}(t) = v_{02\,j}; \quad a_{01}(t) = a_{01j}; \quad u_1(x, t) = u_{1j}(x, t),$$

$$a_{02}(t) = a_{02j}; \quad \omega(t) = \omega_j; \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_j; \quad u_2(x, t) = u_{2j}(x, t), \tag{6}$$

pentru $\forall t \in [t_j\,;\, t_{j+1}]$.

Se aplică ecuațiilor (1) și (2) transformata Laplace unilaterală în raport cu timpul, pentru $t \in [t_j;\ t_{j+1}]$, notîndu-se $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$, $f(t)$ fiind o funcție original.

Se obține

$$-EA \cdot \frac{\partial^2 \tilde{u}_{1j}}{\partial x^2} + \rho A p^2 \tilde{u}_{1j} - \rho A p\, \mu_j(x) - \rho A \beta_j(x) - \rho A \omega_j^2 \tilde{u}_{1j} -$$

$$- 2\rho A \omega_j p \tilde{u}_{2j} + 2\rho A\, \omega_j \mu_j(x) - \rho A \varepsilon_j \tilde{u}_{2j} + \rho A\, a_{01j} \cdot \frac{1}{p} -$$

$$- \rho A\, \omega_j v_{02j} \cdot \frac{1}{p} - \rho \omega_j^2 Ax \cdot \frac{1}{p} \tilde{f}_1(x,\ p) = 0; \tag{7}$$

$$EI \cdot \frac{\partial^4 \tilde{u}_{2j}}{\partial x^4} + \rho A p^2 \tilde{u}_{2j} - \rho A p \cdot \gamma_j(x) - \rho A \delta_j(x) -$$

$$- \rho I p^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{2j}}{\partial x^2} + \rho I p \gamma_j''(x) + \rho I \delta_j''(x) - \rho A\, \omega_j^2 \tilde{u}_{2j} +$$

$$+ 2\rho A \omega_j \cdot p\, \tilde{u}_{1j} - 2\rho A \omega_j \cdot \mu_j(x) + \rho A \varepsilon_j \tilde{u}_{1j} -$$

$$- \rho A \omega_j v_{01j} \cdot \frac{1}{p} + \rho A a_{02j} \cdot \frac{1}{p} + \rho A \varepsilon_j x \cdot \frac{1}{p} - \tilde{f}_2(x,\ p) = 0. \tag{8}$$

Pentru a afla răspunsul dinamic al unei bare vîscoelastice, în virtutea analogiei Alfrey-Lee se face în (7) și (8) înlocuirea

$$E \to \tilde{E} = \frac{3\, P_2(p) \cdot P_4(p)}{P_2(p) \cdot P_3(p) + 2P_1(p) \cdot P_4(p)}, \tag{9}$$

funcțiile $P_1(p) \ldots P_4(p)$ avînd forme specifice pentru fiecare tip de mediu vîscoelastic.

Se va considera, în continuare, o bară Maxwell, model ce descrie satisfăcător comportarea unor mase plastice.

În acest caz

$$P_1(p) = \tau_0 + p;\ P_2(p) = 2Gp,$$

$$P_3(p) = p;\ P_4(p) = 3Kp, \tag{10}$$

unde $\tau_0 = \frac{G}{\eta}$,

G — modul de elasticitate transversală;

η — constanta aferentă componentei newtoniene a modelului Maxwell;

$$K = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{2}{3} G,$$

ν — coeficientul de contracție transversală (Poisson)

Se va face deci, în (7) și (8) înlocuirea

$$E \to \tilde{E} = \frac{9GKp}{(3K+G)p + 3\tau_0 K}. \tag{11}$$

După substituția (11), se aplică ecuațiilor (7) și (8) transformata Fourier finită în sinus. Se obține un sistem algebric din care rezultă u_{1j} și u_{2j} în transformatele lor, Fourier finită și Laplace.

Inversarea transformatei Fourier finită în sinus duce la soluțiile $\tilde{u}_{1j}(x, p)$ și $\tilde{u}_{2j}(x, p)$ date mai jos

$$\tilde{u}_{1j}(x, p) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{1j}(p, n)}{G_{1j}(p, n)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \tag{12}$$

$$\tilde{u}_{2j}(x, p) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{2j}(p, n)}{G_{2j}(p, n)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \tag{13}$$

unde

$$F_{1j}(p, n) = \{\rho p^2 (A + I\alpha_n^2)[p(3K + G) + 3\tau_0 K] + 9GKI\alpha_n^4 p -$$

$$- \rho A \omega_j^2 [p(3K + G) + 3\tau_0 K]\} \{9GKA\alpha_n p^2 [(-1)^{n+1} \tilde{q}_4(p) +$$

$$+ \tilde{q}_1(p)] + p\tilde{f}_1^*(n, p)[p(3K + G) + 3\tau_0 K] + \rho A \mu_j^*(n) p^2 [p(3K + G) +$$

$$+ 3\tau_0 K] + \rho A[p(3K + G) + 3\tau_0 K]\left[\omega_j v_{02j} - a_{01j} + (-1)^{n+1}\omega_j^2 \frac{L^2}{\pi n}\right] +$$

$$+ \rho A\beta_j^*(n) \cdot p[p(3K + G) + 3\tau_0 K] - 2\rho A\omega_j \mu_j^*(n)[p(3K + G) + 3\tau_0 K]p\} +$$

$$+ \rho A(2\omega_j p + \varepsilon_j)[p(3K + G) + 3\tau_0 K]\{9GKI\alpha_n p^2[(-1)^n \tilde{q}_5''(p) - \tilde{q}_2''(p)] -$$

$$- 9GKI\alpha_n^3 p^2[(-1)^n \tilde{q}_5(p) - \tilde{q}_2(p)] + \rho I\alpha_n p^3[p(3K+G) + 3\tau_0 K][(-1)^{n+1} \cdot \tilde{q}_5(p) +$$

$$+ \tilde{q}_2(p)] + p[p(3K + G) + 3\tau_0 K]\tilde{f}_2^*(n, p) + \rho p^2[p(3K+G) + 3\tau_0 K][A\gamma_j^*(n) -$$

$$- I\alpha_n(-1)^{n+1}\gamma_j(L) + \gamma_j(0)) + I\alpha_n^2 \gamma_j^*(n)] + \rho A[p(3K + G) + 3\tau_0 K] \times$$

$$\times\left[\omega_j v_{01j} - a_{02j} - \varepsilon_j(-1)^{n+1} \frac{L^2}{\pi n}\right] + \rho A\delta_j^*(n) p[p(3K + G) + 3\tau_0 K] -$$

$$- \rho I\alpha_n p[p(3K+G)+3\tau_0 K][(-1)^{n+1}\delta_j(L)+\delta_j(0)]+\rho p[p(3K+G)+$$

$$+3\tau_0 K][I\alpha_n^2\delta_j^*(n)+2A\omega_j\mu_j^*(n)]\},\tag{14}$$

$$F_{2j}(p,n)=\{p^2\rho[p(3K+G)+3\tau_0 K]+9GK\alpha_n^2 p-\rho\omega_j^2[p(3K+G)+$$

$$+3\tau_0 K]\}\{9I\alpha_n p^2\times GK[(-1)^n\tilde{q}_5''(p)-\tilde{q}_2''(p)]-9GKI\alpha_n^3 p^2[(-1)^n\tilde{q}_5(p)-$$

$$-\tilde{q}_2(p)]+\rho I\alpha_n p^3[p(3K+G)+3\tau_0 K]\times[(-1)^{n+1}\tilde{q}_5(p)+\tilde{q}_2(p)]+[p(3K+$$

$$+G)+3\tau_0 K]\bar{f}_2^*(n,p)+\rho p^2[p(3K+G)+3\tau_0 K]\times[A\gamma_j^*(n)-$$

$$-I\alpha_n((-1)^{n+1}\gamma_j(L)+\gamma_j(0))+I\alpha_n^2\gamma_j^*(n)]+\rho A[p(3K+G)+3\tau_0 K]\times$$

$$\times\left[\omega_j v_{01j}-a_{02j}-\varepsilon_j(-1)^{n+1}\frac{L^2}{\pi n}\right]+\rho A\,\delta_j^*(n)p[p(3K+G)+3\tau_0 K]+$$

$$+\rho I\alpha_n p[p(3K+G)+3\tau_0 K][(-1)^{n+1}\delta_j(L)+\delta_j(0)]+\rho p[p(3K+G)+$$

$$+3\tau_0 K]\times[I\alpha_n^2\delta_j^*(n)+2A\omega\mu_j^*(n)]\}-\rho(2\omega_j p+\varepsilon_j)[p(3K+G)+$$

$$+3\tau_0 K]\times\{9GKA\alpha_n p^2[(-1)^{n+1}\tilde{q}_4(p)+\tilde{q}_1(p)]+p[p(3K+G)f_1^*(n,p)+$$

$$+\rho A\mu_j^*(n)\times p^2[p(3K+G)+3\tau_0 K]+\rho A[p(3K+G)+3\tau_0 K]\left[\omega_j v_{02j}-\right.$$

$$\left.-a_{01j}+\omega_j^2(-1)^{n+1}\frac{L^2}{\pi n}\right]+\rho Ap[p(3K+G)+3\tau_0 K][\beta_j^*(n)-2\omega_j\mu_j^*(n)]\},\tag{15}$$

$$G_{1j}(p,n)=Ap\cdot[p(3K+G)+3\tau_0 K]\{\rho^2(A+I\alpha_n^2)(3K+G)p^5+$$

$$+3\tau_0 K\rho^2(A+I\alpha_n^2)p^4+[18I\alpha_n^4 GK+9A\alpha_n^2 GK-\rho\omega_j^2 I\alpha_n^2(3K+G)+$$

$$+2\rho A\omega_j^2(3K+G)]\rho p^3+[4A\omega_j\varepsilon_j(3K+G)-3\tau_0 K\omega_j^2 I\alpha_n^2+$$

$$+6\tau_0 KA\omega_j^2]\rho^2 p^2+[12\tau_0 K\rho^2 A\omega_j\varepsilon_j+9GK\alpha_n^6-9GK\rho\omega_j^2 I\alpha_n^4-$$

$$-9GK\rho A\omega_j^2\alpha_n^2+\rho^2 A\omega_j^4(3K+G)+\rho^2 A\varepsilon^2(3K+G)]p+3\tau_0 K\rho^2 A\omega_j^4+$$

$$+3\tau_0 K\rho^2 A\varepsilon_j^2\},\tag{16}$$

$$G_{2j}(p,n)=p[p(3K+G)+3\tau_0 K]\{\rho^2(A+I\alpha_n^2)(3K+G)p^5+$$

$$+3\tau_0 K\rho^2(A+I\alpha_n^2)p^4+[18I\alpha_n^4 GK+9A\alpha_n^2 GK-\rho\omega_j^2 I\alpha_n^2(3K+G)+$$

$$+ 2\rho A\,\omega_j^2(3K + G)]\,\rho p^3 + [4A\,\omega_j\,\varepsilon_j(3K + G) - 3\tau_0 K\omega_j^2 I\alpha_n^2 +$$

$$+ 6\,\tau_0 KA\,\omega_j^2]\rho^2 p^2 + [12\,\tau_0 K\rho^2 A\omega_j\varepsilon_j + 9GK\,\alpha_n^6 - 9GK\,\rho\omega_j^2 I\alpha_n^4 -$$

$$- 9\,GK\rho\,A\,\omega_j^2\alpha_n^2 + \rho^2 A\omega_j^4(3K + G) + \rho^2 A\varepsilon^2(3K + G)]\,p +$$

$$+ 3\,\tau_0\,K\rho^2 A\omega_j^4 + 3\,\tau_0 K\rho^2 A\,\varepsilon_j^2\}\,. \tag{17}$$

$$\varphi^*(n) = \int_0^L \varphi(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx, \tag{18}$$

$\varphi(x)$ fiind o funcţie care satisface condiţiile Dirichlet pentru $x \in [0,\ L]$.

Inversarea transformatei Laplace în (12) — (13) se face, pentru un caz concret, cu teoremele de dezvoltare şi folosind metode numerice pentru rezolvarea ecuaţiilor $G_{1j}(p) = 0$; $G_{2j}(p) = 0$.
Fie $u_{1j}(x,\ t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}_{1j}(x, p)]$; $u_{2j}(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{u}_{2j}(x, p)]$.
Cîmpul deplasărilor longitudinale şi transversale este, în final

$$u_1(x,\ t) = u_{10}(x, t) + \sum_{j=0}^{n-1}[u_{1,j+1}(x,\ t) - u_{1,j}(x, t)]\,H(t - t_{j+1}), \tag{19}$$

$$u_2(x, t) = u_{20}(x, t) + \sum_{j=0}^{n-1} u_{2,j+1}(x,\ t) - u_{2,j}(x, t)]\,H(t - t_{j+1}), \tag{20}$$

unde $H\ (t - t_{j+1})$ este distribuţia Heaviside.

2. MODELUL DECUPLAT

În [2, 3] s-au dedus ecuaţiile de mişcare în deplasări pentru un element cinematic liniar-elastic în mişcare de rototranslaţie plană (fig. 1), în varianta aproximativă a ecuaţiilor decuplate

$$c^2\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 + \left((v_{02}\omega - a_{01} + \omega^2 x + \frac{f_1}{\rho}\right) = 0, \tag{21}$$

$$EI\,\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \rho A\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \omega^2 A\rho\,u_2 + (\rho A\,a_{02} + \rho A\omega\,v_{01} + \rho A\varepsilon x - f_2) = 0, \tag{22}$$

unde $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$, iar restul notaţiilor au semnificaţia din ecuaţiile (1) şi (2).

Păstrind notaţiile din cazul modelului decuplat şi procedînd analog pentru o bară Maxwell, se obţin soluţiile, în transformata Laplace, pe intervalul $[t_j;\ t_{j+1}]$;

$$\tilde{u}_{1j} = \frac{2}{L(3K+G)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{9\,\alpha_n GK}{\rho} [(-1)^{n+1} \cdot \tilde{q}_4 + \tilde{q}_1](3K+G) \times \right.$$

$$\times \frac{p}{\rho(3K+G)\,p^3 + 3\,\tau_0\,\rho K p^2 + [9\,GK\alpha_n^2 - \rho(3K+G)\,\omega_j^2]p - 3\tau_0\rho K\omega^2} + \frac{2}{j} +$$

$$+ \frac{A_1\,p^3 + B_j\,p^2 + C_j \cdot p + D_j}{p[\,\rho(3K+G)p^3 + 3\tau_0\rho K\,p^2 + (9\,GK\alpha_n^2 - \rho(3K+G)\omega_j^2)p - 3\tau_0\rho\,K\omega_j^2\,]} +$$

$$\left. + \frac{(3K+G)p + 3\,\tau_0\,K}{\rho^2(3K+G)p^3 + 3\tau_0\rho^2 Kp^2 + [9\,\rho GK\alpha_n^2 - \rho^2(3K+G)\omega_j^2]p - 3\tau_0\rho^2 K\omega_j^2} \cdot \tilde{f}_1^* \right\} \times$$

$$\times \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right); \tag{23}$$

$$\tilde{u}_{2j} = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 9\,GK\,I\alpha_n[(-1)^n\,\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1] \times \right.$$

$$\times \frac{p}{\rho A(3K+G)p^3 + [9GK\,I\alpha_n^4 + \omega_j^2 A\,\rho(3K+G)]p + 3\tau_0 K\omega_j^2 A\,\rho + 3\rho A\,\tau_0 K p^2} -$$

$$- \frac{9\,GKI\,\alpha_n^3[(-1)^n\,\tilde{q}_5 - \tilde{q}_2] \cdot p}{\rho A(3K+G)p^3 + [9GKI\alpha_n^4 + \omega_j^2 A\rho(3K+G)]p + 3\tau_0 K\omega_j^2\,A\,\rho + 3\rho A\,\tau_0\,K\,p^2} +$$

$$+ \frac{Ep^3 + Fp^2 + G_j p + H_j}{\rho A(3K+G)p^3 + [9GKI\alpha_n^4 + \omega_j^2 A\,\rho(3K+G)]p + 3\tau_0 K\omega_j^2\,A\,\rho + 3\rho A\,\tau_0 K p^2} +$$

$$\left. + \frac{(3K+G)\,p + 3\tau_0\,K}{\rho A(3K+G)p^3 + [9GKI\alpha_n^4 + \omega_j^2\,A\,\rho(3K+G)]p + 3\tau_0 K\omega_j^2\,A\,\rho + 3\rho\,A\,\tau_0 K p^2} \times \right.$$

$$\left. \times \tilde{f}_2^* \right\} \times \sin\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right), \tag{24}$$

unde

$$A_1 = 3K + G\,;\ B_j = 3\,\tau_0\,K\mu_j^* + (3K+G)\beta_j^*,$$

$$C_j = 3\,\tau_0 K\beta_j^* + (3K+G)\left[\frac{L}{n\pi}(1 + (-1)^{n+1})\,(v_{02,J} - a_{01}, j) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_j^2}{n\pi}\,(-1)^{n+1} \cdot L^2\right],$$

$$D_j = 3\tau_0 K\left[\frac{L}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})(V_{02,j}-a_{01,j})+\frac{\omega_j^2}{n\pi}(-1)^{n+1}\cdot L^2\right],$$

$$E_1 = (3K+G)\,\rho A\gamma^*;\quad F=(3K+G)\,\rho A\delta^*,$$

$$G_j = 3\tau_0 K\rho A\delta^* + (3K+G)\;[\rho A\, a_{02,j}+\rho A\omega_j v_{01,j}]\times$$

$$\times\frac{L}{n\pi}\left[1+(-1)^{n+1}\right]-(3K+G)\rho A\varepsilon_j(-1)^{n+1}\cdot\frac{L^2}{n\pi},$$

$$H_j = 3\tau_0 K[\rho A\, a_{02,j}+\rho A\,\omega_j\, v_{01,j}]\cdot\frac{L}{n\pi}[1+(-1)^{n+1}]-$$

$$-3\tau_0 K\;\rho A\varepsilon_j(-1)^{n+1}\cdot\frac{L^2}{n\pi}.$$

După inversarea transformatei Laplace, soluțiile finale sînt de tipul (19), (20).

3. APLICAȚIE

Se dă, mai jos, soluția în deplasări pentru o bară Maxwell în mișcare de translație plană.

Punînd în (23) și (24): $\omega_j = \varepsilon_j = 0$, se obțin soluțiile

$$u_{1j}(x,t) = \frac{2}{L(3K+G)}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{9\alpha_n GK}{\rho}(3K+G)\cdot\int_0^t(-1)^{n+1}q_4(\tau)-q_1(\tau)]\times\right.$$

$$\times\frac{[-4\rho\alpha(3K+G)+6\tau_0\rho K]^2\cdot\cos[r_n(t-\tau)]+4\rho(3K+G)\,r_n\sin[r_n(t-\tau)]}{[-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K]^2+4\rho^2(3K+G)^2r_n^2}\times$$

$$\times\,\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau+\frac{3C_jG\alpha_n^2-\tau_0\rho D_j}{27G^2K\alpha_n^4}H(t)+\frac{D_j}{9GK\alpha_n^2}t+$$

$$+\frac{[(-2\alpha R+2S)(-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K)+4\rho r_n^2(3K+G)]\cos(s_n t)+}{+4\rho r_n(-R\alpha+S)(3K+G)\sin(s_n t)}\times$$

$$\times\frac{}{[-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K]^2+4\rho^2 s_n^2(3K+G)^2}$$

$$\times\mathrm{e}^{-\alpha t}+\int_0^t\left[\frac{3\tau_0 K}{9\rho GK\alpha_n^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{P_n\cos(s_n\tau)+Q_n\sin(s_n\tau)}{\rho(\alpha^2+s_n^2)[-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K]^2+4\rho^2(3K+G)^2s_n^2}\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\,(f_1^*(n,t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\;\sin\alpha_n x;\qquad(25)$$

$$u_{2j}(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{9GKI\,\alpha_n\int_0^t[(-1)^n\,\lambda_2(\tau) - \lambda_1(\tau)]\times\right.$$

$$\times\frac{2\cos[\Omega_n(t-\tau)][-2\rho A\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho AK]^2+4\rho A(3K+G)\Omega_n\sin[\Omega_n(t-\tau)]}{[-2\rho A\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K\alpha]^2+4\rho^2A^2(3K+G)^2\,\Omega_n^2}\times$$

$$\times\,e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau - 9GKI\,\alpha_n^3\int_0^t[(-1)^n\,q_5(\tau) - q_2(\tau)]\times$$

$$\times\frac{2\cos[\Omega_n(t-\tau)][-2\rho A\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho AK]^2+4\rho A(3K+G)\Omega_n\sin[\Omega_n(t-\tau)]}{[-2\rho A\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K\alpha]^2+4\rho^2A^2(3K+G)^2\,\Omega_n^2}\times$$

$$\times\,e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau + \frac{E_1\delta(t)}{\rho A(3K+G)} + \frac{H_j}{9GK\,I\alpha_n^4} +$$

$$+\frac{2[Y_n\cos(a_n t) - W_n\sin(a_n t)]}{\rho A(\alpha^2+a_n^2)[-2\alpha(3K+G)+3\tau_0K]^2+4a_n^2(3K+G)^2}\,e^{-\alpha t} +$$

$$+\frac{3\tau_0 K}{9GI\,\alpha_n^4}f_2^* + \int_0^t\frac{Z_n\cos(a_n\tau) + V_n\sin(a_n\tau)}{A(\alpha^2+a_n^2)[-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K]^2+4\rho^2(3K+G)^2a_n^2}\times$$

$$\left.\times\,e^{-\alpha\tau}f^*(n,t-\tau)\,d\tau\right\}\sin\alpha_n x, \qquad (26)$$

unde

$$\alpha = \frac{3\tau_0 K}{2(3K+G)};\quad r_n = \frac{[36G\rho(3K+G)\,\alpha_n^2 - 9\tau_0^2\rho^2K^2]^{\frac{1}{2}}}{2\rho(3K+G)},$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L};\quad s_n = \frac{[36G\rho K(3K+G)\alpha_n^2 - 9\tau_0^2\rho^2K]^{\frac{1}{2}}}{2\rho(3K+G)};$$

$$P_n = -2\alpha[-\alpha(3K+G)+3\tau_0K][-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K] -$$

$$-4s_n^2\rho\alpha(3K+G)^2 - 4s_n^2\rho(3K+G)[-\alpha(3K+G)+3\tau_0K] +$$

$$+2s_n(3K+G)[-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K],$$

$$Q_n = -4\rho\alpha s_n(3K+G)[-\alpha(3K+G)+3\tau_0K] +$$

$$+2s_n[-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K][-\alpha(3K+G)+3\tau_0K] +$$

$$+ 2\alpha\, s_n(3K+G)\,[-2\rho\,\alpha(3K+G)+3\tau_0\rho K]+4s_n^2\,\rho(3K+G),$$

$$\omega_n=[36\rho\,AGK\,I\alpha_n^4(3K+G)-9\rho^2A^2\tau_0^2K^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$R=\frac{27\,AG^2K\alpha_n^4-\rho(3K+G)(3C_jG\alpha_n^2-\tau_0\,\rho D_j)}{27\,G^2K\alpha_n^4},$$

$$S=\frac{9G^2K\alpha_n^4B_j-\tau_0\rho K(3C_jG\alpha_n^2-\tau_0\rho D_j)-\rho G\alpha_n^2D_j(3K+G)}{9G^2K\alpha_n^4},$$

$$a_n=\frac{3GKI(3K+G)\alpha_n^4-9\tau_0^2\rho K^2A}{2(3K+G)};\quad Y_n=\left[\left(F-\frac{3E\,\tau_0\,K}{3K+G}\right)(\alpha^2-a_n^2)-\right.$$

$$\left.-\alpha\left(G_j-\frac{9GE_1KI\,\alpha_n^4}{\rho A\,(3K+G)}\right)\right][2(3K+G)(\alpha^2-a_n^2)-3\tau_0K\alpha)]-$$

$$-a_n^2[4\alpha(3K+G)-3\tau_0K]\times\left[G_j-\frac{9GE_1KI\,\alpha_n^4}{\rho A(3K+G)}-\right.$$

$$\left.-2\alpha\left(F-\frac{3E_1\tau_0K}{3K+G}\right)\right];\ W_n=\left[\left(F-\frac{3E_1\tau_0\,K}{3K+G)}\right)(\alpha^2-a_n^2)-\right.$$

$$\left.-\alpha\left(G_j-\frac{9GE_1\,KI\,\alpha_n^4}{\rho A(3K+G)}\right)\right]a_n[4\alpha(3K+G)-3\tau_0K]+a_n\left[G_j-\frac{9\,GE_1\,KI\,\alpha_n^4}{\rho A(3K+G)}-\right.$$

$$\left.-2\alpha\left(F-\frac{3E_1\tau_0K}{3K+G}\right)\right][2(3K+G)(\alpha^2-a_n^2)-3\tau_0K\alpha],$$

$$Z_n=-2\alpha[-\alpha(3K+G)+3\tau_0K]\cdot[-2\rho\alpha(3K+G)+3\tau_0\,\rho K]-4a_n^2\,\rho\alpha\times$$

$$\times(3K+G)^2-4a_n^2\,\rho(3K+G)[-\alpha(3K+G)+3\tau_0K]+2a_n\,(3K+G)\times$$

$$\times[-2\rho\alpha\,(3K+G)+3\tau_0\,\rho\,K],$$

$$V_n=-4\rho\alpha a_n(3K+G)[-\alpha(3K+G)+3\tau_0A]+2a_n[-2\rho\alpha(3K+G)+$$

$$+\tau_0\,\rho K]\,[-\alpha(3K+G)+3\tau_0\,K]+2\alpha\,a_n(3K+G)\,[-2\rho\,\alpha(3K+G)+$$

$$+3\tau_0\rho\alpha]+4a_n^3\,\rho(3K+G).$$

4. CONCLUZII

Folosirea ecuațiilor de mișcare în deplasări, deduse în [2, 3] pentru elementele cinematice deformabile ale mecanismelor plane și utilizarea analogiei Alfrey-Lee permite, așa cum s-a făcut mai sus pentru un model Maxwell, determinarea răspunsului dinamic al elementelor cinematice cu proprietăți vîscoelastice.

Primită la redacție la 24 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. M. BUCULEI, *Sur la cinématique et la cinétique des mécanismes à éléments élastiques*, Rev. roum.sci.techn. — Méc. Appl., *2* (1979).
2. M. BUCULEI, S. MIȚIS, *Asupra vibrațiilor elementelor cinematice ale mecanismelor plane cu cuple de translație*, St. cerc. mec. apl., **39**, *2* (1980).
3. M. BUCULEI, *Relații globale în elastocinematica mecanismelor plane cu bare*, St. Cerc. mec. apl., **39**, *5* (1980).
4. W. NOWACKI, *Dinamica sistemelor elastice*, Editura tehnică, București, 1969.
5. CHR. PELECUDI, *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1975.

UNICITATEA IDENTIFICĂRII MATRICELOR DE RIGIDITATE ŞI AMORTIZARE LA STRUCTURILE ÎN CADRE ACŢIONATE SEISMIC

de VICTOR FLORIN POTERAŞU, DUMITRU VIERU
Institutul Politehnic Iaşi, România
GIUSEPPE MUSCOLINO
Universitatea din Palermo, Institutul de Ştiinţa Construcţiilor, Italia

Problemele inverse în mecanica structurilor au început să fie intens studiate prin aşanumitele probleme de identificare. Lucrarea studiază unicitatea identificării matricelor de rigiditate şi amortizare la structurile în cadre acţionate de o excitaţie la bază de tip seismic cunoscută. Distribuţia maselor este cunoscută, iar matricea de amortizare este considerată ca o combinaţie liniară a matricelor de masă şi rigiditate. Comportarea structurii este liniară. După studierea amplasării senzorilor în structură, pentru unicitatea identificării, se dau exemple numerice.

1. INTRODUCERE

Pentru a realiza o protecţie antiseismică eficientă a structurilor în context cu scăderea costului aparaturii necesare măsurătorilor, tot mai multe dintre acestea au fost dotate cu instrumente. Această aparatură are scopul de a permite determinarea proprietăţilor (parametrilor) structurii pe baza răspunsului obţinut în urma excitaţiilor create prin şocuri ale terenului, seisme etc. Multe lucrări au utilizat aceste răspunsuri pentru determinarea parametrilor structurilor [1] — [5] dar au abordat mai puţin în acest context unicitatea problemelor inverse.

Din punct de vedere practic, s-a arătat că chiar dacă schema de identificare converge (multe dintre astfel de scheme bazate pe conceptul „intrare-ieşire" fiind iterative) [6], [7], această convergenţă nu conduce la valorile corecte ale parametrilor, dacă problema inversă este neunică.

În lucrare se tratează o structură în cadre cu n nivele, deci n grade de libertate. Problema de identificare constă în determinarea matricei de rigiditate sau a celei de amortizare cunoscînd excitaţia bazei şi răspunsul corespunzător al unuia dintre nivele. În [8] o problemă similară este studiată într-un context diferit, polinoamele şi relaţiile de recurenţă obţinute fiind prezentate sub o altă formă.

Exemplul numeric este diferit de cel dat în [8]. În plus, se prezintă algoritmul de calcul.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

În figura 1 este reprezentat modelul unei structuri în cadre cu n nivele avînd masele m_j, rigidităţile K_j şi amortizările c_j, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Structura are prin urmare n grade de libertate. Fie $Z(t)$ funcţia care dă mişcarea bazei structurii. Se va nota prin $W_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$

mişcarea absolută a nivelului j corespunzătoare intrării $Z(t)$. Comportarea structurii este liniar elastică. Mişcarea structurii este modelată prin următorul sistem de ecuaţii diferenţiale :

$$M\ddot{W} + C\dot{W} + AW = B\,Z(t), \tag{1}$$

unde $C = \alpha M + \beta A$,

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & m_2 \ldots \\ . & \ldots . \\ 0 & \ldots m_n \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -K_1 & K_1+K_2 & -K_2 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & -K_{n-1} \\ 0 & . & . & . & -K_{n-1} & K_{n-1}+K_n & \\ & & & . & & & \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ K_n \end{pmatrix}; \qquad W = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ W_n(t) \end{pmatrix};$$

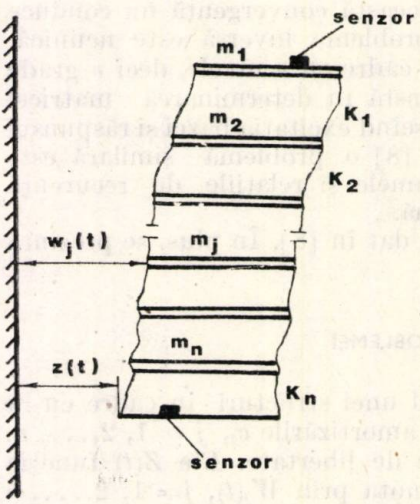


Fig. 1

Presupunînd că masele m_j şi coeficienţii α şi β sînt cunoscuţi, problema identificării constă în determinarea rigidităţilor K_j şi a răspunsului fiecărui nivel, răspuns corespunzător intrării $Z(t)$.

În cele ce urmează se va considera că toate funcţiile care intervin sînt transformabile Laplace.

Cum $m_j > 0$ se poate considera matricea

$$N = \begin{pmatrix} \sqrt{m_1} & . & . \\ . & . & . \\ . & . & \sqrt{m_n} \end{pmatrix}$$ şi nota

$Y = N\,W$ (2) de unde $W = N^{-1}\,Y$ (2')

Cu aceste relaţii (1) devine

$$MN^{-1}\ddot{Y} + CN^{-1}\dot{Y} + AN^{-1}Y = BZ(t). \tag{3}$$

Dar $M = N^2$ și înmulțind la stînga cu N^{-1} se obține:

$$\ddot{Y} + N^{-1}CN^{-1}\dot{Y} + N^{-1}AN^{-1}Y = N^{-1}BZ(t), \tag{3'}$$

$N^{-1}CN^{-1}=N^{-1}(\alpha N^2 + \beta A)N^{-1} = \alpha I + \beta N^{-1}AN^{-1}$, unde I este matricea unitate de ordinul n. Se notează

$$N^{-1}AN^{-1} = K, \tag{4}$$

$$N^{-1}B = L. \tag{4'}$$

Rezultă

$$K = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 & . & . & . & . & . \\ -a_1 & b_2 & -a_2 & . & . & . & . \\ 0 & -a_2 & b_3 & -a_3 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -a_{n-1} \\ . & . & . & . & . & -a_{n-1} & b_n \end{pmatrix};$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ K_n/\sqrt{m_n} \end{pmatrix},$$

în care

$$Q_j = \frac{K_j}{\sqrt{m_j m_{j+1}}}; \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{5}$$

$$b_j = \frac{K_{j-1} + K_j}{m_j}, \quad K_0 = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5'}$$

Sistemul (3') devine

$$\ddot{Y} + (\alpha I + \beta K)\dot{Y} + KY = LZ(t). \tag{6}$$

Se presupune ca $Y(0) = \dot{Y}(0) = 0$ și aplicînd în (6) transformata Laplace, rezultă

$$p^2 Y(p) + (\alpha I + \beta K)\, p\, Y(p) + K Y(p) = L\, Z(p), \tag{7}$$

unde $p \in C$, $Y(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, Y(t)\, dt$; $\quad Z(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, Z(t)\, dt$.

Luînd $p = ix$, $x \in R$ și efectuînd calculele în (7), se obține

$$\left(K - \frac{x^2 - \alpha x i}{1 + \beta x i} I\right) Y(p) = \frac{L}{1 + \beta x i} Z(p). \tag{7'}$$

Se notează $\frac{x^2 - \alpha x\mathrm{i}}{1 + \beta x\mathrm{i}} = \lambda$, $\frac{1}{1 + \beta x\mathrm{i}} \quad L = \frac{1}{q} L_1$, $q = 1 + \beta x\mathrm{i}$.

După efectuarea înlocuirilor în (7') rezultă

$$(K - \lambda I)\, Y(\lambda) = L_1 Z(\lambda). \tag{8}$$

Rezolvînd sistemul (8), obținem $Y_j(\lambda) = \frac{\Delta_j}{\Delta} Z(\lambda)$.

Dacă se notează cu $P_j(\lambda)$ minorii principali ai matricei $(K - \lambda I)$ $j = 1, 2, \ldots, n$ și $P_0(\lambda) = 1$, se ajunge la

$$Y_j(\lambda) = \frac{K_n}{q\sqrt{m_n}}\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_j \frac{P_{j-1}(\lambda)}{P_n(\lambda)} Z(\lambda).$$

Deoarece $W_j(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{m_j}}\, Y_j(\lambda)$, avem

$$W_j(\lambda) = \frac{1}{q} \frac{1}{\sqrt{m_j}} \frac{K_n}{\sqrt{m_n}}\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_j \frac{P_{j-1}}{P_j} Z(\lambda), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Se cunosc următoarele proprietăți ale minorilor $P_j(\lambda)$:

a) $P_j(\lambda)$ este polinom de gradul j și are termenul de grad j egal cu $(-1)^j \lambda^j$.

b) $P_j(\lambda)$ satisface următoarea relație de recurență

$$P_j(\lambda) = (b_j - \lambda) P_{j-1}(\lambda) - a_{j-1}^2 P_{j-2}(\lambda);\ j = 2, 3, \ldots, n;$$

$$P_0(\lambda) = 1,\ P_1(\lambda) = b_1 - \lambda. \tag{10}$$

Înlocuind în $P_j(\lambda)$ pe $\lambda = \frac{x^2 - \alpha x\mathrm{i}}{1 + \beta x\mathrm{i}}$ și efectuînd calculele, se obține o fracție rațională cu numitorul $(1 + \beta x\mathrm{i})^j$ și numărătorul, un polinom de gradul $2j$ în necunoscuta x cu termenul de grad $2j$ egal cu $(-1)^j x^{2j}$. Se notează numărătorul acestei fracții cu $Q_j(x) \cdot Q_j$ sînt polinoame cu coeficienți complecși și $\lim_{x \to \infty} \frac{Q_j(x)}{x^{2j}} = (-1)^j$. Folosind relația de recurență (10) se obține următoarea relație de recurență pentru polinoamele $Q_j(x)$.:

$$Q_j(x) = R_j(x)\, Q_{j-1}(x) - a_{j-1}^2 (1 + \beta x\mathrm{i})^2 Q_{j-2}(x); \qquad j = 2, \ldots, n,$$

$$Q_0(x) = 1;\ Q_1(x) = R_1(x) = -x^2 + \mathrm{i}(\alpha + \beta b_1) x + b_1, \tag{11}$$

$$R_j(x) = -x^2 + \mathrm{i}(\alpha + \beta b_j) x + b_j; \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Din (9) rezultă acum :

$$W_j(x) = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \frac{K_n}{\sqrt{m_n}} a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_j \frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)} (1 + \beta x i)^{n-j} Z(x),$$

$$j = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Fie $Q_j(x) = \varphi_j(x) + i\,\psi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.
Înlocuind în (11) şi efectuînd calculele se obţine

$$\begin{aligned}
\varphi_j(x) &= (b_j - x^2)\,\varphi_{j-1}(x) - x(\alpha + \beta b_j)\,\psi_{j-1}(x) - \\
&- a_{j-1}^2(1 - \beta^2 x^2)\,\varphi_{j-2}(x) + 2\beta a_{j-1}^2\, x\,\psi_{j-2}(x), \\
\psi_j(x) &= (b_j - x^2)\psi_{j-1}(x) + x(\alpha + \beta b_j)\,\varphi_{j-1}(x) - \\
&- a_{j-1}^2(1 - \beta^2 x^2)\,\psi_{j-2}(x) - 2\beta a_{j-1}^2\, x\,\varphi_{j-2}(x) \qquad (13) \\
\varphi_0(x) &= 1, \quad \psi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = b_1 - x^2, \quad \psi_1(x) = (\alpha + b_1\beta)\,x, \\
& j = 2, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Se vor justifica în cele ce urmează unele proprietăţi ale polinoamelor φ_j şi ψ_j:

1°) grad $\varphi_j(x) = 2j$; grad $\psi_j(x) = 2j - 1$.

Acest lucru rezultă imediat din (13) utilizînd inducţia matematică

2°) $\psi_j(x) \tilde{=} x\,\psi_j(x)$; $j = 1, \ldots, n$.

Demonstraţie. Se presupune adevărată relaţia pentru $j - 1$, şi din (13) rezultă adevărată pentru j, deci 2°) este demonstrată.
Relaţiile (13) devin acum

$$\begin{aligned}
\varphi_j(x) &= (b_j - x^2)\,\varphi_{j-1}(x) - (\alpha + \beta\, b_j)\, x^2 \tilde{\psi}_{j-1}(x) - \\
&- a_{j-1}^2(1 - \beta^2 x^2)\varphi_{j-2}(x) + 2\beta a_{j-1}^2\, x^2\, \tilde{\psi}_{j-2}(x), \\
\tilde{\psi}_j(x) &= (b_j - x^2)\,\tilde{\psi}_{j-1}(x) + (\alpha + \beta b_j)\,\varphi_{j-1}(x) - \\
&- a_{j-1}^2(1 - \beta^2 x^2)\tilde{\psi}_{j-2}(x) - 2\,\beta\, a_{j-1}^2\,\varphi_{j-2}(x), \qquad (13') \\
\varphi_0(x) &= 1, \quad \tilde{\psi}_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = b_1 - x^2, \quad \tilde{\psi}_1(x) = \alpha + b_1\beta.
\end{aligned}$$

3°) grad $\varphi_j(x) = 2j$; grad $\tilde{\psi}_j(x) = 2(j - 1)$, $\varphi_j(x)$, $\tilde{\psi}_j(x)$ sînt pare.
Demonstraţie. Se presupune adevărată proprietatea pentru $j - 1$ şi din (13′) rezultă imediat că este adevărată pentru j.

Notînd $x^2 = \xi$, $\xi \in [0, \infty)$ din (13′) se obține (14)

$$\varphi_j(\xi) = (b_j - \xi)\,\varphi_{j-1}(\xi) - (\alpha + b_j\beta)\,\xi\,\tilde{\psi}_{j-1}(\xi) -$$

$$- a_{j-1}^2(1 - \beta^2\xi)\,\varphi_{j-2}(\xi) + 2\beta\,a_{j-1}^2\xi\tilde{\psi}_{j-2}(\xi),$$

$$\tilde{\psi}_j(\xi) = (b_j - \xi)\tilde{\psi}_{j-1}(\xi) + (\alpha + b_j\beta)\,\varphi_{j-1}(\xi) -$$

$$- a_{j-1}^2(1 - \beta^2\xi)\,\tilde{\psi}_{j-2}(\xi) - 2\beta a_{j-1}^2\,\varphi_{j-2}(\xi), \qquad (14)$$

$$j = \overline{2, n}, \quad \varphi_0 = 1; \quad \tilde{\psi}_0 = 0; \quad \varphi_1(\xi) = b_1 - \xi; \quad \tilde{\psi}_1(\xi) = \alpha + b_1\beta.$$

Proprietăți ale polinoamelor $Q_j(x)$.

În cele ce urmează se vor demonstra unele proprietăți ale polinoamelor Q_j, necesare pentru rezolvarea problemei de identificare.

LEMA 1. *Dacă* $(\alpha + b_2\beta)\,(\alpha + b_1\,\beta)b_1 + a_1^2(1 - \beta^2 b_1) \neq 0$, *atunci polinoamele* $Q_j(x)$ *și* $Q_{j-1}(x)$ *nu au rădăcini comune reale, oricare ar fi* $j = \overline{1, n}$.

Demonstrație. Dacă $x_0 \neq 0$ ar fi rădăcina comună a celor două polinoame, atunci $Q_j(x_0) = Q_{j-1}(x_0) = 0 \Rightarrow \varphi_j(x_0) + ix_0\,\tilde{\psi}_j(x_0) = \varphi_{j-1}(x_0) + ix_0\,\tilde{\psi}_{j-1}(x_0) = 0 \Rightarrow$

$$\varphi_j(x_0) = \varphi_{j-1}(x_0) = 0; \quad \tilde{\psi}_j(x_0) = \tilde{\psi}_{j-1}(x_0) = 0.$$

Deci pentru a demonstra lema 1 este echivalent a demonstra că polinoamele $\varphi_j(x)$ și $\varphi_{j-1}(x)$, respectiv $\tilde{\psi}_j(x)$ și $\tilde{\psi}_{j-1}(x)$, nu au rădăcini comune egale. Se demonstrează acest lucru prin inducție.

$$\varphi_1(\xi) = b_1 - \xi, \quad \varphi_2(\xi) = (b_2 - \xi)(b_1 - \xi) -$$

$$- (\alpha + b_2\,\beta)(\alpha + b_1\,\beta)\xi - a_1^2(1 - \beta^2\xi).$$

Rădăcina comună ar putea fi $\xi_0 = b_1$.

$$\varphi_2(\xi_0) - [(\alpha + \beta b_2)(\alpha + \beta b_1)\,b_1 + a_1^2(1 - \beta^2 b_1)] \neq 0.$$

Prin urmare $\varphi_1(\xi)$ și $\varphi_2(\xi)$ nu au zerouri comune.

$$\tilde{\psi}_1(\xi) = \alpha + b_1\beta, \quad \tilde{\psi}_2(\xi) = (b_2 - \xi)(\alpha + \beta b_1) +$$

$$+ (b_1 - \xi)(\alpha + \beta b_2) - 2\beta a_1^2,$$

nu au zerouri comune.

Se presupune că $\varphi_j(\xi)$ și $\varphi_{j-1}(\xi)$, respectiv $\tilde{\psi}_j(\xi)$ și $\tilde{\psi}_{j-1}(\xi)$, nu au zerouri comune egale pentru $j = \overline{1, n}$, și fie ξ_0^* astfel încît

$$\varphi_{n+1}(\xi_0^*) = \varphi_n(\xi_0^*) = \tilde{\psi}_{n+1}(\xi_0^*) = \tilde{\psi}_n(\xi_0^*) = 0.$$

Folosind (14) se obţine

$$(S)\quad \begin{cases} a_n^2(1-\beta^2\xi_0^*)\,\varphi_{n-1}(\xi_0^*) - 2\beta a_n^2\,\xi_0^*\,\widetilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*) = 0, \\ a_n^2(1-\beta^2\xi_0^*)\,\widetilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*) + 2\beta\, a_n^2\,\varphi_{n-1}(\xi_0^*) = 0. \end{cases}$$

(S) este un sistem liniar şi omogen în $\varphi_{n-1}(\xi_0^*)$ şi $\widetilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*)$ cu $\det(S) = (1-\beta^2\xi_0^*)^2 + 4\beta^2\xi_0^* = (1+\beta^2\xi_0^*)^2 \neq 0$. Rezultă că (S) admite numai soluţia banală, deci $\varphi_{n-1}(\xi_0^*) = \widetilde{\psi}_{n-1}(\xi_0^*) = 0$.

Se obţine deci că φ_n şi φ_{n-1}, respectiv $\widetilde{\psi}_n$ şi $\widetilde{\psi}_{n-1}$, admit zeroul comun ξ_0^*. Este prin urmare contradicţie şi lema 1 este demonstrată. Dacă $x_0 = 0$ este suficient să demonstrăm că polinoamele φ_j şi φ_{j-1} nu au rădăcina comună $x_0 = 0$.

$$\varphi_1(0) = b_1 \neq 0, \qquad \varphi_2(0) = b_1 b_2 - a_1^2 = \frac{K_1 K_2}{m_1 m_2} \neq 0.$$

Se presupune că φ_j şi φ_{j-1} nu admit rădăcina comună $x_0 = 0$, $j = \overline{1, n}$, dar $\varphi_{n+1}(0) = \varphi_n(0) = 0$. Din prima relaţie (14) se obţine

$$a_n^2\,\varphi_{n-1}(0) = 0 \Rightarrow \varphi_{n-1}(0) = 0.$$

Contradicţie.

LEMA 2. *Fie K submatricele principale de ordin j ale matricei K,*

$$\det K_j = \prod_{l=1}^{j} \frac{K_l}{m_l}.$$

Demonstraţie.

Fie A_j submatricea principală de ordin j a matricei A.

$$\det K_j = \det A_j \frac{1}{m_j}\frac{1}{m_{j-1}} \cdots \frac{1}{m_1} =$$

$$= K_1 K_2 \cdots K_j \frac{1}{m_j} \cdots \frac{1}{m_1} = \prod_{l=1}^{j} \frac{K_l}{m_l}.$$

LEMA 3.

$$\frac{Q_{j-1}(0)}{Q_j(0)} = \frac{m_j}{K_j}, \quad j = \overline{2, n}.$$

Demonstraţie.

$$P_j(\lambda) = P_j\left(\frac{x^2 - \alpha x \mathrm{i}}{1 + \beta x \mathrm{i}}\right) = \frac{1}{(1+\beta x\,\mathrm{i})^j}\, Q_j(x).$$

Pentru $x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ și deci $P_j(0) = Q_j(0)$. Dar $P_j(0) = \det K_j$ și prin urmare

$$\frac{Q_{j-1}(0)}{Q_j(0)} = \frac{\det K_{j-1}}{\det K_j} = \frac{m_j}{K_j}.$$

Consecință.

$$\frac{\varphi_{j-1}(0)}{\varphi_j(0)} = \frac{m_j}{K_j}; \quad j = \overline{2, n}$$

Demonstrație.

$$\forall j = \overline{2, n} \quad \frac{m_j}{K_j} = \frac{Q_{j-1}(0)}{Q_j(0)} = \frac{\varphi_{j-1}(x) + ix\,\tilde{\psi}_{j-1}(x)}{\varphi_j(x) + ix\,\tilde{\psi}_j(x)}\Bigg|_{x=0} = \frac{\varphi_{j-1}(0)}{\varphi_j(0)}.$$

3. IDENTIFICARE UNICĂ FOLOSIND RĂSPUNSUL PRIMULUI NIVEL

În acest caz se consideră problema de identificare formulată mai sus, cînd $Z(t)$-mișcarea terenului, $W_n(t)$-răspunsul primului nivel, masele m_j și constantele α și β sînt cunoscute.

TEOREMĂ. *Dacă* $Z(t)$, $W_n(t)$, $m_j, j = \overline{1, n}$, $\alpha, \beta \neq 0$ *sînt date, atunci rigiditățile* K_j; $j = \overline{1, n}$ *se pot determina în mod unic.*

Demonstrație.

Se presupune că există două mulțimi k_j și k_j^* pentru care W_n și W_n^* sînt aceleași.

Înlocuind în (12) $a_j = \dfrac{K_j}{\sqrt{m_j m_{j+1}}}$, avem

$$W_j(x) = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \frac{K_n}{\sqrt{m_n}} \frac{K_{n-1}}{\sqrt{m_{n-1} m_n}} \cdots \frac{K_j}{\sqrt{m_j m_{j+1}}} \frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)} (1 + \beta x i)^{n-j} Z(x),$$

de unde

$$\frac{W_j(x)}{Z(x)} = \frac{K_n}{m_n} \frac{K_{n-1}}{m_{n-1}} \cdots \frac{K_j}{m_j} \frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)} (1 + \beta x i)^{n-j}, \quad j = \overline{1, n}. \tag{15}$$

Luînd în (15) $j = n$

$$\frac{W_n(x)}{Z(x)} = \frac{K_n}{m_n} \frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{K_n^*}{m_n} \frac{Q_{n-1}^*(x)}{Q_n^*(x)}. \tag{16}$$

Trecînd la limită pentru $x \to \infty$, se obține $K_n = K_n^*$.

Cu această egalitate se obține din (16) relația $\dfrac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)} = \dfrac{Q_{n-1}^*(x)}{Q_n^*(x)}$ în care nu există nedeterminarea zero supra zero conform lemei 1.

Deci $Q_{n-1}(x) = Q^*_{n-1}(x)$ şi $Q_n(x) = Q^*_n(x)$. Folosind inducţia completă inversă se presupune

$$K_i = K^*_i\,;\; Q_j(x) \equiv Q^*_j(x)\,;\quad Q_{j-1}(x) \equiv Q^*_{j-1}(x) \text{ pentru } h \leqslant i \leqslant n. \tag{17}$$

Se deduce o relaţie similară pentru $h - 1$. Folosind relaţia de recurenţă (11), rezultă

$$Q_h = R_h\, Q_{h-1} - a^2_{h-1}(1 + \beta x\mathrm{i})^2\, Q_{h-2}\,;$$

$$Q^*_h = R^*_h\, Q^*_{h-1} - Q^{*2}_{h-1}\,(1 + \beta x\mathrm{i})^2\, Q^*_{h-2}.$$

Scăzînd ultimele două relaţii şi utilizînd (17), se obţine

$$0 = (R_h - R^*_h)\, Q_{h-1} - a^2_{h-1}(1 + \beta\, x\,\mathrm{i})^2\, Q_{h-2} + a^{*2}_{h-1}(1 + \beta x\mathrm{i})^2\, Q^*_{h-2}.$$

Împărţind prin $(1+\beta x\mathrm{i})Q_{h-1}$ şi trecînd la limită pentru $x \to \infty$ avem $0 = b_h - b^*_h \Rightarrow K_{h-1} = K^*_{h-1}$. Aplicînd (17) pentru $j = 2 \Rightarrow K_1 = K^*_1$ şi, unicitatea este stabilită.

Mai departe se va prezenta algoritmul de calcul pentru determinarea valorilor K_j, $j = \overline{1, n}$ atunci cînd $Z(x)$, $W_n(x)$, m_j, α, $\beta \neq 0$ sînt cunoscute.

Pasul 1. Se determină K_n.

Folosind relaţia

$$\frac{W_n(x)}{Z(x)} = \frac{K_n}{m_n}\,\frac{Q_{n-1}(x)}{Q_n(x)}, \tag{18}$$

înmulţind cu x^2 şi trecînd la limită pentru $x \to \infty$, se obţine

$$K_n = -\,m_n \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 W_n(x)}{Z(x)}. \tag{19}$$

Pasul 2. Se determină K_h, $h = 1, \ldots, n - 1$.

Din (18) rezultă

$$\frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)} = \frac{K_n}{m_n}\,\frac{Z(x)}{W_n(x)}. \tag{19'}$$

Folosind (11) se obţine

$$\frac{Q_{h+1}(x)}{(1+\beta x\mathrm{i})Q_h(x)} = \frac{R_{h+1}(x)}{1+\beta x\mathrm{i}} - a^2_h\,\frac{Q_{h-1}(x)}{Q_h(x)}\,(1 + \beta x\mathrm{i}), \tag{20}$$

unde $R_{h+1}(x) = -\,x^2 + \mathrm{i}\,(\alpha + \beta b_{h+1})\,x + b_{h+1}$ şi (20) devine

$$\frac{Q_{h+1}(x)}{(1+\beta x\mathrm{i})Q_h(x)} + \frac{x^2}{1+\beta x\mathrm{i}} = \frac{b_{h+1} + \mathrm{i}(\alpha + \beta b_{h+1})\,x}{1 + \beta x\mathrm{i}} - a^2_h\,\frac{Q_{h-1}(x)}{Q_h(x)}\,(1 + \beta x\mathrm{i}). \tag{20'}$$

Trecînd la limită pentru $x \to \infty$ în (20'), rezultă

$$b_{h+1} = -\frac{\alpha}{\beta} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \beta x i} = \left(\frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)} + x^2\right). \tag{21}$$

Cum $b_{h+1} = \dfrac{K_h + K_{h+1}}{m_{h+1}}$

$$K_h = b_{h+1} m_{h+1} - K_{h+1},\ h = \overline{1, n-1} \tag{22}$$

În urma acestui proces iterativ se obțin mărimile $K_j,\ j = \overline{1, n}$.

Observații

1°) În practică se începe pasul 2 cu determinarea raportului $\dfrac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)}$ din relația (19') și se obțin b_n și K_{n-1} din (21) și (22).

2°) În cadrul acestui proces iterativ se folosește și următoarea relație obținută din (20):

$$\frac{Q_h(x)}{(1 + \beta x i)\, Q_{h-1}(x)} = a_h^2 (1 + \beta x i) \left[R_{h+1}(x) - \frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)}\right]^{-1}, \tag{23}$$

$$\text{unde } a_h^2 = \frac{K_h^2}{m_h m_{h+1}}.$$

3°) Pentru $\beta = 0$, repetînd raționamentul se găsește o relație asemănătoare cu (21) și anume

$$b_{h+1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)} + x^2 - \alpha x i\right). \tag{21'}$$

4. DETERMINAREA RĂSPUNSULUI UNUI ALT NIVEL

În această parte vom arăta că dacă se cunoaște răspunsul primului nivel $W_n(t)$ corespunzător intrării $Z(t)$ se poate determina răspunsul oricărui nivel al structurii. Fie deci cunoscute funcțiile $Z(t)$, $W_n(t)$, masele m_j, $j = \overline{1, n}$ și constantele α și β.

Utilizînd algoritmul expus în teorema de mai sus, se determină în mod unic constantele elastice $K_j,\ j = \overline{1, n}$.

Folosim acum relația (15). În această relație singura necunoscută este $W_j(x)$, deoarece polinoamele $Q_j(x)$ se pot calcula cu relațiile (11) dacă sînt cunoscute rigiditățile K_j, se obține deci relația

$$W_j(x) = \frac{K_n}{m_n} \cdots \frac{K_j}{m_j} \frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)} (1 + \beta x i)^{n-j} Z(x),\ j = \overline{1, n-1},$$

adică sînt cunoscute transformatele Laplace ale răspunsurilor celorlalte nivele. Aplicînd inversa transformatei Laplace se găsesc funcţiile $W_j(t)$, $\lambda = \overline{1, n-1}$ care reprezintă răspunsurile necunoscute ale nivelelor j ale structurii.

5. EXEMPLU ILUSTRATIV PRIVIND UNICITATEA IDENTIFICĂRII MATRICEI DE RIGIDITATE

Se consideră următoarele valori numerice pentru masele unei structuri în cadre cu trei etaje : $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = 2$. Coeficienţii din matricea de amortizare $\alpha = 2$, $\beta = -0{,}2$.

Mişcarea terenului sau intrarea sistemului este modelată prin ecuaţia :

$$z(t) = 2 \sin t \text{ cu transformata Laplace } Z(x) = \frac{2}{1 - x^2}.$$

Răspunsul primului nivel

$W_3(t) = \frac{1}{125}(195 \sin t + 69 \sin 2t - 111(\sin 3t)$, iar transformata Laplace a sa

$$W_3(x) = \frac{55{,}44 - 18\,x^2}{(1 - x^2)(4 - x^2)(9 - x^2)}.$$

Conform cu algoritmul de calcul prezentat se determină rigidităţile astfel :

$$K_3 = -m_3 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 W_3(x)}{Z(x)} = -m_3 \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(55{,}44 - 18\,x^2)}{(1 - x^2)(4 - x^2)(9 - x^2)} \frac{1 - x^2}{2} =$$

$$= 9\,m_3 = 18,$$

$h = 2$

$$b_3 = -\frac{\alpha}{\beta} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \beta x i}\left(\frac{Q_3(x)}{Q_2(x)} + x^2\right),$$

$$\frac{Q_3}{Q_2} + x^2 = \frac{K_3}{m_3}\frac{Z(x)}{W_3(x)} = 9\,\frac{2}{1 - x^2}\,\frac{(1 - x^2)(4 - x^2)(9 - x^2)}{55{,}44 - 18x^2} +$$

$$+ x^2 = \frac{36 - 9{,}92x^2}{3{,}08 - x^2}.$$

Se obţine $b_3 = 10 \Rightarrow K_2 = m_3 b_3 - K_3 = 20 - 18 = 2$.

$$a_2^2 = \frac{K_2^2}{m_2 m_3} = 2, \quad R_3(x) = -x^2 + 10.$$

$\boxed{h=1}$ $$b_2 = -\frac{\alpha}{\beta} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\beta x i}\left(\frac{Q_2(x)}{Q_1(x)} + x^2\right) = 60$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = a_2^2(1+\beta x i)^2\left(R_3 - \frac{Q_3}{Q_2}\right)^{-1} = a_2^2(1+\beta x i)^2\left(10 - x^2 - \frac{36-13x^2+x^4}{3{,}08 - x^2}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{(x^2 - 3{,}08)(1 - 0{,}4\, x i - 0{,}04\, x^2)}{2{,}6 + 0{,}04\, x^2}; \quad K_1 = b_2 m_2 - K_2 = 60 \cdot 1 - 2 = 58.$$

6. DETERMINAREA CONSTANTELOR α ȘI β DIN MATRICEA DE AMORTIZARE UTILIZIND RĂSPUNSURILE PRIMULUI ȘI ULTIMULUI NIVEL

În această parte se va considera problema cînd $Z(t)$-mișcarea terenului, $W_n(t)$-răspunsul primului nivel, $W_1(t)$-răspunsul ultimului nivel, masele m_j și rigiditățile K_j, $j = \overline{1, n}$ sînt cunoscute și se determină constantele α și β din matricea de amortizare.

Luînd $j = 1$ în relația (15) se obține:

$$\frac{W_1(x)}{Z(x)} = \frac{K_n}{m_n}\frac{K_{n-1}}{m_{n-1}}\cdots\frac{K_1}{m_1}\frac{1}{Q_n(x)}(1+\beta x i)^{n-1},$$

sau

$$\frac{W_1(x)}{Z(x)} = \det(K)\frac{1}{Q_n(x)}(1+\beta x i)^{n-1} = \det(K)\; x^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{x}+\beta i\right)^{n-1}}{Q_n(x)}.$$

Înmulțind ultima expresie cu x^{n+1} și trecînd la limită pentru $x \to \infty$, rezultă:

$$\det(K)(-1)^n(\beta i)^{n-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}W_1(x)}{Z(x)}, \tag{24}$$

de unde

$$\beta^{n-1} = \frac{1}{(-1)^n i^{n-1}\det(K)}\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+1}W_1(x)}{Z(x)}. \tag{25}$$

Pe de altă parte din (11) avem

$$\frac{Q_{h+1}(x)}{(1+\beta x i)\,Q_h(x)} + \frac{x^2}{1+\beta x i} = \frac{b_{h+1} + i(\alpha + \beta b_{h+1})x}{1+\beta x i} - \tag{26}$$

$$- a_h^2\frac{Q_{h-1}(x)}{Q_h(x)}(1+\beta x i).$$

Trecînd la limită în (25) pentru $x \to \infty$ se obţine :

$$b_{h+1} = -\frac{\alpha}{\beta} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\beta x i}\left(\frac{Q_{h+1}(x)}{Q_h(x)} + x^2\right). \tag{26'}$$

Făcînd $h = n-1$ în ultima egalitate, rezultă

$$b_n = -\frac{\alpha}{\beta} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\beta x i}\left(\frac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)} + x^2\right).$$

Din (15) avem $\dfrac{Q_n(x)}{Q_{n-1}(x)} = \dfrac{K_n}{m_n}\dfrac{Z(x)}{W_n(x)}$ şi deci

$$b_n = -\frac{\alpha}{\beta} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\beta x i}\left(\frac{K_n}{m_n}\frac{Z(x)}{W_n(x)} + x^2\right).$$

Cum $b_n = \dfrac{K_{n-1}+K_n}{m_n}$ găsim

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\beta x i}\left(\frac{K_n}{m_n}\frac{Z(x)}{W_n(x)} + x^2\right) - \frac{K_{n-1}+K_n}{m_n}. \tag{27}$$

Folosind relaţiile (25) şi (27) se obţine un sistem în necunoscutele α şi β. Rezolvarea acestuia nu comportă dificultăţi şi se obţin în final valorile constantelor α şi β şi dacă matricea de amortizare $C = \alpha M + \beta A$.

7. DETEMINAREA RĂSPUNSULUI UNUI ALT NIVEL ÎN SITUAŢIA IDENTIFICĂRII MATRICEI DE AMORTIZARE

Am văzut mai sus că dacă sînt cunoscute masele m_j, rigidităţile K_j, intrarea $Z(t)$ şi răspunsurile $W_n(t)$, $W_1(t)$ se poate determina matricea de amortizare. Cunoscînd acum α, β, K_j, m_j se pot calcula cu relaţia de recurenţă (11) polinoamele $Q_j(x)$, $j = \overline{1, n}$.

În relaţia (15) singura necunoscută este $W_j(x)$. Din ea se obţine

$$\frac{W_j(x)}{Z(x)} = \frac{K_n}{m_n}\frac{K_{n-1}}{m_{n-1}} \cdots\cdots \frac{K_j}{m_j}\frac{Q_{j-1}(x)}{Q_n(x)}(1+\beta x i)^{n-j},\ j = \overline{1, n}. \tag{28}$$

Făcînd în (20) pe rînd $j = \overline{2,\ n-1}$ se obţin transformatele Laplace ale răspunsurilor celorlalte nivele. Aplicînd inversa transformatei Laplace se găsesc funcţiile $W_j(t)$, $j = \overline{2,\ n-1}$ care reprezintă răspunsurile necunoscute ale nivelelor structurii.

8. EXEMPLU ILUSTRATIV PRIVIND DETERMINAREA COEFICIENȚILOR α ȘI β DIN MATRICEA DE AMORTIZARE

Se consideră cunoscute următoarele date pentru o structură în cadre cu trei nivele : masele $m_1 = 1$, $m_2 = 1$, $m = 2$; rigiditățile $K_1 = 58$, $K_2 = 2$, $K_3 = 18$; intrarea sau mișcarea terenului $Z(t) = 2 \sin t$ cu transformata sa Laplace $Z(x) = \dfrac{2}{1 - x^2}$; răspunsul primului nivel $W_3(t) = \dfrac{1}{125}(195 \sin t + 69 \sin 2t - 111 \sin 3t)$ cu transformata Laplace $W_3(x) = \dfrac{55{,}44 - 18\,x^2}{(1 - x^2)(4 - x^2)(9 - x^2)}$, răspunsul ultimului nivel (transformata Laplace)

$$W_1(x) = 2088 \frac{(1 - 0{,}2\,xi)^2}{(1 - x^2)(-x^6 - 19{,}6ix^5 + 89{,}36\,x^4 + 4{,}832ix^3 - 896{,}08\,x^2 + 1961{,}6ix + 1044)}.$$

Aplicînd (25), se obține :

$$\beta^2 = \frac{1}{(-1)^3 i^2 \dfrac{K_3 K_2 K_1}{m_3 m_2 m_1}} \times$$

$$\times \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 2088 \dfrac{(1 - 0{,}2\,xi)^2}{(1 - x^2)(-x^6 - 19{,}6ix^5 + 89{,}36x^4 + 4{,}832ix^3 - 896{,}08x^2 + 1961{,}6ix + 1044)}}{\dfrac{2}{1 - x^2}} =$$

$$= 0{,}04$$

Aplicînd (27), rezultă

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \beta xi} \left(9 \frac{2}{1 - x^2} \frac{(1 - x^2)(4 - x^2)(9 - x^2)}{55{,}44 - 18\,x^2} + x^2 \right) - 10 = -10.$$

Aplicînd (27) rezultă

$$\alpha = -10\,\beta,$$

$$\beta^2 = 0{,}04,$$

cu soluțiile $\alpha = -2$, $\beta = 0{,}2$ sau $\alpha = 2$, $\beta = -0{,}2$.

Primită la redacție la 30 septembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. F. E. UDWADIA, P. C. SHAH, *Identification of Building structural systems from records obtained during strong ground motion*, ASME Journ. for Eng. in Industry, **98**, *4*, 1347–1362 (1976).

2. P. Z. MARMARELIS, F. E. UDWADIAN, *onparametric Identification of Building Structural System* Part I and Part II, Bull. Seismological Soc., (1976) **66**, 121 — 171.
3. H. G. NATKE, *Identification of Vibrating Structures*, Seminarul „Identification in Vibrating Structures", oct. 1980, CISM, Udine, Italia.
4. G. LALLEMENT, *Identification Methods-Adjustement of mathematical Model by the Results of Vibration Tests*, Seminarul "Identification in Vibrating Structures", oct. 1980, CISM, Udine, Italia.
5. M. RADEȘ, *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Edit. Academiei R. S. România, 1979.
6. F. E. UDWADIA, *Controllability, Observability and Identification of Classical Linear Dynamic Systems*, SM Archives, **6**, *2*, 193—209 (1981).
7. F. E. UDWADIA, D. K. SHARMA, *Some Uniqueness Results Related to Building Structural Identification*, SIAM J. Appl. Math., **34**, *1*, 104—118 (1978).
8. F. E. UDWADIA, D. K. SHARMA, P. C. SHAH, *Uniqueness of Damping and Stiffness Distributions in the Identification of Soil and Structural Systems*, ASME J. Appl. Mechanics, **45**, *1*, 181—196 (1978).
9. G. H. MCVERRY, *Structural Identification in the Frequency Domain from Earthquake Records*, Earthquake Eng. Structural Dynamics, **8**, 161—180 (1980).
10. R. DATKO, *Application of the Finite Laplace Transform to Linear Control Problem*, SIAM J. Control Optimization. **18**, *1*, 1—21 (1980).
11. M. DI PAOLA, V. F. POTERAȘU, G. MUSCOLINO, *Structural Parameters Identification in the Frequency Domain for a White Noise Input*, Revue roumaine des sciences techniques, Mécanique Appliquée, 1981, in print.

ASUPRA SIGURANȚEI BARAJULUI RÎUȘOR

de R. PRIȘCU, D. STEMATIU, C. STERE

Institutul de construcții București

Pornind de la variabilitatea aleatoare a parametrilor fizico-mecanici care definesc rezistența la alunecare a barajelor de anrocamente cu nucleu de argilă, se definește probabilitatea de depășire a echilibrului limită din nucleu ca opusă conceptului clasic, de factură deterministă, a coeficientului de siguranță.

În cazul barajului Rîușor, se analizează influența variabilității coeziunilor și permeabilităților argilei din nucleu. Bazat pe date de teren și laborator se evaluează — printr-o metodologie de abordare nedeterministă — valorile cantitative ale probabilităților de cedare și se evidențiază influența variabilității parametrilor aleatori considerați.

Barajul Rîușor, care asigură retenția pentru amenajarea rîului Tîrgului din bazinul hidrografic Argeș, este un baraj de anrocamente cu nucleu de argilă (fig. 1). Prin caracteristicile sale constructive — înălțime de 114,00 m și volum de umplutură de 3,5 milioane m³ — barajul se situează printre lucrările reprezentative de acest gen din România.

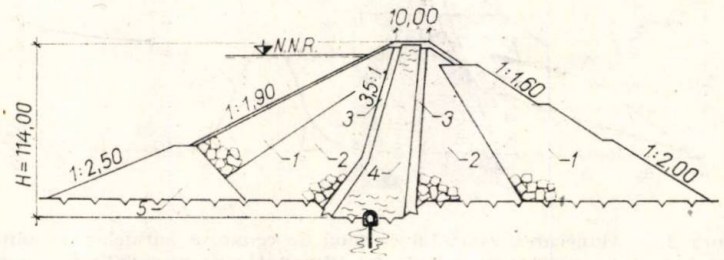


Figura 1. — Secțiunea transversală tip a barajului Rîușor: *1* — anrocamente tip I; *2* — anrocamente tip II; *3* — filtre; *4* — nucleu argilă; *5* — batardou amonte.

În diferite etape de studiu, barajul a beneficiat de verificări extinse referitoare la omogenitatea caracteristicilor materialelor [1], stabilitatea de alunecare [2], evoluția tasărilor, eforturilor și presiunilor neutrale în diverse faze de execuție și exploatare [3]. Studiile efectuate s-au bazat pe caracteristicile medii ale materialelor, în conformitate cu practica curentă de proiectare, evidențiind coeficienți de siguranță peste limitele minime admisibile. În realitate, cea mai mare parte a parametrilor de calcul (unghi de frecare interioară, coeziune, permeabilitate) prezintă variații aleatoare în jurul valorilor medii, ceea ce atrage după sine convenționalismul unor asemenea coeficienți de siguranță și deci o falsă interpretare a siguranței barajului.

În prezenta lucrare se propune o nouă abordare a siguranței lucrării, în raport cu cedarea prin alunecare, utilizînd principiile și metodele de analiză probabilistică.

ST. CERC. MEC. ÁPL., TOM 41, NR. 2, 1982, P. 283–291

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Unul dintre cele mai frecvente moduri de cedăre a barajelor din materiale locale este pierderea stabilității la alunecare. În metodologia clasică aprecierea stabilității de alunecare se face prin intermediul coeficienților de siguranță, definiți ca raport între forțele de rezistență care se opun alunecării și forțele active care tind să producă alunecarea. Conceptul presupune că toți parametrii care intervin în calcul au valori certe și fixe. Condiția ca alunecarea să nu se producă este dată de valorile supraunitare ale coeficientului de siguranță $F(F \geqslant 1)$.

În realitate, atît solicitările active exterioare (A) cît și capacitatea de rezistență a corpului barajului (R) sînt variabile aleatoare, ca urmare a variației în timp a nivelului apei din lac, a presiunilor neutrale create în nucleu, a dispersiei caracteristicilor geotehnice ale umpluturilor etc. Variabilitatea acestora se poate exprima prin funcțiile de distribuție $F_A(x)$ și

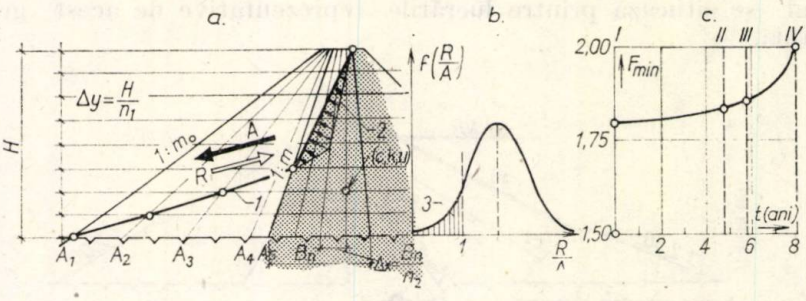


Figura 2. — Alunecarea taluzului ca mod de cedare a barajelor de anrocamente: *a* — discretizare de calcul; *b* — densitatea de probabilitate a raportului $F = R/A$; *c* — variația coeficientului de siguranță minim la alunecare în timp; *1* — suprafața poligonală potențială de alunecare; *2* — presiuni neutrale în nucleu, *3* — domeniu asociat cedării probabile prin alunecare; I... ...IV — ritmuri de execuție a barajului Rîușor.

$F_R(x)$, respectiv prin funcțiile de densitate de probabilitate $f_A(x)$ și $f_R(x)$, unde x este parametrul de definire a mecanismului de cedare. Valorile medii corespunzătoare sînt A_0 și R_0, cu $A_0 < R_0$. Condiția de stabilitate la alunecare pe o suprafață potențială oarecare (fig. 2 *a*) este dată de condiția $A < R$, respectiv $F = R/A$ (fig. 2 *b*). Valoarea numerică a probabilității de cedare (a situațiilor în care valorile maxime întîmplătoare ale lui A sînt mai mari decît valorile minime întîmplătoare ale lui R) este dată de relațiile [4]:

$$P_c = P(A > R) = \int_0^\infty F_A(x) f_R(x)\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

sau

$$P_c = P(R/A > 1) = \int_0^1 f_{R/A}(x)\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

unde $f_{R/A} = f(F)$ este densitatea de probabilitate a rapoartelor dintre acțiuni și rezistențe. Valoarea lui P_c este dată de suprafața hașurată din figura 2*b*.

Dacă distribuțiile mărimilor A și R au dispersii mici, cu valori grupate în jurul valorilor medii (pentru care $A_0 < R_0$), probabilitățile de cedare au valori reduse și coeficienții de siguranță de tipul $F = R_0/A_0$ sînt suficienți pentru aprecierea siguranței. Dacă dispersiile caracteristice distribuțiilor lui A și R sînt mari, probabilitățile de cedare sînt și ele mari, iar coeficienții de siguranță își pierd semnificația fizică.

În cazul barajelor de anrocamente neomogene, distribuția lui R este dată de distribuțiile unghiurilor de frecare internă φ, a coeziunilor c și a presiunilor neutrale π (indirect exprimate prin permeabilitățile k) pentru materialele prin care trece suprafața de alunecare. Spre deosebire de barajele de beton, la care condițiile de variație a calităților fizico-mecanice pot fi controlate și corectate în limite raționale, în vederea obținerii unor grade mari de omogenitate, la barajele de anrocamente variabilitatea parametrilor de rezistență este natural legată de condițiile locale ale carierei.

2. MODELUL DE ANALIZĂ A SIGURANȚEI

Se admite ca mecanism de cedare alunecarea pe suprafețe poligonale oarecari care străbat prismul de anrocamente și nucleul de argilă în zona parametrului amonte. Punctul de amorsare a suprafețelor este dat de extremitatea aval a nucleului la nivelul coronamentului, iar conturul acestora este sprijinit pe o rețea de discretizare ca în figura 2 *a* [2]. Încărcările exterioare sînt date în general de presiunea apei din lac, de greutatea proprie a umpluturilor și de presiunile apei din pori dezvoltate în nucleu. Rezistența la alunecare este caracterizată de unghiurile de frecare interioară și de coeziuni.

Obiectivul studiului de față îl constituie analiza influenței variabilității caracteristicilor nucleului de argilă asupra siguranței în exploatare a barajului. Se evaluează riscul de coborîre a rapoartelor $F = R/A$ sub valoarea standard admisă $[P_T(F < F_{st})]$, exprimat ca probabilitate de nedepășire. Calculele s-au făcut în ipoteza de golire rapidă a lacului, situație în care cîmpul de presiuni neutrale este încă nestabilizat. Nu s-a luat în considerare variabilitatea unghiului de frecare internă a anrocamentelor, studiul fiind exclusiv consacrat efectelor aduse de neomogenitatea argilei din nucleu. Dintre parametrii geotehnici ai argilei s-au menținut în studiu numai coeziunea și permeabilitatea, deoarece influența unghiului de frecare internă a argilei asupra siguranței a rezultat din calcule ca fiind nesemnificativă în raport cu parametrii selectați.

Matematic, riscul de nedepășire a raportului R/A standard — corespunzător situației de echilibru limită din nucleul de argilă — se poate exprima sub forma:

$$P_T(F < F_{st}) = \int_0^{F_{st}} f_{R/A}(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

În formularea (3), P_T nu are semnificația unei probabilități de cedare, deoarece stabilitatea la alunecare este exprimabilă prin condiții de echilibru limită atît în prismul de anrocamente amonte, cît și în nucleul de argilă. Analiza exclusivă a influenței variabilității parametrilor caracteristici argilei presupune numai examinarea situațiilor în care este depășit echilibrul din zona nucleului. Acestui echilibru limită îi corespund rapoarte R/A supraunitare, pentru o anumită suprafață de alunecare potențială, realizate de efectele stabilizatoare din prism. În aceste condiții, P_T poate fi interpretat ca o probabilitate de depășire a echilibrului limită din nucleu.

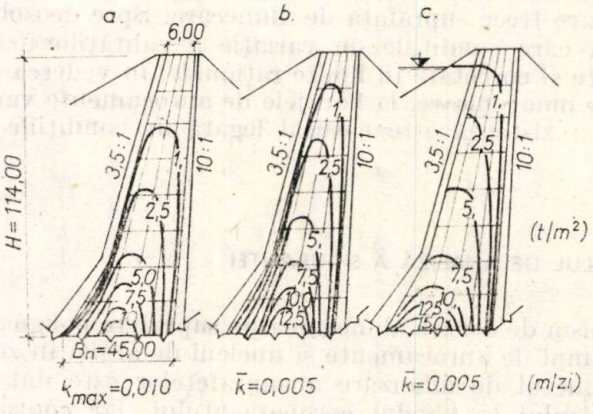


Figura 3. — Linii de egală valoare a presiunii neutrale în nucleul de argilă, corespunzătoare diferitelor situații: *a* — golire bruscă, permeabilitatea maximă; *b* — golire bruscă, permeabilitate medie; *c* — lac plin, permeabilitate medie.

Pentru problema analizată, exprimarea analitică și apoi integrarea curbei de densitate de probabilitate a raportului R/A nu este posibilă [5], [6]. Evaluarea probabilităților P_T se face pe baza unui algoritm alcătuit din următoarele etape:

— Discretizarea variabilității coeziunilor (c) și permeabilităților (k) caracteristice nucleului de argilă. Intervalele de variație ale acestor mărimi (0...30 t/m² pentru coeziuni și $10^{-8}...10^{-2}$ m/zi pentru permeabilități, în cazul barajului Rîușor) au fost împărțite în n intervale de calcul, cu valori medii pe interval $C_{m,i}$ și $K_{m,i}$, cărora, din curbele de densitate de probabilitate ale lui c și k, li s-au asociat probabilitățile de apariție a acestora $p_{c,i}$ și $p_{k,i}$.

— Determinarea cîmpurilor de presiuni neutrale (π) asociate valorilor de permeabilitate $K_{m,i}$. Evaluarea presiunilor neutrale se poate face pe baza unor modele matematice ale barajelor de anrocamente cu nucleu de argilă [7], [8]. Modelul folosit în studiu a permis calculul cuplat al deplasărilor, eforturilor și presiunilor neutrale, considerînd comportarea vîsco-elasto-plastică a anrocamentelor și procesul de consolidare din nucleu conform relațiilor Biot [8]. Cîmpurile de presiuni neutrale astfel determinat li se asociază aceeași probabilitate de apariție $p_{k,i}$ corespunzătoare permeabilităților de calcul $K_{m,i}$. Pentru exemplificare, în figura 3 se prezintă astfel de cîmpuri rezultate din calcul pentru valoarea extremă $K = 0{,}01$ m/zi, respectiv pentru valoarea medie $\bar{K} = 0{,}005$ m/zi, în cazul golirilor bruște (fig. 3 *a*, *b*) și lacului plin (fig. 3 *c*).

— Determinarea rapoartelor minime de tipul $F_{i,j} = R/A$ pentru grupările $\{((C_{m,i}, K_{m,j})\ i = 1, n)\ j = 1, n\}$ care parcurg succesiv domeniile de valori pentru coeziuni și permeabilități. Pentru o valoare $C_{m,r}$ fixă, corespunzătoare lui $i = r$, și mulțimea de valori $(K_{m,j}, j = 1, n)$, rezultă o mulțime de rapoarte $(F_{r,j},\ j = 1, n)$ pentru care probabilitățile de apariție sînt $((p_{F,rj} = p_{c,r} \cdot p_{k,j})\ j = 1, n)$. Parcurgînd totalitatea valorilor coeziunilor $(C_{m,i},\ i = 1,\ n)$ rezultă familiile de curbe $p_{F,j}$ din figura 4, notate pentru comoditate cu $p_T(F)$. Valorile rapoartelor minime $F_{i,j}$ s-au obținut prin selecționarea suprafețelor de alunecare potențială ce străbat semnificativ nucleul de argilă și reținerea valorii minime. Rapoartele R/A, care au în calculul determinist semnificația unor coeficienți de siguranță, s-au determinat pe baza metodei Bishop de analiză a stabilității taluzurilor, aplicată unor suprafețe de alunecare de formă poli-

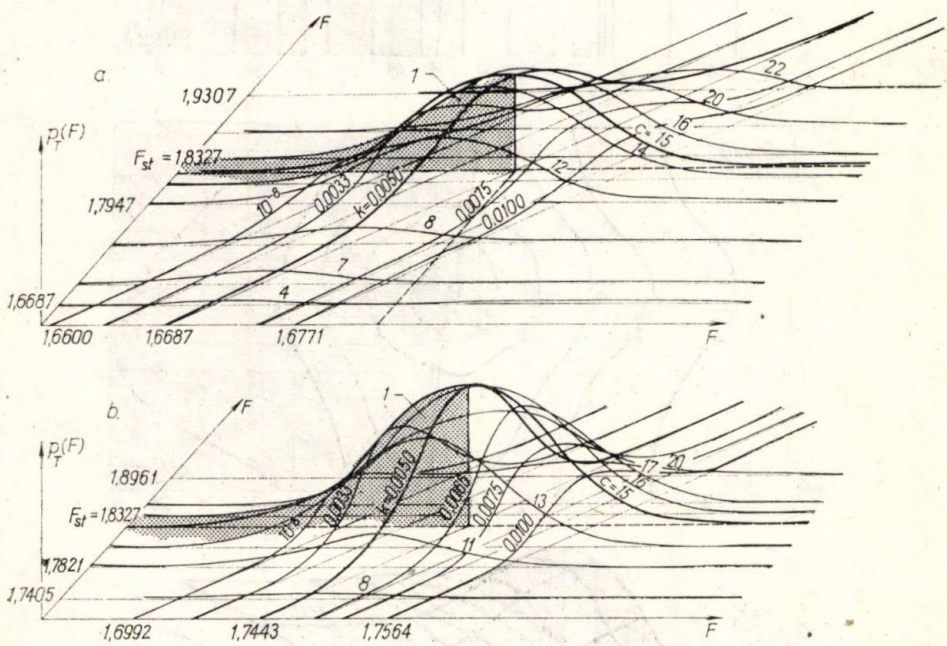


Figura 4. — Probabilitate de apariție a rapoartelor $F = R/A$ minime : a — coeficientul de variație a valorilor coeziunii, $C_v = 0{,}215$; b — idem, $C_v = 0{,}150$; 1 — secțiune corespunzătoare raportului $F = R/A$ standard.

gonală (fig. 2 *a*). Suprafețele sînt generate automat, printr-un algoritm de calcul [2], iar în evaluarea rapoartelor R/A sînt introduse explicit presiunile neutrale ca solicitare externă la baza fișiei analizate (fig. 2 *a*).

— Evaluarea probabilităților de depășire a echilibrului limită din nucleu $P_T(F < F_{st})$ prin integrarea numerică pe intervalul $(0,\ F_{st})$ a valorilor $p_T(F)$ în planul $\{c,\ k\}$. Partea complementară a volumului

echivalent acestei integrale este reprezentată în figura 5. Formal, volumul din figura 5 reprezintă probabilitatea de depășire a lui F_{st}, respectiv probabilitatea de menținere a echilibrului în zona nucleului $P_T(F > F_{st})$.

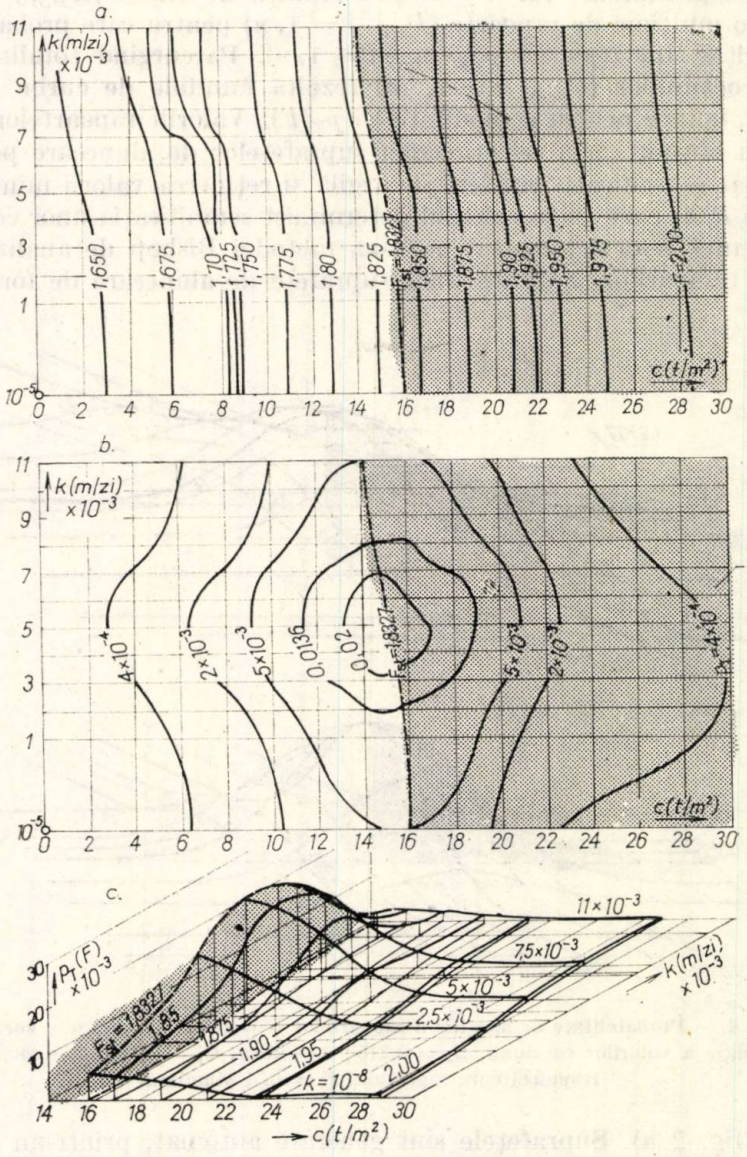


Figura 5. — Evaluarea probabilității de depășire a raportului $F = R/A$ standard: *a* — izolinii ale rapoartelor $F = R/A$ minime; *b* — izolinii ale probabilităților de apariție ale rapoartelor $F = R/A$ minime; *c* — probabilitatea de apariție a unor rapoarte $F = R/A$ mai mari decît raportul standard; *1* — domeniu al valorilor de coeziune și probabilitate cu rapoarte $F = R/A$ la alunecare superioare lui F *standard*.

3. DATE DE CALCUL

Valorile de calcul pentru analiza siguranței barajului Rîușor s-au bazat pe studiile și determinările efectuate de serviciul de cercetări experimentale al ISPH [1]. Parametri care au intervenit în analiza siguranței sînt prezentați în tabelul 1. Pentru coeziunea și permeabilitatea nucleului de argilă, valorile listate sînt cele medii. Variabilitatea acestora — descrisă de un șir de circa 12 valori determinate pe probe recoltate din cariera de argilă — a putut fi asimilată prin distribuții de tip Gauss. Curbele

Tabelul 1

Materialul	Greutate volumetrică (t/m³)	Frecare internă Ø (°)	Coeziune c (t/m²)	Permeabilitate k (m/zi)
Anrocamente	2,2	37°	0	0
Filtre	2,0	35°	0	0
Nucleu	1,95	10°	15	0,005

de densitate de probabilitate pentru coeziuni și permeabilități sînt prezentate în figura 6. În cazul coeziunilor, a rezultat o abatere medie pătratică de $\sigma = 0{,}323$ și un coeficient de variație de $C_v = 0{,}215$. În cazul permeabilităților, abaterea medie pătratică a fost de $\sigma = 4{,}2$ și coeficientul de variație $C_v = 0{,}21$.

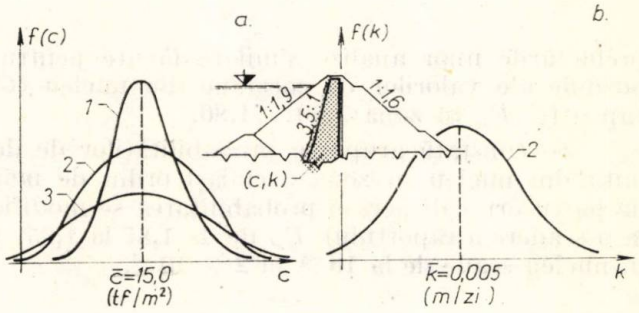


Figura 6. — Funcții de densitate de probabilitate ale mărimilor: *a* — coeziune; *b* — permeabilitate; *1*, *2*, *3* — coeficienții de variație a valorilor de coeziune $C_v = 0{,}15$, $C_v = 0{,}215$ și $C_v = 0{,}4$.

În afara acestor date rezultate din determinări, s-au mai analizat probabilitățile de depășire a echilibrului limită din nucleu și pentru alte două variabilități ale coeziunilor și anume $C_v = 0{,}15$ și $C_v = 0{,}4$.

4. REZULTATE PRIVIND SIGURANȚA

Aplicînd metodologia prezentată la punctul 2, pentru barajul Rîușor au rezultat suprafețele de densitate de probabilitate a situațiilor de depășire a echilibrului limită din nucleu din figura 4. Prelucrarea aces-

tora, de tipul celei din figura 5, a permis integrarea numerică pentru determinarea probabilităților de cedare în nucleu. Pentru datele de teren prezentate anterior și un raport $F_{st} = R/A = 1{,}8327$ a rezultat o probabilitate de cedare în nucleu de 2×10^{-6}, mult inferioară probabilităților de cedare totală obținute în studii similare [9] [10]. Acest rezultat era de așteptat, avînd în vedere că principalul factor de risc, dat de variabilitatea unghiurilor de frecare internă ale anrocamentelor, a fost neglijat. De altfel, scopul propus al studiului a fost evidențierea ponderii aduse de variabilitatea caracteristicilor nucleului în stabilitate. Pentru a extinde gama considerațiilor asupra acestui aspect, în figura 7 sînt prezentate

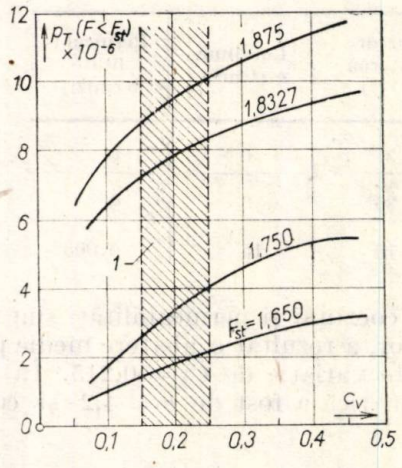


Figura 7. — Dependența probabilităților de nedepășire a raportului $F = R/A$ standard de coeficientul de variație al coeziunilor din nucleul de argilă al barajului Rîușor: *1* — domeniul valorilor evidențiate de analizele de laborator.

prelucrările unor analize similare făcute pentru diferite alte dispersii posibile ale valorilor de coeziune din nucleu ($C = 0{,}1 \ldots 0{,}4$) și pentru rapoarte F_{st} în zona $1{,}60 \ldots 1{,}80$.

Se constată gruparea probabilităților de depășire a echilibrului limită din nucleu în zona aceluiași ordin de mărime. Pentru o creștere de patru ori a dispersiei probabilitatea se modifică de numai 1,5 ori, iar la o scădere a raportului F_{st} de la 1,87 la 1,65, probabilitatea de cedare în nucleu scade de la 10^{-5} la 2×10^{-6}.

5. CONCLUZII

● Aplicarea conceptelor probabilistice la analiza siguranței în exploatare a barajelor de anrocamente cu nucleu de argilă permite evidențierea factorilor de risc asociați variabilității caracteristicilor nucleului de argilă.

● Evaluarea probabilităților de depășire a echilibrului limită din nucleu nu se poate aborda prin formulări analitice explicite. În consecință ea a necesitat elaborarea unei metodologii și a unui algoritm de exprimare a densităților de probabilitate corespunzătoare situa-

țiilor limită din nucleu în funcție de variabilitatea factorilor primari implicați în stabilitate.

● Probabilitățile de depășire a echilibrului limită din nucleul barajului Rîușor au rezultat în gama $2 \times 10^{-6} \ldots 10^{-5}$. evidențiind ponderea relativ redusă a neomogenității caracteristicilor nucleului în siguranța totală a lucrării.

Primită la redacție la 28 octombrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. * * *, *Acumularea Rîușor pe riul Tîrgului. Studii speciale de laborator privind calitatea materialelor locale de construcții pentru nucleul de argilă și prismele de anrocamente din corpul barajului*, Referat ISPH, nr. 2157, București, 1978.
2. R. PRIȘCU, D. STEMATIU, C. STERE, *Studiul stabilității la alunecare pentru barajul Rîușor*, Contract ICB—ISPH, nr. 95/1979, București, 1980.
3. R. PRIȘCU, D. STEMATIU, *Simularea execuției și exploatării pentru barajul Rîușor*, Hidrotehnica, *2* (1981).
4. F. BORGES, M. CASTANHETA, *Siguranța structurilor*, Edit. tehnică, București, 1973.
5. M. IOSIFESCU, G. MIHOC, G. THEODORESCU, *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Edit. tehnică, București, 1970.
6. ȘT. IONESCU, D. FLOREA, *Siguranța la alunecare cilindrică a barajelor neomogene din materiale locale*, Hidrotehnica, *4* (1980).
7. R. PRIȘCU, A. POPOVICI, L. ILIE, C. STERE, *The influence of consolidation phenomenon upon stresses in embankment dams*, Proc. of the Intern. Symposium on Soils und er cyclic and transient loading, Swansea, 1980.
8. R. PRIȘCU, D. STEMATIU, L. ILIE, *A general mathematical model for clay core rockfill dams*, Proc. of the Intern. Symposium on Soils under cyclic and transient loading, Swansea, 1980.
9. R. PRIȘCU, D. STEMATIU, *Siguranță și risc în domeniul marilor baraje*, Hidrotehnica, *5* (1978).
10. R. PRIȘCU, ȘT. IONESCU, D. STEMATIU, *Safety analysis for two large rockfill dams în Romania*, Proc. of the XIV-th Intern. Congr. on Large Dams, Rio de Janeiro, 1982, Q. 52.

INFLUENȚA PROBLEMELOR DE MONTAJ LA PROIECTAREA STRUCTURILOR RETICULATE PLANARE

de NGUYEN BA PHUONG, MIRCEA V. SOARE

Institutul de construcții București

Se studiază influența montajului prin ripare a structurilor reticulate planare asupra stării de eforturi și de deformații. Pentru conturul dreptunghiular, structura este considerată ca fiind rezemată simplu pe trei laturi și avînd-o pe cea de a patra liberă. Comparația este făcută cu stadiul final de exploatare, cînd structura este rezemată pe toate cele patru laturi.

1. INTRODUCERE

Structura de rezistență a unei construcții trebuie să fie calculată și dimensionată astfel încît să fie satisfăcute toate condițiile de rezistență, atît în stadiul de exploatare, cît și în stadiile intermediare, de execuție și de montaj. De regulă schema de încărcare cea mai defavorabilă se realizează în stadiul final (de exploatare), cînd pot apărea combinațiile de încărcări cele mai defavorabile, practic realizabile.

În cazul structurilor moderne la care, cu folosirea prefabricării și uzinării, sînt posibile mai multe tehnologii de montaj, trebuie examinat cu grijă dacă nu cumva, în situații intermediare, pot apărea cazuri cînd, local, structura este subdimensionată. Vom cita, ca exemplu, cazul de care ne ocupăm în prezentul studiu, al unei structuri spațiale reticulate de tip planar care, în stadiul de exploatare, este rezemată pe toate cele patru laturi ale conturului dreptunghiular.

Dacă, pentru montaj, se folosește metoda prin ripare, în stadii intermediare, structura, de dimensiuni mai reduse, este rezemată doar pe trei laturi, cea de a patra fiind liberă. Modul de lucru static se modifică substanțial și, deși încărcările sînt mai reduse decît în stadiul de exploatare, este posibil ca unele bare să fie mai încărcate, în stadiul intermediar de montaj, decît în stadiul final.

Această problemă, nerezolvată pe cale teoretică cu prilejul executării unei asemenea structuri, a fost investigată pe cale experimentală pe un model la scară 1/15,5 [7]. Întrucît încercarea pe model a indicat posibilitatea apariției unor forțe de compresiune puternice în unele bare de la marginea liberă, s-a considerat indicat a se micșora deschiderea liberă prin creierea unei linii de rezemare intermediare (mediane), în sensul de ripare. Schema de montaj pentru o situație intermediară este redată în figura 1.

Ulterior, cu prilejul montării, tot prin ripare, a unei structuri reticulate planare de dimensiuni mai mari (45 × 45 m), s-a renunțat la introducerea reazemului intermediar [1].

Influența geometriei structurii planare a fost studiată pe cazurile utilizate pînă în prezent la noi în țară și anume structura planar pătrată

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 2, 1982, P. 293–316

simplă și structura planar pătrată diagonală. Pentru prima a fost posibilă abordarea analitică, utilizînd metoda mediului continuu echivalent. Pentru cazul al doilea problema a fost rezolvată prin metoda generală a deplasărilor, utilizînd un program de calcul.

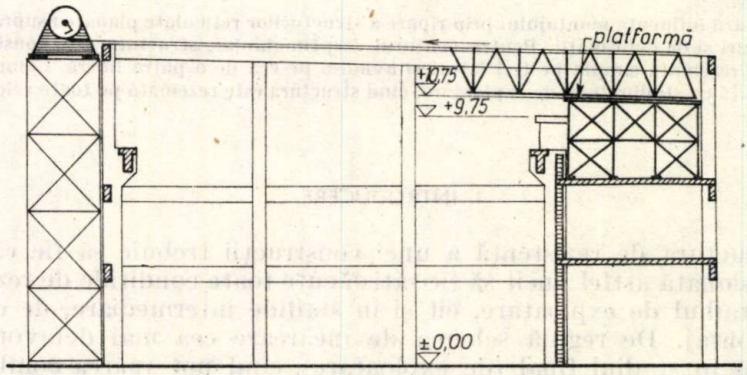


Fig. 1. — Schema de montaj.

Deoarece, intuitiv, o structură planară este asimilată cu o dală izotropă, ne-am preocupat și de acest caz stabilind, în baza soluțiilor cunoscute în literatură, variația săgeților și a momentelor încovoietoare maxime, în cazul unei plăci dreptunghiulare cu condiții de rezemare asemănătoare cu acelea ale structurii planare. Studiul se încheie cu aplicații numerice și interpretarea rezultatelor.

2. DALA IZOTROPĂ

Vom începe prin a studia influența raportului laturilor la o placă dreptunghiulară omogenă și izotropă, simplu rezemată pe trei laturi și avînd cea de a patra latură liberă.

Plecînd de la ecuația cu derivate parțiale a săgeților

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K}, \tag{1}$$

soluția poate fi obținută cu ajutorul seriilor simple trigonometrice. Rezultatele au fost date tabelar de Fr. Czerny[2], exprimînd săgețile și momentele încovoietoare prin intermediul unor relații de forma

$$w_{max} = (\text{coeficient}) \times \frac{pb^4}{Ed^3}, \quad m_{x,max} = \frac{pb^2}{(\text{coeficient})},$$

în care b reprezintă (cu notațiile noastre) lungimea laturilor adiacente laturii libere, iar d este grosimea plăcii.

Raportînd cele două mărimi la latura a care păstrează o valoare constantă, am exprimat pe w_{max} și $m_{x,\,max}$ sub forma

$$w_{max} = c_1 \frac{pa^4}{1000\,K}, \qquad m_{x,max} = c_2 \frac{pa^2}{100}, \tag{2}$$

în care coeficienții c_1 și c_2 sînt funcție de raportul $b/a \in (0{,}3\,;\ 1{,}5)$.

Variația celor doi coeficienți, în funcție de parametrul b/a, este redată în figura 2. Din examinarea graficelor lui c_1 și c_2 rezultă că

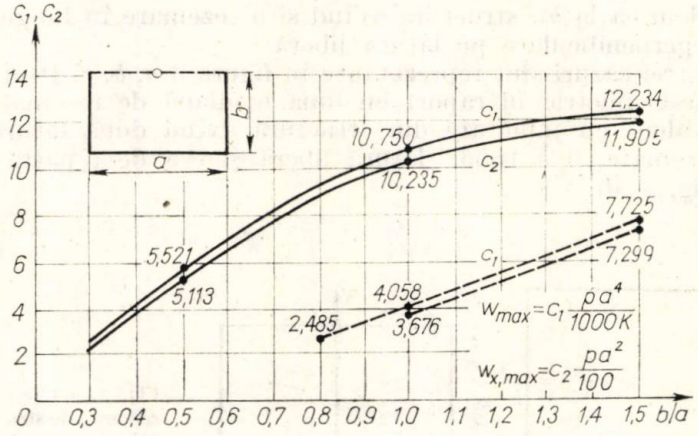


Fig. 2. — Variația săgeții maxime și a momentului încovoietor maxim la mijlocul laturii libere a unei plăci dreptunghiulare încărcate uniform.

săgețile și momentele încovoietoare maxime cresc odată cu raportul b/a. Valorile lor sînt însă limitate superior, acestea corespunzînd plăcii de lungime semiinfinită.

În aceeași figură au fost reprezentate variațiile lui c_1 și c_2 în cazul plăcii dreptunghiulare simplu rezemate pe toate cele patru laturi; ele determină, cu aceleași formule (2), valorile săgeților și momentelor maxime la centrul plăcii.

Din compararea celor două familii de curbe rezultă că placa lucrează mai defavorabil în cazul cînd o margine este liberă. Evident că va trebui să avem în vedere și încărcările corespunzătoare celor două situații.

3. STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ SIMPLĂ

Comportarea unei structuri planar pătrate simple pe contur dreptunghiular a fost studiată plecînd de la ecuația săgeților

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{2p}{k\,h^2} \tag{3}$$

în ipoteza asimilării structurii discrete cu un mediu continuu echivalent.

În ecuația (3), k reprezintă rigiditatea axială a barelor din cele două fețe (presupuse identice), iar h este înălțimea structurii planare.

Termenul $K = kh^2/2$ joacă rolul rigidității la încovoiere a structurii planare.

Soluția ecuației cu derivate parțiale (3) a fost obținută cu ajutorul seriilor simple de funcții fundamentale [6], [9].

Au fost studiate următoarele trei cazuri:

a) structura simplu rezemată,

b) structura simplu rezemată pe trei laturi și având a patra latură liberă,

c) idem ca la *b*), structura având și o rezemare în lungul unei linii mediane, perpendiculare pe latura liberă.

Cele trei cazuri sînt reprezentate în figura 3 *a*, *b*, *c*. Pentru o încărcare dispusă simetric în raport cu linia mediană de rezemare, cazul *c*) este echivalent cu jumătate din structură având două laturi adiacente simplu rezemate, o a treia latură liberă și cea de-a patra încastrată perfect (fig. 3 *d*).

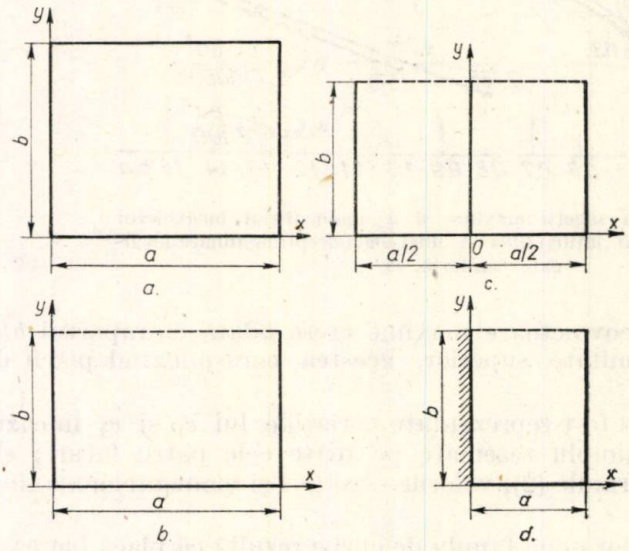


Fig. 3. — Condiții de rezemare ale structurii planar pătrate simple pe contur dreptunghiular: *a*) patru laturi simple rezemate; *b*) trei laturi simplu rezemate și a patra liberă; *c*) idem ca la *b*) cu o rezemare mediană intermediară; *d*) două laturi adiacente simplu rezemate, a treia liberă și a patra încastrată perfect.

3.1. STRUCTURA SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

Rezemarea acestei structuri corespunde cazului final, de exploatare. Soluția a fost obținută cu ajutorul seriilor duble trigonometrice [6]. În cele ce urmează ne mărginim să indicăm soluția generală cu ajutorul seriilor simple trigonometrice, care are avantajul unei mai rapide convergențe.

Pentru o încărcare uniform distribuită pe toată suprafața $p =$ $=$ const., soluția particulară a ecuației (3) se scrie

— sub formă finită :

$$w_p = \frac{pa^4}{12\,kh^2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{x}{a}\right], \tag{4 a}$$

— sub formă de serie trigonometrică cu coeficienţi constanţi :

$$w_p = \frac{8\,pa^4}{\pi^5\,kh^2}\sum_m \frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 3, 5, \ldots). \tag{4 b}$$

Soluţia (4b) sub formă de serie este necesară pentru determinarea constantelor de integrare din soluţia ecuaţiei omogene ; soluţia totală se scrie

$$w = \sum_m (W_{mp} + C_{1m}\mathrm{ch}\,\xi_m\cos\xi_m + C_{2m}\mathrm{sh}\,\xi_m\sin\xi_m + C_{3m}\mathrm{ch}\,\xi_m\sin\xi_m + C_{4m}\mathrm{sh}\,\xi_m\cos\xi_m)\sin\frac{m\pi x}{a}, \tag{5}$$

în care

$$W_{mp} = \frac{8pa^4}{\pi^5\,kh^2}\frac{1}{m^5}, \tag{6a}$$

$$\xi_m = \frac{m\pi y}{\sqrt{2}\,a} \quad (m = 1, 3, 5, \ldots). \tag{6b}$$

Presupunînd cunoscute săgeţile w, eforturile în barele din cele două feţe rezultă din relaţiile [6] :

— în faţa superioară, în sensul axei x :

$$S = +\frac{1}{2}\,khl\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

— în faţa inferioară, în sensul axei x :

$$T = -\frac{1}{2}\,khl\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

— în faţa superioară, în sensul axei y : (7)

$$S' = +\frac{1}{2}\,khl\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

— în fața inferioară, în sensul axei y :

$$T' = -\frac{1}{2} khl \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Pentru exprimarea condițiilor la limită se calculează și derivata secundă în raport cu y :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} = \sum_m \frac{m^2\pi^2}{a^2} (C_{2m} \operatorname{ch} \xi_m \cos \xi_m - C_{1m} \operatorname{sh} \xi_m \sin \xi_m -$$

$$- C_{4m} \operatorname{ch} \xi_m \sin \xi_m + C_{3m} \operatorname{sh} \xi_m \cos \xi_m) \sin \frac{m\pi x}{a}. \tag{8}$$

Pe laturile $x = 0$ și $x = a$, condițiile la limită sînt satisfăcute prin structura soluției $\left(\text{care cuprinde în factor pe } \sin \frac{m\pi x}{a}\right)$.

Pe laturile $y = 0$ și $y = a$, condițiile la limită sînt :

— pentru $y = 0 \to w = 0$ și $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$,

— pentru $y = b \to w = 0$ și $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

La scrierea efectivă a acestor condiții, se ține seama că $W_{mp} =$ = const. ; de asemenea, se vor considera noile constante de integrare $\bar{C}_i$ adimensionale :

$$C_i = \frac{8\, pa^4}{\pi^5 kh^2 m^5} \bar{C}_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{9}$$

Cele patru condiții se scriu

$$1 + \bar{C}_{1m} = 0,$$

$$0 + \bar{C}_{2m} = 0,$$

$$1 + \bar{C}_{1m} \operatorname{ch} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} + \bar{C}_{2m} \operatorname{sh} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} + \bar{C}_{3m} \operatorname{ch} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} +$$

$$+ \bar{C}_{4m} \operatorname{sh} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} = 0,$$

$$0 - \bar{C}_{1m} \operatorname{sh} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} + \bar{C}_{2m} \operatorname{ch} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} + \bar{C}_{3m} \operatorname{sh} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} -$$

$$- \bar{C}_{4m} \operatorname{ch} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} = 0,$$

unde ξ_{mb} reprezintă valoarea lui ξ_{mb} pentru $y = b$, adică

$$\xi_{mb} = \frac{m\pi\, b}{\sqrt{2}\ a}. \tag{10}$$

Rădăcinile sistemului precedent sînt :

$$\bar{C}_{1m} = -1\,; \quad \bar{C}_{2m} = 0,$$

$$\bar{C}_{3m} = \frac{\sin \xi_{mb} \cos \xi_{mb}}{\operatorname{ch}^2 \xi_{mb} - \cos^2 \xi_{mb}}, \tag{11}$$

$$\bar{C}_{4m} = \frac{\operatorname{sh} \xi_{mb} \operatorname{ch} \xi_{mb}}{\operatorname{ch}^2 \xi_{mb} - \cos^2 \xi_{mb}}.$$

Săgeata maximă se produce la mijlocul structurii ($x = a/2$, $y = b/2$) și, de asemenea, efortul maxim : cele două mărimi au expresiile*)

$$w_{max} = \frac{pa^4}{kh^2}\left[\frac{5}{192} + \frac{8}{\pi^5}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\left(-\operatorname{ch}\frac{\xi_{mb}}{2}\cos\frac{\xi_{mb}}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \bar{C}_{3m} \operatorname{ch}\frac{\xi_{mb}}{2}\sin\frac{\xi_{mb}}{2} + \bar{C}_{4m} \operatorname{sh}\frac{\xi_{mb}}{2}\cos\frac{\xi_{mb}}{2}\right)\right],$$

$$S'_{max} = -\frac{4pa^2 l}{\pi^3 h}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3}\left(-\operatorname{ch}\frac{\xi_{mb}}{2}\cos\frac{\xi_{mb}}{2} + C_{3m}\operatorname{ch}\frac{\xi_{mb}}{2}\sin\frac{\xi_{mb}}{2} + \right.$$

$$\left. + \bar{C}_{4m}\operatorname{sh}\frac{\xi_{mb}}{2}\cos\frac{\xi_{mb}}{2}\right), \tag{12}$$

$$S'_{max} = -\frac{4pa^2 l}{\pi^3 h}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3}\left(\operatorname{sh}\frac{\xi_{mb}}{2}\sin\frac{\xi_{mb}}{2} + \bar{C}_{3m}\operatorname{sh}\frac{\xi_{mb}}{2}\cos\frac{\xi_{mb}}{2} - \right.$$

$$\left. - \bar{C}_{4m}\operatorname{ch}\frac{\xi_{mb}}{2}\sin\frac{\xi_{mb}}{2}\right).$$

Variația săgeților w_{max} și a eforturilor S_{max} și S'_{max} pentru diferite rapoarte b/a a fost redată în figura 4 ; expresiile au forma

$$w_{max} = c_1 \frac{pa^4}{1\,000\,kh^2},$$

$$S_{max} = c_2 \frac{pa^2 l}{100\,h} \quad \text{(pentru } b/a \leqslant 1\text{)}, \tag{13}$$

$$S'_{max} = c'_2 \frac{pa^2\,l}{100\,h} \quad \text{(pentru } b/a \geqslant 1\text{)}.$$

*) Dintre S_{max} și S'_{max} valoarea cea mai mare se produce în bara dirijată paralel cu latura mai scurtă ; deci $S_{max} > S'_{max}$ dacă $a < b$ și $S_{max} < S'_{max}$ dacă $a > b$. Dacă numărul intervalelor este par pe o direcție, fie x, atunci S_{max} trebuie calculat luînd $x = (a \pm l)/2$ și analog pe direcția y. Pentru o discuție mai detaliată vezi [3].

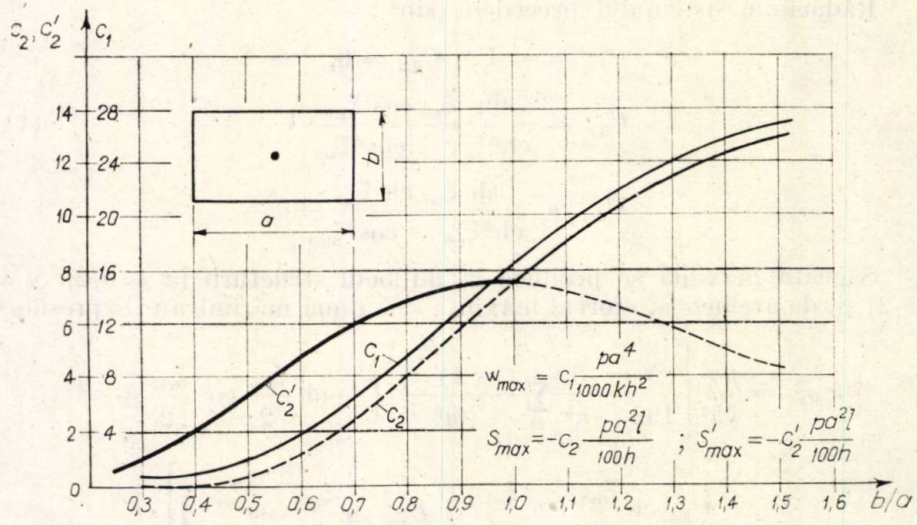


Fig. 4. — Variația săgeții maxime și a eforturilor maxime S și S' la centrul structurii simplu rezemate.

3.2 STRUCTURA SIMPLU REZEMATĂ PE TREI LATURI ȘI AVÎND A PATRA LATURĂ LIBERĂ

Pentru sarcina uniform distribuită p acest caz a fost studiat în [3], astfel încît ne vom limita să dăm direct unele rezultate.

Cu originea axelor de coordonate aleasă ca în figura 3 *b*, soluția generală are aceeași formă (5); în schimb, diferă condițiile la limită necesare determinării constantelor de integrare:

$$- \text{pentru } y = 0 \rightarrow w = 0 \text{ și } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,$$

$$- \text{pentru } y = b \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0.$$

Cu constantele de integrare $\bar{C}_i$ introduse de (9), cele patru condiții la limită se scriu

$$1 + \bar{C}_{1m} = 0,$$

$$0 + \bar{C}_{2m} = 0,$$

$$0 + \bar{C}_{2m} \operatorname{ch} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} - \bar{C}_{1m} \operatorname{sh} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} - \bar{C}_{4m} \operatorname{ch} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} + \\ + \bar{C}_{3m} \operatorname{sh} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} = 0,$$

$$0 + (\bar{C}_{3m} - \bar{C}_{4m}) \operatorname{ch} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} - (\bar{C}_{3m} + \bar{C}_{4m}) \operatorname{sh} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} - \\ - (\bar{C}_{1m} + \bar{C}_{2m}) \operatorname{ch} \xi_{mb} \sin \xi_{mb} - (\bar{C}_{1m} - \bar{C}_{2m}) \operatorname{sh} \xi_{mb} \cos \xi_{mb} = 0,$$

cu rădăcinile

$$\bar{C}_{1m} = -1\,;\quad \bar{C}_{2m} = 0,$$

$$\bar{C}_{3m} = \frac{1 - \cos 2\xi_{mb}}{\operatorname{sh} 2\xi_{mb} - \sin 2\xi_{mb}},$$

$$\bar{C}_{4m} = \frac{\operatorname{ch} 2\xi_{mb} - 1}{\operatorname{sh} 2\xi_{mb} - \sin 2\xi_{mb}},$$

unde ξ_{mb} are aceeași semnificație (10).

Pentru a avea o imagine a influenței raportului laturilor b/a asupra mărimii săgeților și eforturilor, în figura 5 a fost reprezentată variația săgeților maxime w_{max} și a efortului S_{max} la mijlocul laturii libere ($x = a/2$, $y = b$), în funcție de $b/a \in (0{,}2\,;\ 2{,}0)$.

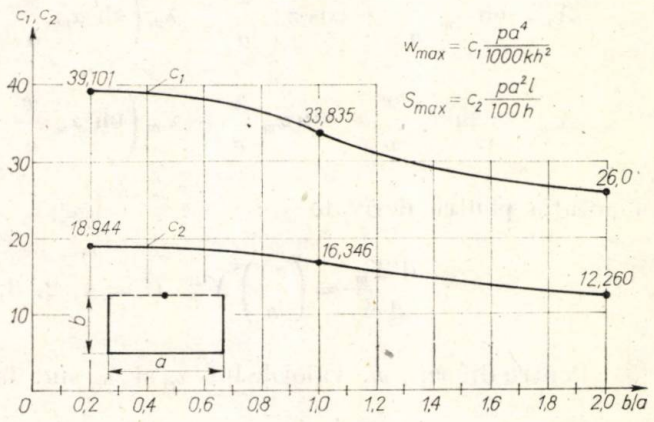


Fig. 5. — Variația lui w_{max} și S_{max} la mijlocul laturii libere.

Ținînd seama de expresiile constantelor de integrare, mărimile precedente iau forma mai simplă:

$$w_{max} = \frac{pa^4}{kh^2}\left(\frac{5}{192} + \frac{8}{\pi^5}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^5}\,\frac{\operatorname{ch}\xi_{mb}\sin\xi_{mb} - \operatorname{sh}\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}{\operatorname{sh}\xi_{mb}\operatorname{ch}\xi_{mb} - \sin\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}\right),$$

$$S_{max} = -\frac{pa^2l}{h}\left(\frac{1}{8} + \frac{4}{\pi^3}\sum_m \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^3}\,\frac{\operatorname{ch}\xi_{mb}\sin\xi_{mb} - \operatorname{sh}\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}{\operatorname{sh}\xi_{mb}\operatorname{ch}\xi_{mb} - \sin\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}\right)$$

$$(m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots),$$

w_{max} și S_{max} sînt exprimați cu ajutorul aceleași formule (13).

3.3 STRUCTURA SIMPLU REZEMATĂ PE DOUĂ LATURI ADIACENTE, CU O LATURĂ LIBERĂ ȘI CEALALTĂ ÎNCASTRATĂ PERFECT

Problema poate fi rezolvată cu ajutorul seriilor de funcții fundamentale [6], [8].

Seria de funcții fundamentale care satisface condițiile de rezemare pe laturile $x = 0$ (încastrare perfectă) și $x = a$ (simplă rezemare) are termenul general

$$X_m = \operatorname{ch}\alpha_m \frac{x}{a} - \cos\alpha_m \frac{x}{a} - \lambda_m\left(\operatorname{sh}\alpha_m \frac{x}{a} - \sin\alpha_m \frac{x}{a}\right) \tag{14 a}$$

și derivatele succesive (adimensionalizate)

$$X'_m = \operatorname{sh}\alpha_m \frac{x}{a} + \sin\alpha_m \frac{x}{a} - \lambda_m\left(\operatorname{ch}\alpha_m \frac{x}{a} - \cos\alpha_m \frac{x}{a}\right), \tag{14 b}$$

$$X''_m = \operatorname{ch}\alpha_m \frac{x}{a} + \cos\alpha_m \frac{x}{a} - \lambda_m\left(\operatorname{sh}\alpha_m \frac{x}{a} + \sin\alpha_m \frac{x}{a}\right), \tag{14 c}$$

$$X'''_m = \operatorname{sh}\alpha_m \frac{x}{a} - \sin\alpha_m \frac{x}{a} - \lambda_m\left(\operatorname{ch}\alpha_m \frac{x}{a} + \cos\alpha_m \frac{x}{a}\right), \tag{14 d}$$

cu notația pentru derivate

$$\frac{\mathrm{d}^i X_m}{\mathrm{d}x^i} = \left(\frac{\alpha_m}{a}\right)^i X_m^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pentru diferiți m, valorile lui α_m și λ_m sînt date în tabela 1.

Tabela 1

$m =$	λ_m	α_m
1	1,00077730	3,92660230
2	1,00000144	7,06858275
3	1,00000000	10,21017613
...	...	...
$m \geqslant 5$	1	$(4m + 1)\pi/4$

Soluția ecuației (3) este căutată sub forma [6]:

$$w(x, y) = w_p(x) + \sum_m W_m(y) \cdot X_m(x), \tag{15}$$

în care soluția particulară se scrie
— sub formă finită:

$$w_p(x) = \frac{pa^4}{24kh^2}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right], \tag{16 a}$$

— sub formă de serie de funcţii fundamentale :

$$w_p(x) = \frac{2pa^4}{kh^2} \sum_m \frac{\bar{p}_m}{\alpha_m^4} X_m(x). \tag{16 b}$$

În relaţia (16 b) coeficienţii adimensionali ai încărcării $\bar{p}_m$ au expresia generală

$$\bar{p}_m = \frac{X_m'''(a) - X_m'''(0)}{\alpha_m},$$

respectiv

$$\bar{p}_1 = 0{,}860000515\,;\ \bar{p}_2 = +\,0{,}082630425\,;\ \bar{p}_3 = +\,0{,}334386004\,;\ \ldots$$

Deoarece condiţiile la limită pe laturile $y = 0$ şi $y = b$ sînt aceleaşi ca în cazul tratat la punctul 3.2, constantele $\bar{C}_i$ vor avea şi ele aceleaşi expresii. Diferenţele care apar sînt în expresia variabilei

$$\xi_m = \frac{\alpha_m\, y}{\sqrt{2}\, a} \tag{17}$$

şi a soluţiei particulare date de (16). Cu acestea soluţia pentru săgeţi are forma

$$w(x, y) = \frac{pa^4}{kh^2}\left\{\frac{1}{24}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2\sum_m \frac{\bar{p}_m}{\alpha_m^4}(-\operatorname{ch}\,\xi_m \cos\,\xi_m + \bar{C}_{3m} \operatorname{ch}\,\xi_m \sin\,\xi_m + \bar{C}_{4m} \operatorname{sh}\,\xi_m \cos\xi_m)\, X_m(x)\right\} \tag{18}$$

şi analog pentru eforturile din faţa superioară :

$$S = -\frac{pa^2 l}{h}\left\{\frac{1}{8}\left[4\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 5\,\frac{x}{a} + 1\right] - \sum_m \frac{\bar{p}_m}{\alpha_m^2}(-\operatorname{ch}\,\xi_m \cos\,\xi_m + \right.$$

$$\left. + \bar{C}_{3m} \operatorname{ch}\xi_m \sin\,\xi_m + \bar{C}_{4m} \operatorname{sh}\,\xi_m \cos\,\xi_m) X_m''(x)\right\}. \tag{19}$$

Pentru latura liberă ($y = b$) se introduce notaţia

$$\xi_{mb} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{2}a}, \tag{20}$$

rezultînd astfel

$$w_{y=b} = \frac{pa^4}{kh^2}\left\{\frac{1}{24}\left[2\left(\frac{x}{a}\right)^4 - 5\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 4\sum_m \frac{\bar{p}_m}{\alpha_m^2} A_m X_m(x)\right\}, \tag{21 a}$$

$$S_{y=b} = \frac{pa^2 l}{h}\left\{\frac{1}{8}\left[4\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 5\frac{x}{a} + 1\right] - 2\sum_m \frac{\bar{p}_m}{\alpha_m^2} A_m X_m''(x)\right\} \tag{21 b}$$

unde s-a notat

$$A_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\operatorname{ch}\xi_{mb}\sin\xi_{mb} - \operatorname{sh}\xi_{mb}\cos\xi_{mb}}{\operatorname{sh} 2\xi_{mb} - \sin 2\xi_{mb}} \tag{22}$$

$$(m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Pentru determinarea poziției săgeții maxime se ține seama că aceasta variază foarte puțin în jurul poziției de maxim; de aceea se alege secțiunea în care $dw_p/dx = 0$, adică

$$\frac{x_0}{a} = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} \approx 0{,}58.$$

Reținînd primul termen din dezvoltarea în serie (21 a), rezultă

$$w_{max} = \frac{pa^4}{kh^2}\left(0{,}01057934 + \frac{4 \times 0{,}860000514 \times 1{,}50922}{237{,}72107} A_1\right) =$$

$$= \frac{pa^4}{kh^2}(0{,}01057934 + 0{,}0218395445\, A_1) = c_1 \frac{pa^4}{1000\, kh^2},$$

în care

$$\xi_{1b} = \frac{\alpha_1 b}{\sqrt{2}a} = \frac{3{,}92660236}{\sqrt{2}} \frac{b}{a} = 2{,}77652711 \frac{b}{a}.$$

Pentru S_{max} se caută valoarea maximă pozitivă din cîmp și valoarea maximă negativă de pe reazem.

Folosind același raționament ca precedent se obține pentru cîmp $(x = x_1)$:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{5}{8} = 0{,}625,$$

$$X_1''(0{,}625a) = -1{,}32562$$

și

$$S_{max} = -\frac{pa^2l}{h}(0{,}0703125 - 0{,}147881522\,A_1) = -c_2'\frac{pa^2l}{100\,h}.$$

Pentru reazem ($x = 0$) avem $X_m''(0) = 2$, și mai departe

$$S_{max} = +\frac{pa^2l}{h}(0{,}125 - 0{,}2231129912\,A_1) = +c_2''\frac{pa^2l}{100\,h}.$$

Pentru $b/a \in (0{,}2\,;\,2{,}0)$ variația coeficienților adimensionali c_1, c_2', c_2'' a fost reprezentată în figura 6.

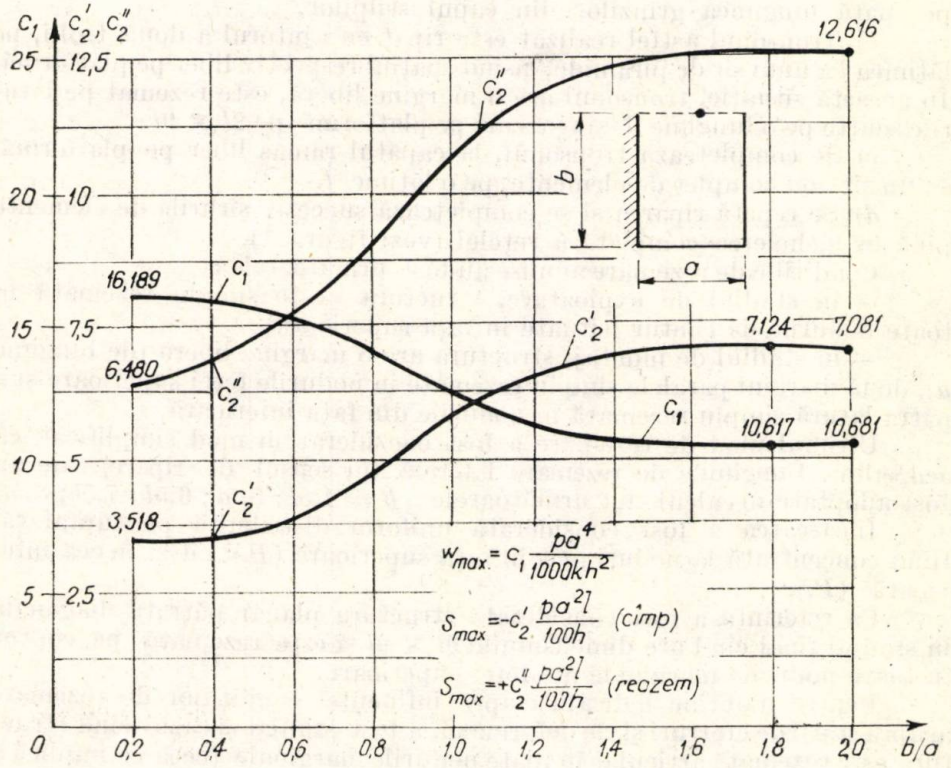


Fig. 6.— Variația lui w_{max} și S_{max} la mijlocul laturii libere și pe reazem la structura continuă pe două deschideri.

Din compararea curbelor c_2' și c_2'' reiese că eforturile maxime din cîmp sînt de aproximativ două ori mari decît cele de pe reazemul intermediar.

Comparînd apoi curbele c_1 și c_2', respectiv c_1 și c_2' în cele două cazuri de rezemare, rezultă că introducerea unui reazem intermediar îmbunătățește considerabil comportarea structurii atît din punctul de vedere al deformațiilor, cît și cel al eforturilor.

4. STRUCTURA PLANAR PĂTRATĂ DIAGONALĂ

În cazul structurii planar pătrate diagonale, problema stabilirii stării de eforturi și de deformații în timpul montajului, cînd o latură este liberă, a fost studiată prin aplicarea metodei generale a deplasărilor. Rezultatele au fost obținute cu ajutorul programului *OBLEM*.

Ca un caz concret a fost aleasă o structură planar pătrată diagonală pe contur pătrat, constituită din 9×9 piramide întoarse ($l = a/9$).

Fazele de execuție admise urmează procedeul descris în lucrarea [1] și anume :

a) Se asamblează un tronson inițial de lungime $a = 9\,l$ și lățime $3l$ pe o platformă special construită. Laturile scurte ale tronsonului reazemă, prin intermediul nodurilor de reazem, pe șinile de ghidare montate pe toată lungimea grinzilor din capul stîlpilor.

b) Tronsonul astfel realizat este ripat cu ajutorul a două trolii, pe lățimea l a unui șir de piramide, lăsînd spațiul respectiv liber pe platformă. În această situație, tronsonul are o margine liberă, este rezemat pe laturile scurte pe o lungime l și reazemă pe platformă pe $2l \times 9l$.

c) Se completează tronsonul, la capătul rămas liber pe platformă, cu un șir nou complet de elemente, pe o lățime l.

d) Se repetă riparea și se completează succesiv șirurile de elemente pînă la încheierea completă a rețelei (vezi figura 1).

Condițiile de rezemare admise au fost următoarele :

— în stadiul de exploatare, structura este simplu rezemată în toate nodurile de contur (situate în fața superioară) ;

— în stadiul de montaj, structura are o margine liberă (de lungime *a*), două margini paralele simplu rezemate în nodurile feței superioare și a patra latură simplu rezemată în nodurile din fața inferioară.

Ultimul mod de rezemare a fost considerat în mod simplificat ca acoperitor. Lungimile de rezemare laterală (în sensul de ripare) care au fost adoptate în calcul sînt următoarele : $b = 4{,}5l$; $5{,}5l$; $6{,}5l$; $7{,}5l$; $8{,}5l$.

Încărcarea a fost considerată uniform distribuită pe suprafață, fiind concentrată la noduri atît în fața superioară (P_s), cît și în cea inferioară (P_i).

Ca referință a fost considerată structura planar pătrată diagonală în stadiul final cînd are dimensiunile $9l \times 9l$ și este rezemată pe contur în toate nodurile marginale ale feței superioare.

Pentru a obține indicații asupra influenței condițiilor de rezemare asupra stării de eforturi și de deformații, a fost studiat și cazul cînd structura este rezemată articulat în toate nodurile marginale (ceea ce implică o conlucrare cu stîlpii).

Din rezultatele complete obținute pentru diferite rapoarte b/a [3], am selectat, în mod exemplificativ, cazul cînd $b = 8{,}5l$, care este cel mai defavorabil.

Datele numerice folosite în program au fost următoarele :

— lungimea barelor din fața inferioară și de contur $l = 3{,}00$ m,
— înălțimea structurii $h = 1{,}80$ m,,
— aria secțiunilor transversale ale barelor din cele două fețe $A_s = A_i = A_c = A = 0{,}35$ dm^2 ;

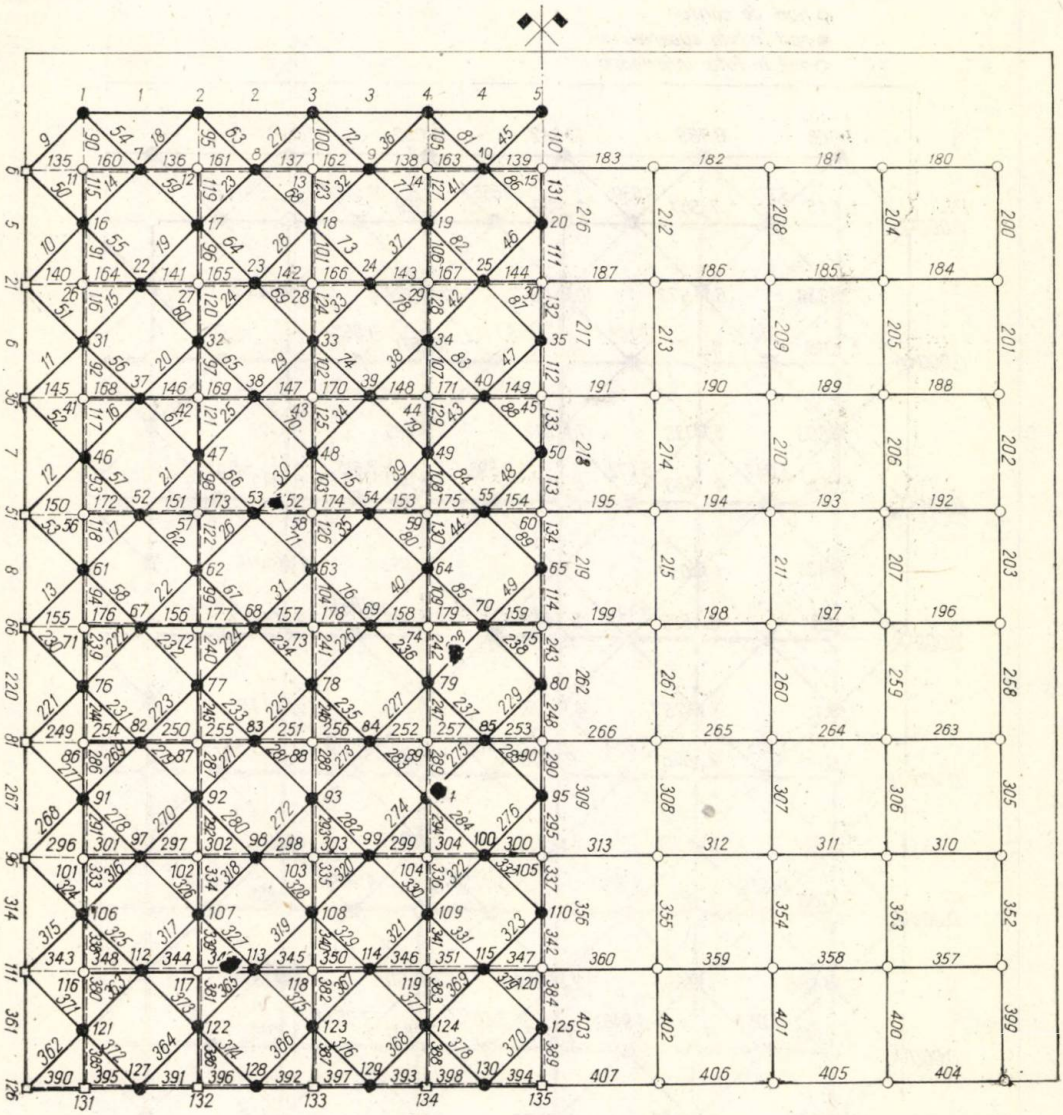


Fig. 7. — Numerotarea barelor și a nodurilor la structura planar pătrată diagonală cu 9× 8,5 ochiuri.

— aria secțiunilor transversale ale diagonalelor $A_d = 0{,}20$ dm²;
— modulul de elasticitate al materialului (oțel) $E = 2100000$ daN/cm².

Rezultatele sînt prezentate sub formă adimensionalizată, pentru eforturile în bare avînd expresii de forma

$$S, T = (\text{coeficient}) \times P,$$

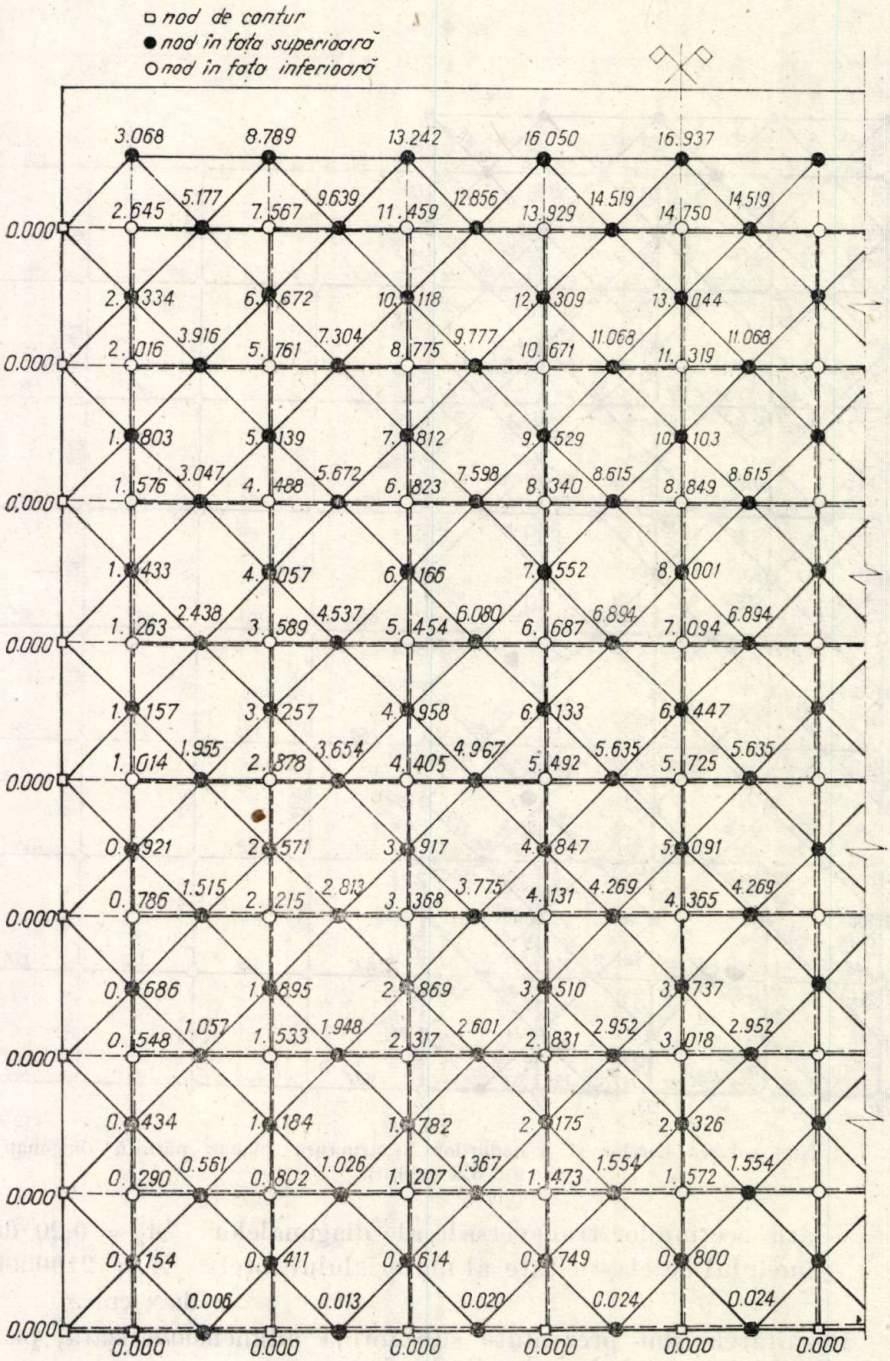


Fig. 8. — Săgeţile w_{max} cînd faţa superioară este încărcată cu sarcini P_s.

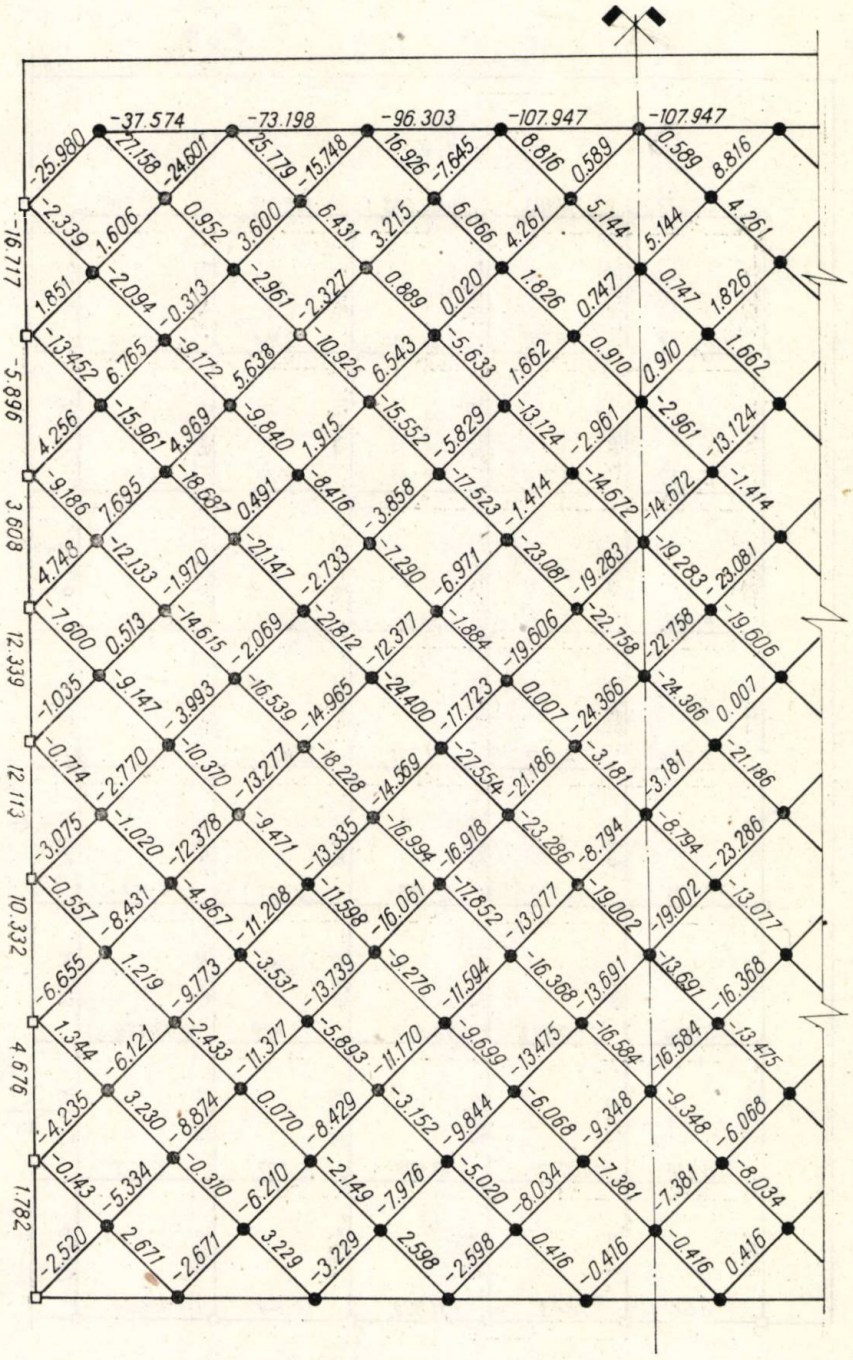


Fig. 9. — Eforturile S_{max} cînd faţa superioară este încărcată cu sarcini P_s.

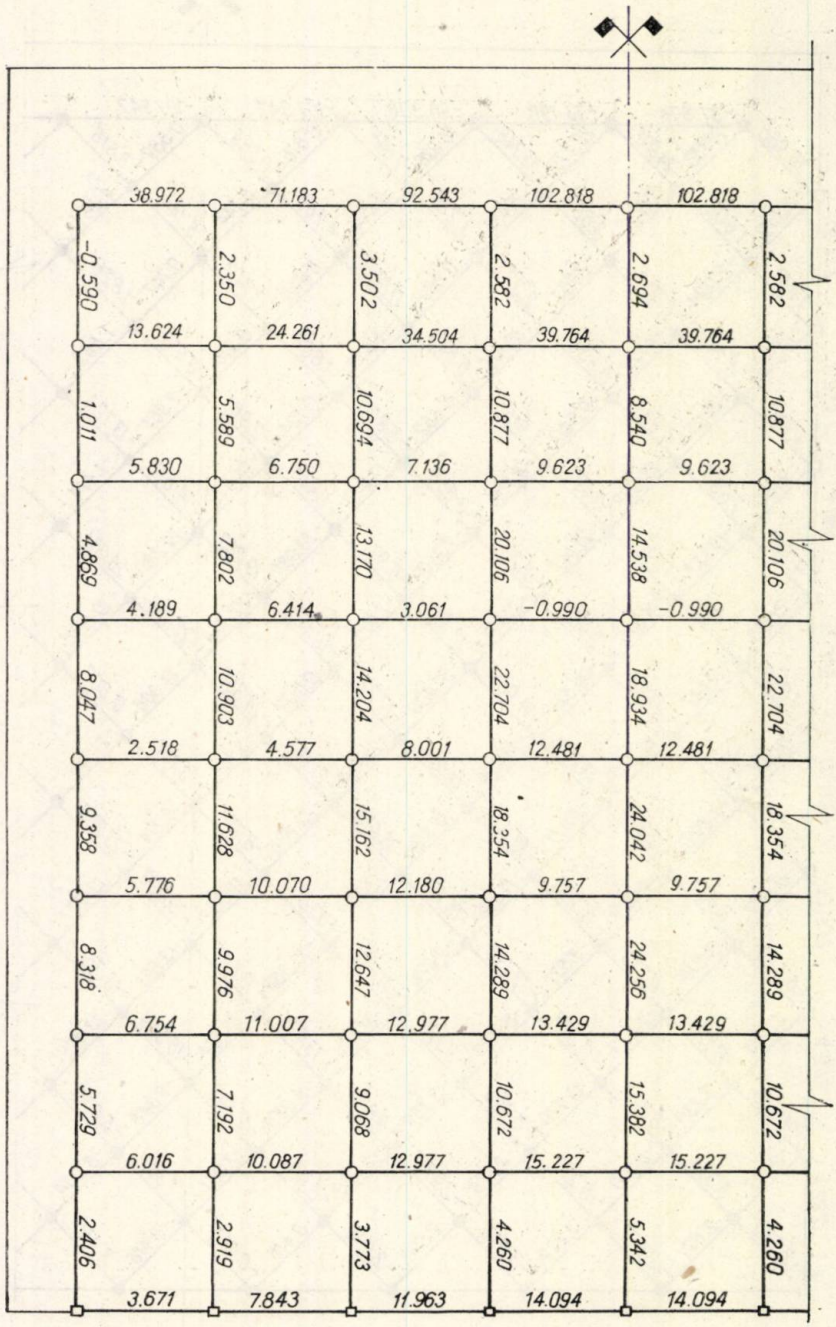
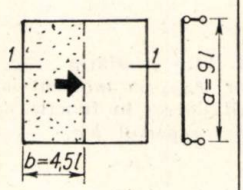
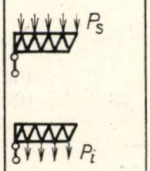
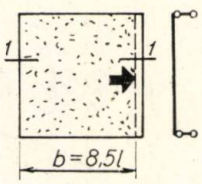
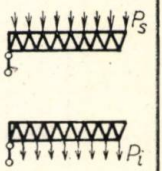
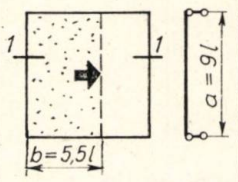
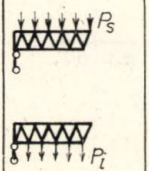
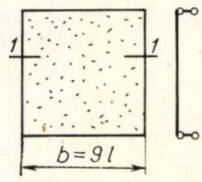
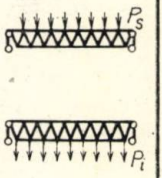
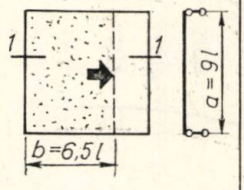
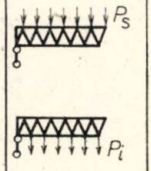
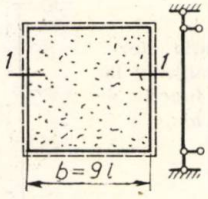
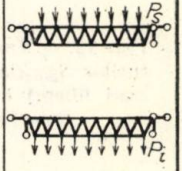
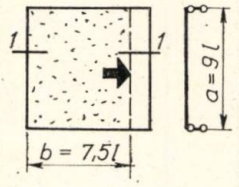
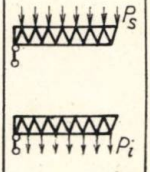
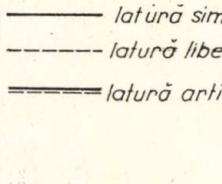


Fig. 10. — Eforturile T_{max} cînd faţa superioară este încărcată cu sarcini P_s.

Tabela 2

Nr. crt.	Schema structurii	Secțiune 1-1 Încărcare	Nr. crt.	Schema structurii	Secțiune 1-1 Încărcare
1			5		
2			6		
3			7		
4					

iar pentru săgeți

$$w = (\text{coeficient}) \times 245 \frac{Pl}{EA}$$

(cu $P = P_s$ sau P_i), lungimile fiind exprimate în cm, iar forțele în tf.

Rezultatele sînt valabile riguros pentru $A_d = \frac{0{,}20}{0{,}35} A$, însă ele pot fi folosite, cu bună aproximație, și pentru alte rapoarte A_d/A.

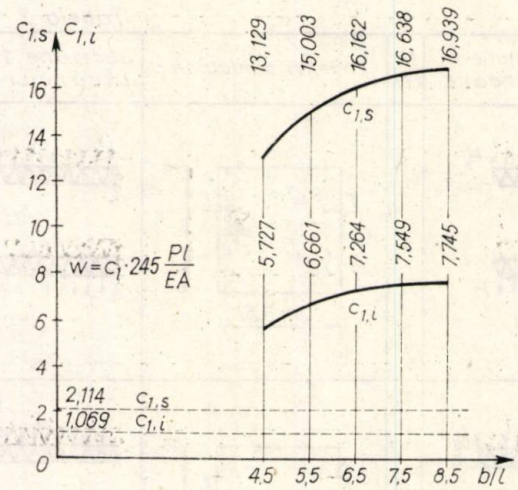


Fig. 11. — Variația săgeților w_{max} (la mijlocul laturii libere) în funcție de raportul b/a.

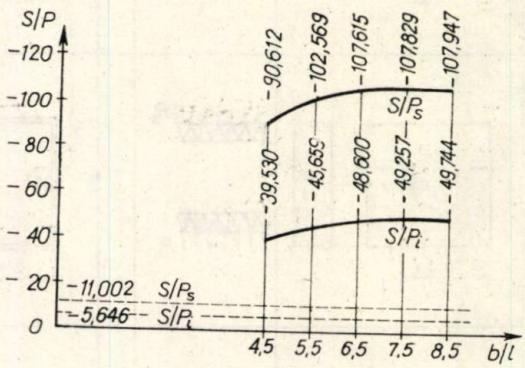


Fig. 12. — Variația eforturilor S_{max} (la mijlocul laturii libere) în funcție de raportul b/a.

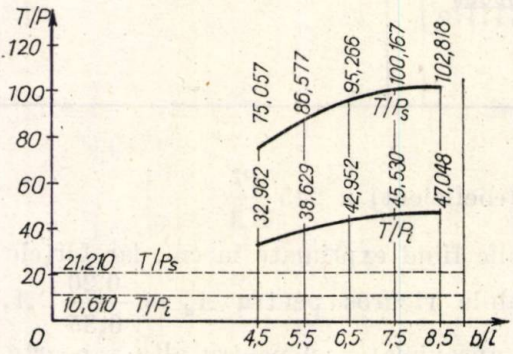


Fig. 13. — Variația eforturilor T_{max} în funcție de raportul b/a.

În cazul altor înălțimi de construcție (decît $h/l = 1/15$ în cazul de față), rezultatele pot fi obținute din cele de față, ținînd seama de concluziile studiului [10].

În figura 7 este indicată numerotarea barelor și a nodurilor. În figura 8 sînt trecute valorile săgeților nodurilor din cele două fețe în ipoteza că sarcini constante P_s sînt aplicate în nodurile feței superioare.

În figura 9 sînt trecute valorile eforturilor S/P_s din fața superioară, iar figura 10 valorile eforturilor T/P_s din fața inferioară.

La examinarea coeficienților ce figurează pe planșe trebuie avut în vedere că aria aferentă unui nod inferior este l^2, în timp ce aceea aferentă unui nod superior este doar $(l/\sqrt{2})^2 = l^2/2$.

Cazurile studiate de primul dintre autori [3] sînt sintetizate în tabela 2.

Datele numerice obținute au permis trasarea unor diagrame de variație a valorilor maxime ale lui w, S, T — la mijlocul laturii libere a structurii planare. Ele sînt redate în figurile 11, 12 și 13, comparativ cu structura rezemată pe toate cele patru laturi.

În ceea ce privește ultimul caz este de remarcat că w_{max} și T_{max} se produc la centrul structurii, pe cînd S_{max} se produce în bare situate aproximativ la sferturile diagonalelor.

5. OBSERVAȚII FINALE. CONCLUZII

Examinarea valorilor numerice înscrise în figurile 2, 4, 5, 6,8 —13 arată că atît pentru dala omogenă și izotropă, cît și pentru structurile planar pătrate simple și diagonale, condiția de rezemare incluzînd o latură liberă, la diferite rapoarte de laturi, este mai defavorabilă decît cazul rezemării pe toate cele patru laturi. Aceasta presupune, desigur, aceleași încărcări în ambele situații.

Rămîne de examinat cazul cînd încărcările sînt diferite, corespunzînd încărcărilor reale la montaj și, apoi, în exploatare.

Vom considera, după [1], următoarele valori:

— sarcina de montaj (provenind din greutatea proprie) $p_1 = 40$ daN/m^2,

— sarcina de exploatare $p_2 = 225$ daN/m^2.

Admițînd că sarcina se aplică în întregime în fața superioară, vor corespunde forțele concentrate la noduri

$$P_{s1} = p_1 \frac{l^2}{2} = 40 \times \frac{3{,}00^2}{2} = 180 \text{ daN} = 0{,}18 \text{ tf},$$

$$P_{s2} = p_2 \frac{l^2}{2} = 225 \times \frac{3{,}00^2}{2} = 1012{,}5 \text{ daN} = 1{,}0125 \text{ tf}.$$

Cu aceste valori corespund următoarele :
— pentru montaj :

$$w_{max} = 16{,}937 \times 245 \times \frac{0{,}18 \times 300}{2100 \times 35} = 3{,}05 \text{ cm},$$

$$S_{max} = -107{,}947 \times 0{,}18 = -19{,}43 \text{ tf},$$

$$T_{max} = +102{,}818 \times 0{,}18 = +18{,}51 \text{ tf};$$

— pentru exploatare :

$$w_{max} = 2{,}114 \times 245 \times \frac{1{,}0125 \times 300}{2100 \times 35} = 2{,}14 \text{ cm},$$

$$S_{max} = -11{,}002 \times 1{,}0125 = -11{,}14 \text{ tf},$$

$$T_{max} = +21{,}210 \times 1{,}0125 = +21{,}475 \text{ tf}.$$

Vom mai examina cazul cînd considerăm că greutatea proprie se împarte egal în cele două fețe ; vor corespunde atunci încărcările

$$P_{s1} = \frac{p_1}{2}\frac{l^2}{2} = 0{,}09 \text{ tf}, \quad P_{i1} = \frac{p_1}{2} l^2 = 0{,}18 \text{ tf},$$

$$P_{s2} = \frac{p_2}{2}\frac{l^2}{2} = 0{,}50625 \text{ tf}, \quad P_{i2} = \frac{p_2}{2} l^2 = 1{,}0125 \text{ tf}.$$

Cu aceste valori rezultă
— pentru montaj :

$$w_{max} = 16{,}937 \times 245 \times \frac{0{,}09 \times 300}{2100 \times 35} + 7{,}745 \times$$

$$\times 245 \times \frac{0{,}18 \times 300}{2100 \times 35} = 2{,}92 \text{ cm},$$

$$S_{max} = -107{,}947 \times 0{,}09 - 49{,}744 \times 0{,}18 = -18{,}67 \text{ tf},$$

$$T_{max} = +102{,}818 \times 0{,}09 + 47{,}048 \times 0{,}18 = +17{,}72 \text{ tf};$$

— pentru exploatare :

$$w_{max} = 2{,}114 \times 245 \times \frac{0{,}50625 \times 300}{2100 \times 35} + 1{,}069 \times 245 \times$$

$$\times \frac{1{,}0125 \times 300}{2100 \times 35} = 2{,}15 \text{ cm},$$

$$S_{max} = -11{,}002 \times 0{,}50625 - 5{,}646 \times 1{,}0125 = -11{,}29 \text{ tf},$$

$$T_{max} = +21{,}210 \times 0{,}50625 + 10{,}610 \times 1{,}0125 = +21{,}48 \text{ tf}.$$

Din compararea rezultatelor obținute reiese că modul de distribuire a încărcărilor într-o singură față sau în cele două fețe nu introduce diferențe sensibile, acestea fiind de cel mult 4,27 % atît pentru săgeți, cît și pentru eforturi.

Compararea săgeților arată că acestea sînt reduse, fie $\frac{1}{885}$ din deschidere în situația limită de montaj, $\frac{1}{1262}$ din deschidere în exploatare.

Mai rezultă că săgețile de montaj sînt mai mari decît cele din exploatare, iar cei 3,05 cm (respectiv 2,92 cm) calculați vor trebui să fie anulați (printr-un procedeu oarecare) pentru ca la încheierea ripării, nodurile de contur — situate pe marginea liberă — să poată ajunge să reazeme pe grinda de contur.

O altă problemă necesită o discuție specială și anume efortul maxim de compresiune pe latura liberă (fie 19,43 tf), de 1,744 ori mai mare decît efortul maxim de compresiune în stadiul de exploatare, pentru care se dimensionează, în principiu, zona centrală a structurii.

Barele de contur (situate în fața superioară) au o lungime mai mare decît celelalte bare din aceeași față. Ele au rolul de a asigura indeformabilitatea geometrică a întregii structuri (pentru detalii vezi [4], [5]) și prin aceasta se explică eforturile mari care apar la montaj.

De aceea barele de contur trebuie să fie dimensionate fie pentru situația de montaj, fie consolidate provizoriu, pe durata montajului.

Aceste valori mai mari ale eforturilor în barele de pe latura liberă sînt efectiv limitate la contur. Într-adevăr, efortul maxim de compresiune în restul structurii este (vezi figura 9):

$$S_m = -27{,}554 \times 0{,}18 = -4{,}96 \text{ tf},$$

adică mai redus decît efortul maxim de compresiune în stadiul de exploatare.

În sfîrșit, în privința condițiilor de rezemare în stadiul de exploatare, calculele numerice dau următoarele rezultate:

— pentru conturul simplu rezemat (pendular):

$$w_{max} = 2{,}14 \text{ cm}; \quad S_{max} = -11{,}14 \text{ tf}; \quad T_{max} = +21{,}475 \text{ tf};$$

— pentru conturul articulat (cu deplasări împiedicate în planul feței superioare):

$$w_{max} = 1{,}72 \text{ cm}; \quad S_{max} = -5{,}73 \text{ tf}; \quad T_{max} = +10{,}69 \text{ tf}.$$

Se constată deci reduceri de ordinul 19,6 % pentru săgeți, 48,5 % pentru eforturile S și 50,3 % pentru eforturile T.

Uneori, constructorul poate monta și învelitoarea (direct sau prin intermediul panelor) mărind în felul acesta încărcările de montaj cu circa

20—25%. S-a constatat însă experimental că învelitoarea de tablă cutată conlucrează cu barele din fața superioară, sporind, în felul acesta, rigiditatea structurii în ansamblu. Eforturile în barele din fața superioară scad cu circa 30% față de cazul cînd învelitoarea ar fi considerată greutate moartă, astfel că, în acest caz, nu sînt de prevăzut situații mai defavorabile decît situația de exploatare.

Concluzia generală pe care o putem desprinde din studiul de față este că, printre ipotezele de dimensionare ale unei structuri reticulate planare trebuie să fie luate în considerare și diferitele scheme de montaj. Uneori, cînd conformarea geometrică intrinsecă nu asigură indeformabilitatea geometrică a structurii, fiind necesară examinarea atentă a condițiilor de rezermare, acest lucru este scos în evidență prin schemele de calcul la montaj.

★

Prezentul studiu reprezintă o parte din teza de doctorat a primului dintre autori.

Autorii țin să exprime și pe această cale mulțumirile lor colegului dr. ing. Gh. Oblemenco pentru concursul dat la obținerea datelor numerice pe calculator.

Primit la redacție la 24 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. V. BUTA, FR. LISSAI, A. PÂRVU, M. V. SOARE, *Realizări recente în proiectarea și construcția structurilor spațiale planare*, Bul. științ. al Institutului de construcții București, **XX**, *3—4*, 87—123 (1977).
2. F. CZERNY, *Tafeln für Rechteckplatten und Trapezplatten*, In: Beton-Kalender 1980, Teil I, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf, p. 410.
3. NGUYEN BA PHUONG, *Contribuții la studiul stării de eforturi și de deformații în structurile spațiale planare*, Teza de doctorat (în manuscris), Institutul de construcții București.
4. M. V. SOARE, *Contribuții la studiul rețelelor spațiale planar pătrate diagonale*, Construcții și materiale de construcții, **24**, *8*, 423—440 (1970).
5. M. V. SOARE, A. PÂRVU, M. DINCULESCU, *Rețele spațiale planar pătrate diagonale. Planșe cu coeficienți pentru calculul eforturilor și săgeților*, Studii și cercetări INCERC, Nr. *1*, București, 1971.
6. M. V. SOARE, *Statica și dinamica rețelelor spațiale planar pătrate simple prin aplicarea metodei mediului continuu echivalent*, St. cerc. mec. apl., **31**, *3*, 673—702 (1972).
7. M. V. SOARE. A. PÂRVU, *Proiectarea și executarea unei rețele spațiale planare pentru hala de încercări la foc* INCERC, Construcții, **27**, *5*, 31—38 (1975).
8. M. V. SOARE, *Calcule speciale pentru realizarea montajului acoperișului metalic de la sala de sport și spectacole Reșița*, Contract I.C.B.—IPROTIM nr. 4180—1975.
9. — *O metodă generală de rezolvare a plăcilor ortotrope dreptunghiulare*, St. cerc. mec. apl., **39**, *2*, 203—219 (1980).
10. M. V. SOARE, GH. OBLEMENCO, *Structuri reticulate planare. Influența înălțimii structurii asupra stării de eforturi și de deformații*, St.cerc.mec.apl., **40**, *3*, 337—361 (1981).

O ANALOGIE ELASTO-RELATIVISTĂ

de I. BERBENTEA

Cu ajutorul ecuațiilor diferențiale neliniare se pune în evidență legătura dintre un fenomen nerelativist (fenomenul de deformație la o bară dreaptă flexibilă solicitată de sarcini transversale și longitudinale) și un fenomen relativist (mișcarea oscilatorie, cu viteze apropiate de viteza luminii a unui punct material pe o traiectorie dreaptă, reliefînd astfel unitatea unor fenomene ale naturii de tipuri complet diferite.
O consecință practică a analogiei constă în faptul că se pot utiliza, în studiul fenomenelor relativiste, metodele de investigare ale fenomenelor nerelativiste, dîndu-se soluția exactă a oscilatorului liniar relativist.
Se pun în evidență de asemenea ecuațiile care pot sta la baza studiului experimental al analogiei.

1. Studiul fenomenului de deformație al unei bare drepte flexibile solicitată de sarcini transversale și longitudinale se reduce, din punct de vedere matematic, la studiul [3] următoarei ecuații diferențiale neliniare:

$$u''(x) - \alpha^2 \cdot u(x)[1 + u'^2(x)]^{3/2} = 0, \tag{1}$$

unde coeficientul α^2 ține cont de efectul sarcinilor longitudinale; funcțiunea $u(x)$ este în legătură strînsă cu săgeata barei și în plus cu sarcinile transversale și longitudinale ce solicită bara dreaptă flexibilă la încovoiere; mărimea (x) reprezintă distanța, față de o origine aleasă pe bară, la care se măsoară săgeata.

Orice fenomen descris de aceeași ecuație (1) și aceleași condiții la limită este un analog al fenomenului de deformație a barei drepte flexibile (bara cu nelinearitate geometrică) solicitată de sarcini transversale și longitudinale.

Dintre analogiile posibile, de acest tip, vom arăta analogia cu oscilatorul liniar relativist.

2. Pentru a pune în evidență analogia menționată, vom ține cont că fenomenele din mecanica relativistă se studiază într-un spațiu cu patru dimensiuni, cunoscut sub numele de „universul spațiu-timp minkowskian". În acest spațiu cea de-a patra dimensiune se notează $x_4 = \mathrm{i}.c.t$, unde t este timpul, iar c viteza de propagare a luminii în vid; $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Considerînd acum pe u ca fiind deplasarea oscilatorului liniar relativist la un moment dat, față de origine, iar pe $x = x_4 = \mathrm{i}.c.t$ și introducînd operatorii:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_4} = \frac{1}{\mathrm{i}\,c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_4^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2},$$

ecuația (1) conduce la o ecuație analogică cu aceea a oscilatorului liniar relativist.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 2, 1982, P. 317–320

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA 1948

Într-adevăr, ținînd cont de (2), ecuația (1) devine :

$$-\frac{1}{c^2}\ddot{u}(t)-\alpha^2 u(t)\left[1-\frac{\dot{u}^2(t)}{c^2}\right]^{3/2}=0$$

sau

$$\ddot{u}(t)+\alpha^2 c^2 u(t)\left[1-\frac{\dot{u}^2(t)}{c^2}\right]^{3/2}=0, \tag{3}$$

unde

$$\dot{u}(t)=\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Ecuația (3) este analoagă cu ecuația diferențială de mișcare a unui oscilator liniar relativist care poate fi stabilită și pornind de la ecuațiile fundamentale ale dinamicii relativiste.

3. Importanța practică a acestei analogii constă în faptul că se pot folosi, în studiul oscilatorului relativist, toate rezultatele și metoda de integrare exactă de la studiul barei drepte flexibile.

Într-adevăr, ecuațiile fundamentale ale dinamicii relativiste ne conduc la ecuația diferențială exactă a oscilatorului liniar relativist, care are forma :

$$\ddot{z}(t)+\beta^2\cdot z(t)\left[1-\frac{\dot{z}^2(t)}{c^2}\right]^{3/2}=0, \tag{4}$$

unde z este deplasarea oscilatorului la momentul t din poziția de echilibru ; $\beta^2=\frac{K}{m_0}$, o constantă ; k, constanta resortului ; m_0, masa de repaus a oscilatorului, considerat ca un punct material ; c, viteza de propagare a luminii în vid.

Pentru a găsi soluția exactă a ecuației diferențiale (4) vom proceda astfel :

Punem $\dot{z}=p=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v(t)$,

unde $v(t)$ este viteza punctului material la momentul t.

Schimbăm rolul variabilelor introducînd operatorul :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Atunci avem :

$$\ddot{z}=\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}.$$

Ecuaţia diferenţială (4) devine :

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}'z}+\beta^2\cdot z(1-p^2/c^2)^{3/2}=0.$$

Separînd variabilele, obţinem

$$\frac{p\,\mathrm{d}p}{(1-p^2/c^2)^{3/2}}=-\beta^2\cdot z\,\mathrm{d}z.$$

Integrînd membru cu membru, după calcule simple ajungem la relaţia :

$$\frac{c^2}{\sqrt{1-p^2/c^2}}=-\beta^2\cdot\frac{z^2}{2}+C_1, \tag{5}$$

unde : C_1 este o constantă de integrare ce se determină din condiţiile iniţiale.

Rezolvînd ecuaţia iraţională (5) în raport cu necunoscuta p, obţinem :

$$p=\pm c\sqrt{1-\left(\frac{c^2}{-\beta^2\frac{z^2}{2}+C_1}\right)^2}=v. \tag{6}$$

Relaţia (6) permite calculul vitezei v a oscilatorului liniar relativist, în funcţie de deplasarea z.

Pentru determinarea constantei de integrare C_1 utilizăm condiţia următoare :

$$\text{la } z=a,\ v=p=0, \tag{7}$$

unde a este amplitudinea oscilatorului.

Folosind condiţia de mai sus, din (5) rezultă :

$$C_1=c^2+\beta^2\frac{a^2}{2}. \tag{8}$$

Observaţii. Relaţia (6) are sens dacă este îndeplinită condiţia :

$$1-\left(\frac{c^2}{C_1-\beta^2\cdot z^2/2}\right)^2\geqslant 0\cdot \tag{9}$$

Pentru determinarea relaţiei $t=t(z)$, folosim (6).

Avem

$$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=p(z,C_1).$$

Rezultă imediat

$$dt = dz/p(z, C_1).$$

Integrînd, obţinem relaţia căutată :

$$t(z) = \int \frac{dz}{p(z, C_1)} + C_2, \tag{10}$$

unde C_2 este a doua constantă de integrare ce se determină cu ajutorul următoarei condiţii iniţiale :

$$\text{la } t = 0, \quad z = 0.$$

În formula (10), $p(z, C_1)$ este dată de (6).

Este interesant de remarcat faptul că forma (10), obţinută pentru ecuaţia de mişcare a oscilatorului relativist, prezintă avantagii la calculul perioadei T, mărime care are importanţă practică.

Ecuaţiile (1), (3) şi (4) pot sta la baza studiului experimental al analogiei prezentate.

În încheiere, vom remarca faptul că în demonstrarea unităţii fenomenelor naturii, matematica poate constitui un instrument puternic.

Primită la redacţie la 23 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. A. BELEŞ, R. VOINEA, *Rezistenţa materialelor*, vol. II, Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
2. GH. BUZDUGAN, *Rezistenţa materialelor*, Ediţia X revizuită, Edit. tehnică, Bucureşti, 1974.
3. I. BERBENTEA, *O metodă de calcul a arcurilor lamelare cu neliniaritate geometrică solicitate la încovoiere plană de sarcini transversale şi longitudinale*, Simpozion de mecanisme şi transmisii mecanice, Timişoara, 1980.
4. C. IACOB, *Mecanică teoretică*, Ediţia a II-a, Edit. didactică şi pedagogică Bucureşti, 1980.
5. E. LANDAU et I. LIFSCHITZ, *Theorie de l'elasticité*, Edition Mir, Moscou, 1967.
6. I. PLĂCINŢEANU, *Mecanica vectorială şi analitică*, Ediţia a II-a, Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
7. S. PONOMARIOV ş.a., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. I. Edit. tehnică, Bucureşti, 1960.
8. P.P. TEODORESCU, *Probleme plane în teoria elasticităţii*, vol. I, Edit. Academiei R.S. România, Bucureşti, 1961.
9. E. TOCACI, *Mecanica relativistă. Timpul şi inerţia*, Edit. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1980.
10. V. VLADIMIROV, *Ecuaţiile fizicii-matematice*, Edit. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1980.

SUSPENSII CU PERFORMANȚE ÎMBUNĂTĂȚITE

de T. SIRETEANU

Institutul de fizică și tehnologia materialelor

În lucrare este dat un model matematic și un algoritm de calcul pentru determinarea funcțiilor de transfer și a caracteristicilor statistice ale vibrațiilor aleatoare ale automobilelor echipate cu amortizoare clasice sau secvențiale, cu și fără absorbitori dinamici montați pe masele nesuspendate. Metodele dezvoltate în lucrare sînt aplicate la autoturismele din gama Dacia 1300, obținîndu-se în final o serie de concluzii și recomandări privind proiectarea unor suspensii cu performanțe îmbunătățite.

Rolul principal al suspensiei este de a reduce transmiterea vibrațiilor induse de acțiunea drumului la caroserie, asigurînd astfel confortul pasagerilor și protejarea mărfii transportate. De asemenea, suspensia automobilului trebuie să asigure realizarea contactului permanent dintre roți și suprafața drumului (siguranța în exploatare). Deoarece aderența pneului la sol este proporțională cu sarcina portantă a roții, variațiile forțelor dinamice la roți conduc la micșorarea aderenței și implicit la mărirea pericolului de derapaj. Atît experimental, cît și prin analize numerice pe modele liniare [1] a rezultat că amortizarea optimă pentru confort este mai redusă decît cea care optimizează aderența roată-sol. Din analiza funcțiilor de transfer corespunzînd suspensiilor convenționale (echipate cu arcuri și amortizoare hidraulice clasice), rezultă că transmiterea vibrațiilor de la masa nesuspendată la masa suspendată nu poate fi redusă sub anumite limite, întrucît factorii de amplificare ai acestor suspensii au valori relativ mari în domeniul de frecvențe 0,5 Hz — 5,6 Hz, care este foarte important din punct de vedere al influenței vibrațiilor asupra organismului uman [2]. O reducere suplimentară a transmisibilității vibrațiilor la caroserie se poate obține adoptînd soluții constructive bazate pe principii de funcționare diferite de cele clasice. O astfel de soluție o constituie echiparea suspensiei cu amortizoare secvențiale, ceea ce, așa cum s-a arătat în [3], conduce la o reducere importantă a nivelului de vibrații ale masei suspendate. O altă cale de a reduce transmiterea vibrațiilor la caroserie constă în realizarea unor suspensii active în care disiparea de energie este controlată de un servomecanism electrohidraulic în funcție de răspunsul automobilului, astfel încît factorul de amplificare să fie cît mai redus posibil [4]. În majoritatea cazurilor însă, reducerea transmisibilității vibrațiilor de la masa nesuspendată la masa suspendată are ca efect o amplificare a vibrațiilor masei nesuspendate, cu implicații nefavorabile privind aderența roată-sol. Pentru compensarea acestui efect nedorit se pot monta pe punțile sau semipunțile automobilului absorbitoare dinamice de vibrații, acordate pe frecvențele proprii de oscilație ale maselor nesuspendate.

În cele ce urmează va fi analizat efectul amortizării secvențiale asupra confortului și aderenței roată-sol și comparat cu rezultatele ce se obțin în varianta clasică. Pentru evaluarea factorului de amplificare a vibrațiilor transmise de la punți la caroserie, precum și a caracteristicilor

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 2, 1982, P. 321–330

statistice ale răspunsului automobilului la excitația indusă de denivelările drumului, se va atașa sistemului oscilant cu disipare secvențială, care modelează vibrațiile automobilului, o funcție de transfer aproximativă. Această funcție de transfer caracterizează transmisibilitatea vibrațiilor de la masa nesuspendată la masa suspendată și în funcție de ea se pot exprima toate celelalte funcții de transfer de interes practic.

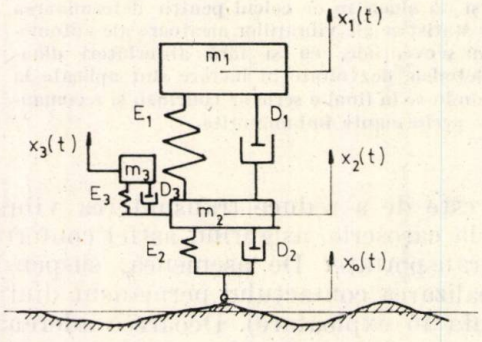


Fig. 1

Pentru elaborarea unui algoritm de calcul unitar aplicabil atît în varianta clasică, cît și în cea cu amortizare secvențială, cu și fără absorbitor dinamic pe masa nesuspendată, considerăm sistemul oscilant cu trei grade de libertate reprezentat în figura 1.

În cazul liniar, caracteristicile elastice și disipative ale sistemului oscilant din figura 1 au expresiile

$$E_1(y_1) = k_1 y_1;\quad E_2(y_2) = k_2 y_2;\quad E_3(y_3) = k_3 y_3,$$

$$D_1(\dot{y}_1) = c_1 \dot{y}_1;\quad D_2(\dot{y}_2) = (0{,}1\, k_2/\nu)\, \dot{y}_2;\quad D_3(\dot{y}_3) = c_3 \dot{y}_3, \tag{1}$$

$$y_1 = x_1 - x_2;\quad y_2 = x_2 - x_0;\quad y_3 = x_3 - x_2.$$

Menționăm că pentru caracteristica disipativă a pneului s-a considerat o expresie corespunzătoare amortizării interne a anvelopei ca funcție de frecvența mișcării oscilatorii [5]. Introducînd notațiile

$$\nu_1 = (k_1/m_1)^{1/2};\qquad \nu_2 = (k_2/m_2)^{1/2};\quad \nu_3 = (k_3/m_3)^{1/2},$$

$$\zeta_1 = c_1/2\,(k_1 m_1)^{1/2};\quad \zeta_2 = 0{,}1\, k_2/2\nu(k_2 m_2)^{1/2} = 0{,}05\, \nu_2/\nu,$$

$$\zeta_3 = c_3/2\,(k_3 m_3)^{1/2};\quad \mu = m_1/m_2,\quad \varepsilon = m_3/m_2, \tag{2}$$

$$\delta = \nu_2/\nu_1;\qquad \gamma = \nu_3/\nu_2;\qquad \xi = \nu/\nu_1,$$

ecuațiile de mișcare ale sistemului oscilant din figura 1 pot fi puse sub forma :

$$\ddot{x}_1 + 2\,\nu_1\zeta_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \nu_1^2(x_1 - x_2) = 0,$$

$$\ddot{x}_2 + 2\,\delta\nu_1\,\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_0) + \delta^2\nu_1^2(x_2 - x_0) -$$

$$- \mu[2\,\nu_1\,\zeta_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \nu_1^2(x_1 - x_2)] -$$

$$- \varepsilon[2\gamma\,\delta\zeta_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \gamma^2\delta^2\nu_1^2(x_3 - x_2)] = 0, \qquad (3)$$

$$\ddot{x}_3 + 2\gamma\,\delta\,\zeta_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \gamma^2\delta^2\nu_1^2(x_3 - x_2) = 0.$$

Înmulțind prima ecuație cu μ, a treia ecuație cu ε, și adunînd relațiile astfel obținute cu cea de a doua ecuație (3), rezultă

$$\mu\,\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \varepsilon\ddot{x}_3 + 2\,\delta\nu_1\,\zeta_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_0) + \delta_1^2\,\nu_1^2(x_2 - x_0) = 0. \qquad (4)$$

Dacă se notează cu $H_{uv}(\xi)$ funcția de transfer corespunzătoare ieșirii u și intrării v a unui sistem liniar sau a unui subsistem al acestuia, pentru $x_0(t) = X_0 \exp(-i\,\xi\,\nu_1 t)$, se poate scrie

$$\begin{aligned}
&x_1(t) = H_{x_1x_2}(\xi)\,x_2(t) = H_{x_1x_2}(\xi)\,H_{x_2x_0}(\xi)\,x_0(t),\\
&\ddot{x}_1(t) = -\nu_1^2\xi^2 H_{x_1x_2}(\xi)\,H_{x_2x_0}(\xi)\,x_0(t),\\
&x_2(t) = H_{x_2x_0}(\xi)\,x_0(t),\\
&\dot{x}_2(t) = i\,\nu_1\xi\,H_{x_2x_0}(\xi)\,x_0(t);\quad \ddot{x}_2(t) = -\nu_1^2\xi^2 H_{x_2x_0}(\xi)\,x_0(t), \qquad (5)\\
&x_3(t) = H_{x_3x_2}(\xi)\,x_2(t) = H_{x_3x_2}(\xi)\,H_{x_2x_0}(\xi)x_0(t),\\
&\ddot{x}_3(t) = -\nu_1^2\xi^2 H_{x_3x_2}(\xi)\,H_{x_2x_0}(\xi)\,x_0(t),\\
&x_2(t) - x_0(t) = [H_{x_2x_0}(\xi) - 1]\,x_0(t),\\
&\dot{x}_2(t) - \dot{x}_0(t) = i\,\nu_1\xi\,[H_{x_2x_0}(\xi) - 1]\,x_0(t).
\end{aligned}$$

Introducînd (5) în (4) și explicitînd relația astfel obținută în raport cu $H_{x_2x_0}(\xi)$, obținem

$$H_{x_2x_0}(\xi) = \frac{\delta^2(1 + 0{,}1\,i)}{-\mu\xi^2 H_{x_1x_2}(\xi) - \varepsilon\xi^2 H_{x_3x_2}(\xi) - \xi^2 + \delta^2(1 + 0{,}1i)}, \qquad (6)$$

expresie în care s-a introdus și valoarea lui ζ_2 dată de (2). Funcția de transfer corespunzătoare deplasării absolute $x_1(t)$ a masei suspendate și excitației $x_0(t)$, rezultă din $(5)_1$, sub forma

$$H_{x_1x_0}(\xi) = H_{x_1x_2}(\xi)\,H_{x_2x_0}(\xi). \qquad (7)$$

Funcțiile de transfer ale deplasării relative $y_1(t)$ și vitezei relative $\dot{y}_1(t)$ sînt date de ultimile două relații (5):

$$H_{y_1x_0}(\xi) = H_{x_2x_0}(\xi) - 1;\quad H_{\dot{y}_1x_0}(\xi) = i\nu_1\xi[H_{x_2x_0}(\xi) - 1]. \qquad (8)$$

Pentru determinarea funcției de transfer a forței dinamice $F(t)$ care acționează asupra masei nesuspendate, utilizăm formula

$$F(t) = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{x}_3 = m_2(\mu\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \varepsilon\,\ddot{x}_3). \tag{9}$$

Ținînd seama de (5), din (9) rezultă

$$H_{Fx_0}(\xi) = -\,m_2\nu_1^2\xi^2[\mu\,H_{x_1x_2}(\xi) + \varepsilon\,H_{x_3x_2}(\xi)]\,H_{x_2x_0}(\xi). \tag{10}$$

Relațiile (6) — (8) și (10) permit exprimarea tuturor funcțiilor de transfer care ne interesează pentru analiza comportării dinamice a sistemului oscilant considerat, în raport cu funcțiile de transfer $H_{x_1x_2}(\xi)$ și $H_{x_3x_2}(\xi)$ corespunzătoare unor sisteme oscilante cu un singur grad de libertate. Funcția de transfer $H_{x_1x_2}(\xi)$ caracterizează transmisibilitatea vibrațiilor de la masa nesuspendată la masa suspendată și este esențială pentru aprecierea calității suspensiei. De fapt, aceasta este funcția de transfer, asupra căreia acționează atunci cînd se mărește îmbunătățirea confortului în oricare din variantele constructive menționate: clasică, secvențială sau activă. Așa cum rezultă mai departe, atît în cazul amortizării clasice, cît și în cazul amortizării secvențiale, funcția de transfer atașată suspensiei este dată de aceeași expresie analitică, definită de relațiile

$$H_{x_1x_2}(\xi) = P_1(\xi) + \mathrm{i}\,Q_1(\xi),$$

$$P_1(\xi) = 1 - A_1(\xi)\xi^2/B_1(\xi), \quad Q_1(\xi) = -\,2D_1\zeta_1\xi^3/B_1(\xi), \tag{11}$$

$$A_1(\xi) = \xi^2 + 2C_1\zeta_1\xi - 1, \quad B_1(\xi) = A_1^2(\xi) + 4\,D_1\,\zeta_1^2\xi^2.$$

În cazul amortizării clasice (liniară sau neliniară), $C_1 = 0$ și $D_1 = 1$, iar ζ_1 reprezintă coeficientul de amortizare relativă (liniară sau liniar echivalentă). În cazul amortizării secvențiale, valorile parametrilor C_1 și D_1 depind de forma caracteristicii disipative, iar ζ_1 este un coeficient care definește această caracteristică [3]. Expresia analitică a celeilalte funcții de transfer, în raport cu care se exprimă toate funcțiile de transfer menționate mai sus, este dată de relațiile

$$H_{x_3x_2}(\xi) = P_3(\xi) + \mathrm{i}\,Q_3(\xi),$$

$$P_3(\xi) = 1 - A_3(\xi)\,\gamma^2\xi^2 / B_3(\xi)\,\delta^2 \quad Q_3(\xi) = -\,2\,\zeta_3\,\gamma^3\xi^3/B_3(\xi)\delta^3, \tag{12}$$

$$A_3(\xi) = \gamma^2\,\xi^2/\delta^2 - 1, \quad B_3(\xi) = A_3^2(\xi) + 4\,\zeta_3^2\gamma^2\xi^2/\delta^2.$$

Atît pentru aprecierea modului în care se transmit vibrațiile induse de denivelările drumului la masa suspendată și masa nesuspendată, cît și pentru evaluarea caracteristicilor statistice ale răspunsului, este nece-

sară determinarea factorilor de amplificare ai sistemului, definiți ca modulul funcțiilor de transfer respective. Pe baza relațiilor (6) — (8), (10) — (12) se obțin următoarele expresii pentru factorii de amplificare ce prezintă interes practic în dinamica automobilelor :

$$|H_{x_1x_2}(\xi)| = [P_1^2(\xi) + Q_1^2(\xi)]^{1/2},$$

$$|H_{x_2x_0}(\xi)| = \left\{ \frac{1{,}01}{[1 - R(\xi)\,\xi^2/\delta^2]^2 + [0{,}1 - S(\xi)\,\xi^2/\delta^2]^2} \right\}^{1/2},$$

$$|H_{x_1x_0}(\xi)| = |H_{x_1x_2}(\xi)|\,|H_{x_2x_0}(\xi)|,$$

$$|H_{y_1x_0}(\xi)| = \xi^2\,|H_{x_2x_0}(\xi)|/B_1^{1/2}(\xi), \tag{13}$$

$$|H_{\dot{y}_1x_0}(\xi)| = \nu_1\xi\,|H_{y_1x_0}(\xi)|,$$

$$|H_{Fx_0}(\xi)| = m_2\nu_1^2\,|H_{x_2x_0}(\xi)|\,[R^2(\xi) + S^2(\xi)]^{1/2},$$

unde $P_1(\xi)$, $Q_1(\xi)$, $P_3(\xi)$ și $Q_3(\xi)$ sînt date de relațiile (11) și (12), iar $R(\xi)$ și $S(\xi)$ au forma

$$R(\xi) = \mu\,P_1(\xi) + \varepsilon\,P_3(\xi) + 1, \tag{14}$$

$$S(\xi) = \mu Q_1(\xi) + \varepsilon Q_3(\xi).$$

Relațiile (13) împreună cu (11), (12) și (14) definesc un algoritm de calcul compact pentru determinarea tuturor factorilor de amplificare necesari în analiza vibrațiilor automobilelor. Se observă că pentru $\varepsilon = 0$ se obține cazul suspensiei fără absorbitor dinamic. Valorile optime ale constantelor de rigiditate k_3 și de amortizare c_3 pentru absorbitorul dinamic pot fi determinate într-o primă aproximație din relațiile [6]

$$k_3 = \varepsilon\,k_2/(1 + \varepsilon)^2, \quad c_3 = \varepsilon\,[3\varepsilon\,k_2m_2/2\,(1 + \varepsilon)^3]^{1/2}, \tag{15}$$

putînd fi apoi îmbunătățite pe baza analizei vibrațiilor aleatoare ale automobilului. Ținînd seama de (12), din (15) rezultă valorile optime ale parametrilor γ și ζ_3 sub forma

$$\gamma = 1 + \varepsilon, \quad \zeta_3 = 0{,}5\,\gamma[1{,}5\,\varepsilon/(1 + \varepsilon)^3]^{1/2}. \tag{16}$$

Pentru realizarea unor amortizoare cu funcționare secvențială, J. M. Federspiel [7] propune două soluții constructive bazate pe utilizarea unor amortizoare hidraulice monotubulare cu pernă de gaz sub presiune. În ambele variante, funcționarea secvențială are loc numai pentru mișcările oscilatorii ce se efectuează în jurul poziției de echilibru

static a automobilului. Funcționarea secvențială în jurul unei poziții fixe ($y = 0$) prezintă două inconveniente importante, și anume :

— poziția de echilibru static se modifică cu încărcarea automobilului și, prin urmare, această variantă constructivă nu poate fi utilizată eficient decît pentru automobile a căror gardă la sol poate fi reglată în funcție de încărcare (suspensiile hidropneumatice) ;

— în timpul mersului se mofifică poziția medie în jurul căreia se efectuează vibrațiile automobilului, astfel încît amortizoarele pot ajunge în situația de a lucra unilateral (dezvoltînd forțe numai la cursa de destindere), ceea ce micșorează eficiența lor în reducerea nivelului de vibrații.

Pentru a elimina aceste inconveniente s-a elaborat o variantă constructivă (pe baza căreia s-a realizat la I.F.T.M. un model funcțional), care permite obținerea unor caracteristici de amortizare secvențială independente de poziția în jurul căreia se efectuează mișcarea oscilatorie [3]. Pornind de la amortizoarele ALC9, care echipează suspensia autoturismului Dacia 1300, această soluție constructivă nu necesită modificări importante în actuala suspensie.

Caracteristicile disipative secvențiale ce se obțin cu soluția constructivă descrisă în lucrarea [3] pot fi modelate prin expresii analitice de forma

$$D_1(\dot{y}_1) = \begin{cases} c_1 \dot{y}_1 [1 - \varphi(\dot{y}_1)], & \dot{y}_1 \ddot{y}_1 \geqslant 0, \\ 0, & \dot{y}_1 \ddot{y}_1 \leqslant 0, \end{cases} \tag{17}$$

unde

$$\varphi(\dot{y}_1) = |\dot{y}_1|^{\alpha}/(\nu Y_1)^{\alpha} \tag{18}$$

dacă

$$y_1(t) = Y_1 \cos \nu t.$$

În acest caz, constantele D_1 și C_1 care intervin în relațiile (11) au expresiile [3] :

$$D_1 = 0{,}5\,[1 - (2k+1)!!/2^k(k+1)!], \quad C_1 = k/(k+1)\pi, \tag{19}$$

pentru $\alpha = 2k$, $k = 1,2,\ldots,$

$$D_1 = 0{,}5\,[1 - 2^{k+2}\,k!/(2k+1)!!\,\pi], \; C_1 = (2k-1)/(2k+1)\pi, \tag{20}$$

pentru $\alpha = 2k - 1, k = 1,2,\ldots,$

$$D_1 = 0{,}5\left[1 - 4\,k\,(k+1)\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2\,k}\right)/\sqrt{\pi}\,(2\,k+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2k}\right)\right],$$

$$C_1 = 1/(2k+1)\pi, \tag{21}$$

pentru $\alpha = 1/k$, $k = 1,2,\ldots$

Pentru a analiza efectul pe care îl are introducerea absorbitorului dinamic și a amortizoarelor secvențiale asupra confortului și aderenței

roată-sol, precum și asupra solicitărilor dinamice ale suspensiei, modelăm vibrațiile aleatoare ale părții din față a autoturismului Dacia 1300 printr-un sistem oscilant de tipul celui reprezentat în figura 1, supus la excitații aleatoare cu densitate spectrală de forma

$$G_{x_0}(\xi) = 57{,}7 \cdot 10^{-6} \frac{\xi^2 + 2{,}145}{\xi^4 - 2{,}572\,\xi + 4{,}596}, \tag{22}$$

corespunzînd parcurgerii unui drum asfaltat cu viteza de 70 km/h [1]. În (22), $G_{x_0}(\xi)$ se exprimă în $m^2 \cdot s$. Parametrii care caracterizează sistemul oscilant al părții din față a autoturismului Dacia 1300 au valorile [1]:

$$m_1 = 265 \text{ kg}; \quad m_2 = 31{,}5 \text{ Kg},$$

$$k_1 = 1137 \text{ daN/m}; \quad k_2 = 16\,700 \text{ daN/m}. \tag{23}$$

Introducînd (23) în (2), obținem

$$\nu_1 = 6{,}55 \text{ rad/s}; \quad \nu_2 = 72{,}8 \text{ rad/s}, \tag{24}$$

$$\mu = 8{,}41 \quad , \quad \delta = 11{,}1.$$

Pentru absorbitorul dinamic considerăm o masă reprezentînd 10 % din masa părții nesuspendate ce revine unei roți față:

$$m_3 = 3{,}15 \text{ Kg}, \quad \varepsilon = 0{,}1. \tag{25}$$

Parametrii în raport cu care urmărim optimizarea confortului și aderenței roată-sol sînt coeficientul de amortizare al suspensiei ζ_1 și raportul γ dintre pulsațiile ν_3 și ν_2, corespunzătoare absorbitorului dinamic și masei nesuspendate a automobilului. Pentru analiza numerică pe calculator s-au ales valorile

$$\zeta_1 = 0{,}1 - 0{,}5 \text{ cu pas } 0{,}05$$

în cazul amortizării liniare ($D_1 = 1, \quad C_1 = 0$);

$$\zeta_1 = 1{,}0 - 2{,}2 \text{ cu pas } 0{,}2$$

în cazul amortizării secvențiale ($\alpha = 2$, $D_1 = 0{,}125$; $C_1 = 0{,}159$);

$$\gamma = 0{,}9 - 1{,}5 \text{ cu pas } 0{,}2$$

în ambele cazuri. Pentru fiecare valoare a lui γ, coeficientul de amortizare relativă ζ_3 al absorbitorului dinamic se determină din relația $(16)_2$.

Valoarea $\varepsilon = 0$ corespunde suspensiei fără absorbitor dinamic, iar $\varepsilon = 0{,}1$ celei cu absorbitor dinamic.

Utilizînd relaţiile [1]:

$$\sigma_u^2(\zeta_1, \gamma) = \nu_1 \int_{0,5}^{30} |H_{ux_0}(\xi)|^2 G_{x_0}(\xi)\, d\xi, \qquad (26)$$

$$\sigma_{u(n)}^2(\zeta_1, \gamma) = \nu_1^{2n+1} \int_{0,5}^{30} \xi^{2n} |H_{ux_0}(\xi)|^2 G_{x_0}(\xi)\, d\xi,$$

în care prin u s-a notat generic oricare din mărimile x_1, x_2, y_1, F, s-au calculat dispersiile acceleraţiilor absolute ale masei suspendate şi masei nesuspendate, deplasării şi vitezei mişcării relative dintre cele două mase, precum şi dispersia forţei dinamice care acţionează asupra masei nesuspendate.

Considerînd ca parametru de confort abaterea standard $\sigma_{\ddot{x}_1}$ a acceleraţiei absolute a caroseriei şi ca parametru de aderenţă roată-sol abaterea standard σ_F a forţei dinamice la roată, s-a folosit funcţia de optimizare [1], [2]:

$$\mathcal{F}(\zeta_1, \gamma) = \alpha\, \sigma_{\ddot{x}_1}(\zeta_1, \alpha)/\sigma_{\ddot{x}_1 min} + (1 - \alpha)\sigma_F(\zeta_1, \alpha)/\sigma_{F min}, \qquad (27)$$

pentru $\alpha = 0{,}5$, ceea ce corespunde acordării unei ponderi egale confortului şi aderenţei roată-sol.

Analiza numerică a variaţiei funcţiilor $\sigma_{\ddot{x}_1}(\zeta_1, \gamma)$ şi $\sigma_F(\zeta_1, \gamma)$ în raport cu γ a arătat că valoarea $\gamma = 1{,}1$ este optimă, atît din punct de vedere al confortului, cît şi al aderenţei, pentru orice ζ_1. Menţionăm că în cazul de faţă valoarea optimă a raportului γ coincide cu cea dată de relaţia $(16)_1$, stabilită în cadrul teoriei vibraţiilor deterministe.

În tabelul 1 sînt prezentate valorile optime ale coeficientului de amortizare ζ_1 şi abaterile standard ale mărimilor de interes practic pentru caracterizarea vibraţiilor automobilelor, provocate de denivelările drumurilor, corespunzînd situaţiilor în care funcţia de optimizare (27) şi-a atins valorile minime.

Tabelul 1

	Amortizare liniară		Amortizare secvenţială	
	Fără absorbitor ($\varepsilon = 0$)	Cu absorbitor ($\varepsilon = 0{,}1$; $\gamma = 1{,}1$)	Fără absorbitor ($\varepsilon = 0$)	Cu absorbitor ($\varepsilon = 0{,}1$; $\gamma = 1{,}1$)
ζ_1 optim	0,20	0,20	1	1
$\sigma_{\ddot{x}_1}$ [g]	0,121	0,115	0,098	0,087
$\sigma_{\ddot{x}_2}$ [g]	2,34	2,05	2,68	2,22
σ_{y_1} [cm]	1,79	1,79	1,83	1,81
$\sigma_{\dot{y}_1}$ [ms^{-1}]	0,360	0,328	0,420	0,363
σ_F [daN]	76	71	101	90

CONCLUZII

Pe baza rezultatelor din tabelul 1 se pot trage următoarele concluzii:

1. Introducerea amortizoarelor secvențiale conduce la o îmbunătățire substanțială a confortului, abaterile standard ale accelerațiilor caroseriei reducîndu-se cu 17% — 28 % în raport cu cele obținute cu amortizoarele clasice. Aceste procente, care variază în funcție de introducerea sau nu a absorbitorului dinamic, sînt destul de importante, întrucît s-a constatat experimental că variații chiar mici ale lui $\sigma_{\ddot{z}1}$ pot indica îmbunătățirea sau înrăutățirea senzațiilor subiective de confort [8].

2. Introducerea absorbitorului dinamic are o influență mai mare, atît pentru îmbunătățirea confortului, cît și a aderenței roată-sol, în cazul suspensiei echipate cu amortizoare secvențiale decît în cazul celei echipate cu amortizoare clasice. Aceeași constatare este valabilă în ceea ce privește reducerea accelerațiilor masei nesuspendate și a vitezelor relative dintre masa suspendată și masa nesuspendată.

3. Introducerea amortizoarelor secvențiale sau a absorbitorului dinamic nu influențează deplasările relative dintre masa suspendată și masa nesuspendată, ele fiind practic aceleași cu cele obținute în varianta clasică fără absorbitor dinamic.

4. În cazul echipării suspensiei cu amortizoare secvențiale este necesară introducerea absorbitorului dinamic pentru aducerea accelerațiilor masei nesuspendate și a vitezelor relative dintre masa suspendată și masa nesuspendată la nivelul celor existente în varianta clasică (fără absorbitor dinamic).

5. Introducerea amortizoarelor secvențiale are ca efect o creștere a forțelor dinamice care acționează asupra masei suspendate în raport cu soluția clasică, chiar dacă se utilizează absorbitorul dinamic. Creșterea cu 18% a abaterii standard a forței dinamice va avea o influență negativă asupra aderenței roată-sol, aprecierea subiectivă a acestei influențe nefiind însă la fel de clar pusă în evidență pe cale experimentală ca în cazul confortului.

Pe baza analizei efectuate pot fi făcute următoarele precizări privind proiectarea unei suspensii echipate cu amortizoare secvențiale și cu absorbitor dinamic pentru autovehiculele din gama Dacia 1300:

a. Este recomandabil ca echiparea suspensiei cu amortizoare secvențiale să fie făcută în special pentru autovehiculele la care reducerea vibrațiilor transmise la caroserie este deosebit de importantă, cum ar fi, de exemplu, mașini de salvare sau autolaboratoare cu aparatură sensibilă la vibrații.

b. Introducerea amortizoarelor secvențiale nu necesită modificări ale cursei suspensiei întrucît deplasările relative dintre punctele de prindere ale amortizoarelor și elementelor elastice sînt practic egale cu cele corespunzătoare suspensiei actuale (vezi concluzia 3).

c. Regimul vitezelor de lucru al amortizoarelor secvențiale într-o suspensie cu absorbitor dinamic este practic același cu cel existent în suspensia actuală (vezi concluzia 4).

d. Parametrii m_3, k_3 și c_3, care definesc sistemul oscilant al absorbitorului dinamic, se determină din relațiile (vezi (16) și (25)).

$$m_3 = 0{,}1 m_2,\ k_3 = 0{,}083\ k_2,\ c_3 = 0{,}034\ (k_2\ m_2)^{1/2}, \tag{28}$$

unde m_3 este masa părții nesuspendate a automobilului, ce revine unei roți, iar k_3 este rigiditatea pneului. Pentru valorile (23) obținem

$$m_3 = 3{,}15\ \text{Kg},\ k_3 = 1386\ \text{daN/m},\ c_3 = 7{,}8\ \text{daN} \cdot \text{s/m} \cdot \tag{29}$$

Se observă că forțele de amortizare necesare în absorbitorul dinamic sînt foarte mici, ele putînd fi realizate prin introducerea sistemului oscilant masă-arc într-un cilindru etanș, umplut cu ulei de amortizor.

e. Valoarea optimă a constantei c_1, care precizează caracteristica de amortizare secvențială definită de relațiile (17) și (18), se determină din relația

$$c_{1optim} = 2\ (k_1\ m_1)^{1/2}\ /r, \tag{30}$$

unde m_1 este masa părții suspendate a automobilului, ce se repartizează pe o roată, k_1 este rigiditatea arcului suspensiei, iar r este raportul de de multiplicare a forțelor de amortizare de la punctul de prindere inferioară a amortizorului la centrul roții. Pentru suspensia față a autoturismului Dacia 1300, $r = 0{,}39$ și utilizînd valorile (23), se obține

$$c_{1optim} = 890\ \text{daNs/m}. \tag{31}$$

Întrucît s-a considerat $\alpha = 2$, din relațiile (17) și (18) rezultă forțele maxime dezvoltate de amortizoarele secvențiale și vitezele de lucru la care se ating aceste forțe, sub forma

$$D_{1max} = 343\ \dot{y}_{1max},\ \dot{y}_{1m} = 0{,}58\ \dot{y}_{1max}, \tag{32}$$

unde $\dot{y}_{1max}$ este viteza relativă maximă atinsă în cursul mișcării oscilatorii. În (32), $\dot{y}_{1max}$ se exprimă în m/s, iar D_{1max} se obține în daN. Pentru $\dot{y}_{1max} = 1$ m/s rezultă $D_{1max} = 343$ daN, această valoare fiind comparabilă cu nivelul forțelor dezvoltate la 1 m/s de amortizoarele 035, recent omologate pentru autovehiculele din gama Dacia 1300.

Primită la redacție la 14 septembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. T. SIRETEANU, O. GUNDISCH, S. PARAIAN, *Vibrațiile aleatoare ale automobilelor*, Edit. tehnică, București, 1981.
2. T. DAHLBERG, *Ride comfort and road holding of a 2 DOF vehicle travelling on a randomly profiled road*, Journal of sound and vibration, **58**, 2(1978).
3. T. SIRETEANU, O. GUNDISCH, *Suspensii echipate cu amortizoare secvențiale*, St. cerc. mec.apl., **30**, 3 (1981).
4. A. G. THOMPSON, *Design of active suspensions*, Proc. Instn. Mech. Engrs., **185**, 36 (1971).
5. M. MITSCHE, *Dynamik der Kraftfahrzenge*, Springer Verlag, Berlin, 1972.
6. J. P. DEN HARTOG, *Vibrations mécanique*, Dunod, Paris, 1960.
7. J. M. FEDERSPIEL, *Quelques aspects moderns des problems de dynamique automobile*, Ingineurs de l'automobile 5 (1976).
8. T. SIRETEANU s.a., *Influența reglajului caracteristicii de amortizare la viteze mici de lucru asupra confortului și aderenței roată-sol*, St. cerc. mec. apl., **38**, 3 (1979).

PROCEDEU DE RECTIFICARE A ALEZAJELOR

de I. SPULBER

Institutul politehnic București

C. SPULBER

Întreprinderea Optica Română, București

În lucrare se prezintă un nou procedeu de rectificare interioară a pieselor lungi cu ajutorul discului abraziv, prin folosirea căruia cresc foarte mult posibilitățile de prelucrare și obținere a unor suprafețe de calitate superioară. În cadrul acestui procedeu se caută să se stabilească factorii principali care favorizează procesul tehnologic de prelucrare punîndu-se în evidență unele metode simple și eficiente.

În continuare se propune o soluție de optimizare a parametrilor hidrodinamici, ținîndu-se seama de posibilitățile de producere a aerului industrial în întreprinderi, urmărindu-se totodată și o eficiență economică.

1. DESCRIERE

Cu ajutorul procedeului propus se poate realiza rectificarea cilindrică interioară a pieselor de lungime mare în raport cu diametrul lor, eliminîndu-se astfel dezavantajele de bază ale rectificărilor cilindrice interioare practicate pînă în prezent care nu pot asigura prelucrarea pieselor de lungimi mai mari decît de maximum patru ori diametrul lor.

Procedeul de rectificare prezentat se bazează pe principiul turbine axiale, noutatea constă în faptul că pe această turbină se află montată o sculă mobilă.

În figura 1, propunem o schemă de principiu a instalației de prelucrare a alezajelor.

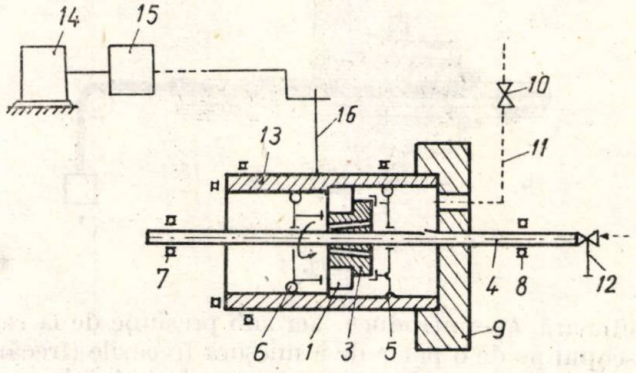


Fig. 1

Introducerea aerului la presiune înaltă în paletele turbinei, care are o construcție specială, face ca turbina și scula, care sînt montate solidar pe același ax, să capete o mișcare de rotație în jurul axei sale precum și o mișcare de avans longitudinală. Aceste mișcări pot fi reglate după necesități cu ajutorul unuor dispozitive speciale care sînt foarte simple din punct de vedere constructiv. În felul acesta se elimină unul din marele

neajunsuri pe care îl au actualele metode de rectificare cilindrică interioară și anume fenomenul de flexare a axului sculei care se datorește forțelor de așchiere și care generează imprecizii în procesul de prelucrare la alezajele cu lungimi medii și mari, lucru care a impus pînă în prezent limitarea prelucrării alezajelor de lungimi medii și mari.

Metoda de rectificare propusă înlătură dezavantajele de mai sus, în primul rînd că procesul tehnologic de prelucrare, deși este foarte simplu, aduce unele îmbunătățiri a suprafețelor prelucrate.

Realizarea prelucrării alezajelor prin așchiere (rectificare) se obține prin rotirea discului abraziv *1* care este solidar cu rotorul turbinei *3* prin intermediul piuliței *2*. Acest ansamblu execută atît mișcarea de rotație, cît și pe acea de translație pe piesa tubulară *4* prevăzută cu orificii radiale.

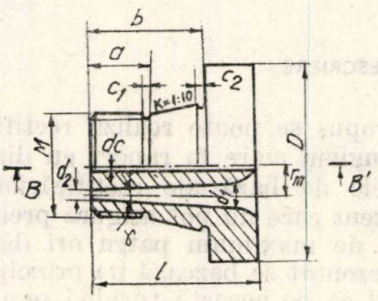


Fig. 2

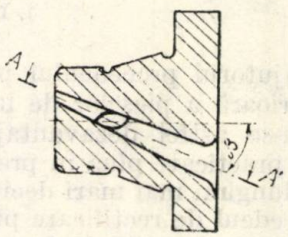


Fig. 3

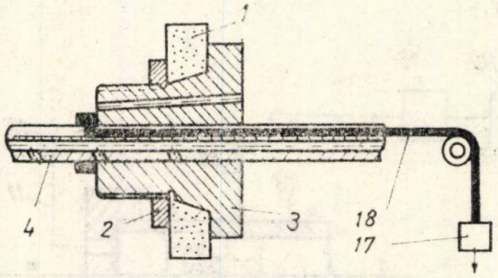


Fig. 4

Prin piesa tubulară *4* se introduce aer sub presiune de la rețea prin robinetul 12 cu scopul pe de o parte de a micșora frecările (frecările se elimină aproape complet) dintre turbina în mișcare și ghidajul ei, iar pe de altă parte perna de aer mai are rolul de a contracara momentul creat de forțele axiale și forța rezistentă opusă de piesă în procesul de așchiere. Ansamblu de forțe participante la procesul de așchiere constituie momente care tînd să blocheze turbina pe ghidajul ei, acest fenomen este înlăturat prin practicarea unor orificii în ghidajul *4* prin care pătrunde aer.

Capsula de etanșare *9* închide capătul rectificat al alezajului *13* (capătul alezajului se rectifică pe un strung sau o mașină de rectificat clasică). Piesa tubulară de rectificat este la rîndul ei antrenantă într-o

mișcare lentă de rotație de motorul electric *14* prin intermediul unui reductor *15* și al unui dispozitiv de prindere *16*.

Reglarea vitezei de avans a pietrei abrazive *1* se face cu o contra greutate reglabilă *17* prin intermediul firului *18*.

Prin introducerea aerului comprimat la o presiune dinainte stabilită în amonte de piatra abrazivă *1*, la trecerea aerului prin orificiile speciale (ajutaje) practicate în rotorul turbinei *3*, se crează un lucru mecanic de destindere care este înglobat în masa subansamblului piatră abrazivă *1* și rotor — turbină *3*. O parte din acest lucru mecanic este transformat în lucru mecanic de rotație care realizează forța de așchiere necesară rectificării, precum și o turație adecvată necesară realizării preciziei suprafeței de rectificat.

Subansamblu sculă *1*, rotor-turbină *3* este sprijinit solidar pe niște reazime mobile elastice *5* și *6*, iar întreaga instalație se sprijină prin piesa tubulară *4* pe lagărele *7* și *8*. Aerul comprimat de la rețea este condus prin capsula de etanșare *9* la o presiune reglată cu ajutorul robinetului *10* și controlată cu ajutorul unui manometru instalat pe conducta *11*.

În figura 2. am prezentat o secțiune parțială prin discul autorotativ. Iar în figura 3 prezentăm o secțiune axială prin sistemul autorotativ. Figura 4 reprezintă o secțiune axială prin subansamblu de reglare a avansului longitudinal.

2. CALCULUL PARAMETRILOR DE FUNCȚIONARE AI TURBINEI

În general în construcția de turbine, ajutajele au lungime mică, de aceea putem considera că viteza în ajutaj este foarte mare, iar aerul nu are timp să facă schimb de căldură cu mediul înconjurător prin pereții ajutajului. În consecință, în ajutaj are loc o destindere adiabatică și deci vom considera că exponentul politropic $n = k$, unde k reprezintă exponentul adiabatic, și $k = 1{,}4$ pentru aer.

Pentru alegerea presiunii la intrare în ajutaj, p_1, și p_2, presiunea la ieșire din ajutaj, vom ține seama de următoarele considerente :

a) Se știe că în jurul numărului Mach $= 1$, procesele aerodinamice sînt foarte complexe și au o mare instabilitate. În lucrarea [9] se recomandă ocolirea valorilor $M_{a\infty}=0{,}8\ldots1$ pentru a evita vibrațiile și undele de șoc în instalații.

b) Vom admite în general că mașinile unelte care funcționează cu aer, capacitatea lor scade cu pătratul presiunii [10] și pentru aceste considerente uneltele pneumatice sînt construite pentru 7 at. realizînd la această presiune puterea lor optimă. Totodată se menționează că dacă la o mașină pneumatică care lucrează la o presiune de 7 at, dacă această presiune scade la 5 at, puterea transmisă de mașină scade cu 50 %.

Din cele relatate mai sus rezultă că pentru a avea o putere N cît mai mare la arborele motor este indicat să se lucreze cu o diferență de presiune cît mai mare, iar presiunea din amonte să fie cît mai mare posibil. Totodată se indică să se evite zona vibrațiilor, aceasta făcîndu-se prin ocolirea vitezei critice, ceea ce impune ca să se lucreze numai cu viteze subsonice.

Puterea teoretică transmisă la arborele motor care funcționează după un ciclu cu extensie se calculează cu relația

$$N = GRT_1 \frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right], \tag{1}$$

în care G este debitul de aer al instalației, R — constanta specifică a gazelor perfecte, p_1 și T_1 sînt presiunea, respectiv temperatura aerului la intrare în ajutaj, p_2 este presiunea aerului la ieșirea din ajutaj, iar n — exponentul politropic.

Pentru ocolirea zonei vibrațiilor critice, trebuie să se evite mai întîi viteza critică [1], care este dată de relația

$$w = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\gamma_1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}, \tag{2}$$

și apoi presiunea critică dată de relația

$$p_{cr} = p_1 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}, \tag{3}$$

unde γ_1 din (2) reprezintă greutatea specifică a aerului.

Viteza la care încep să apară vibrațiile în conformitate cu indicațiile date în [8] se situează în jurul valorii de 300 m/s. Pentru evitarea vitezelor de instabilitate aerodinamică (300 m/s) se recomandă pentru lucru perechile de presiuni 4/6 și 4,5/6.

În vederea evitării vitezei critice cu ajutorul relației (2) vom efectua unele calcule al căror rezultate le prezentăm în tabela 1. Alegerea presiunilor de lucru se va face în funcție de posibilitățile de producerea și de distribuirea aerului comprimat în întreprinderi.

Din calculele efectuate rezultă că presiunile indicate pentru lucru sînt $p_1 = 6$ at și $p_2 = 4$ at. La dimensionarea turbinei (ajutajului) se va ține seama de acești parametri.

Tabela 1

p_2/p_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4,5}{6}$
$w\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	590	745	440	700	348	840	540	327	262

Din calcule rezultă că $p_2 > p_{cr}$, iar $W < W_{cr}$, ceea ce impune constructorului alegerea unui ajutaj convergent [8].

Deoarece ajutajul va fi construit în așa fel încît să realizeze o cădere de presiune de la p_1 la p_2, regimul de lucru va fi ales corespunzător

acestei cerințe. Presiunile de intrare și de ieșire din ajutaj, reale, respectiv p_{1r} și p_{2r} fiind date de relațiile

$$p_{1r} = p_1 + \Delta p', \tag{4}$$

$$p_{2r} = p_2 - \Delta p'', \tag{5}$$

unde $\Delta p'$ și $\Delta p''$ reprezintă pierderile de presiune la intrare în ajutaj și respectiv la ieșire din ajutaj.

Debitul masic de aer din relația (1) se calculează cu bine cunoscuta formulă [1]:

$$G = \mu f \sqrt{\frac{2k}{k-1} \rho_1 p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \tag{6}$$

în care μ este coeficientul de scurgere al aerului, iar f reprezintă aria secțiunii minime a ajutajului corespunzătoare diametrului d_e.

Consumul orar de aer poate fi determinat din [1] cu relația

$$Q_t = 15{,}83 \; V_t \, n \frac{p_1}{T_1}, \tag{7}$$

unde

$$V_t = Z \frac{G}{\rho_N}, \tag{8}$$

în care Z reprezintă numărul de ajutaje al turbinei *3*, iar ρ_N este densitatea aerului în condiții normale de presiune și temperatură.

Prin destinderea aerului în ajutaj se obține teoretic un lucru mecanic de forma

$$l_t = \int_{p_2}^{p_1} v \, dp. \tag{9}$$

Puterea corespunzătoare acestui lucru mecanic este dată de relația

$$P_t = Z \frac{n}{n-1} \Delta p \; V_t \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right], \tag{10}$$

V_t fiind debitul volumic, corespunzător debitului masic din relația (8).

Avînd în vedere că în ajutaj apar unele pierderi datorită în primul rînd frecărilor și în afară de aceasta, curgerea aerului este turbulentă, ca urmare, viteza absolută de ieșire a aerului din ajutaj este mai mică decît cea teoretică [3] și ea se calculează cu relația

$$w_r = \varphi w, \tag{11}$$

φ fiind un coeficient de mișcare, care, în general, pentru ajutaje convergente, se alege $\varphi = 0{,}96 \ldots 0{,}98$, [3].

Pentru a calcula puterea reală la arborele motor , N_r , trebuie să ținem seama de faptul că lucru mecanic teoretic produs prin destinderea aerului în turbină, care se înglobează în masa discului *1*, o parte din acest lucru mecanic contribuie la rotirea sistemului (turbină — disc abraziv), iar o altă parte tinde să deplaseze sistemul axial,

$$N_r = \eta_m \eta_1 NZ, \tag{12}$$

unde η_m reprezintă randamentul mecanic, în general $\eta_m = 0{,}9$, iar η_1 este coeficientul de transformare al lucrului mecanic produs prin destinderea aerului în lucru mecanic de rotație,

$$\eta_1 = \sin \beta. \tag{13}$$

Puterea reală care contribuie efectiv la procesul de așchiere propriu-zis este

$$P_r = \eta_1 P_t \tag{14}$$

$$\eta_1 = \sin (90^\circ - \beta). \tag{15}$$

Pentru a determina puterile teoretice corespunzătoare lucrului mecanic de așchiere am efectuat o serie de calcule cu formula (10), pentru șase perechi de presiuni, iar pentru ușurința calculelor am considerat că turbina (indiferent de puterea ei) are același număr Z de ajutaje, $Z = 6$. De asemenea, am avut în vedere faptul că destinderea aerului este adiabatică, iar coeficientul politropic $n = k = 1{,}4$. Rezultatele calculelor sînt puse în evidență în tabela 2.

Tabela 2

$\frac{p_2}{p_1}$	d[mm] / P_t[Kw]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\frac{4,5}{6}$	P_{t_1}	0,05	0,2	0,2	0,2	0,44	0,44	0,78	0,78	1,78	3,16
$\frac{4}{6}$	P_{t_2}	0,11	0,45	0,45	0,45	1,01	1,01	1,8	1,8	4,06	7,22
$\frac{3}{6}$	P_{t_3}	0,4	1,83	1,83	1,83	4,12	4,12	7,3	7,3	16,5	29
$\frac{3}{5}$	P_{t_4}	0,14	0,56	0,56	0,56	1,26	1,26	2,25	2,25	5,08	9
$\frac{2}{5}$	P_{t_5}	0,73	2,92	2,92	2,92	6,4	6,4	11,8	11,8	26,5	47
$\frac{2}{4}$	P_{t_6}	0,24	0,96	0,96	0,96	2,16	2,16	3,86	3,86	8,7	15,4

Dacă ținem seama de valorile indicate în literatura de specialitate care se regăsesc utilizate în producție putem calcula puterea reală necesară așchierii cu ajutorul relației (14), unde am ținut seama și de relația (15). Rezultatele calculelor au fost estimate în tabela 3. Menționăm că la efectuarea calculelor am luat în considerare numai raportul presiunilor cele mai favorabile.

Tabela 3

$\frac{P_2}{P_1}$	$N_{nec.\ as}$ [KW]	0,12	0,21	0,43	0,65	0,9	0,99	1,41	1,64	2,11	2,41
	Z	10	10	12	10	8	9	8	8	6	6
	$\beta°$	45	45	60	45	45	45	45	45	60	60
$\frac{4,5}{6}$	P_r [KW]	0,04	0,14	0,2	0,25	0,45	0,4	0,7	0,7	0,89	1,58
$\frac{4}{6}$	P_r [KW]	0,13	0,32	0,46	0,65	0,9	1,01	1,68	1,68	2,03	3,61

($M_a < 0,9$, $N_{nec.\ as} < P_r$)

3. CALCULUL PIERDERILOR DE PRESIUNE. DETERMINAREA REGIMULUI DE FUNCȚIONARE

a) Pierderile în ajutaj apar datorită frecărilor dintre particulele de aer și pereții ajutajului, precum și din cauza frecărilor reciproce dintre particule. Viteza absolută a aerului la ieșirea din ajutaj este turbionară și este mai mică decît cea teoretică [3], ($W_r = \varphi W$; $\varphi = 0,95 \ldots 0,96$).

Pierderile corespunzătoare coeficientului φ în ajutaj reprezintă 10...8 % și sînt proporționale cu căderea de presiune disponibilă [4].

$$\Delta p_{aj} = 10\ \%\ \Delta p = 0,10.2 = 0,2\ \text{at.}$$

b) Pierderile la intrare în ajutaj care apar din cauza lovirii inevitabile a particulelor de aer cu muchiile ajutajului.

La intrarea jetului de aer în canalul ajutajului, particule de aer sînt dirijate în direcții diferite, datorită acțiunii forței centrifuge. Acest fenomen provoacă comprimarea vînei de aer și pierderile de presiune ajung pînă la 15 % din căderea de presiune [3],

$$\Delta p_i = 15\ \%\ \Delta p = 0,15.2 = 0,3\ \text{at.}$$

c) Pierderile de energie cinetică și potențială la ieșire din ajutaj. Aceste pierderi se datoresc unor condiții reale și anume: la ieșirea din ajutaj aerul posedă o anumită viteză, deci o cantitate de energie cinetică și potențială care nu mai poate fi utilizată.

Deoarece de la început ne-am propus să nu luăm în calcul energia cinetică producătoare de lucru mecanic de rotație, vom face abstracție de aceste pierderi.

d) Pierderile prin interstiţii care apar pe de o parte din cauza existenţei unor fante inerente care se formează între piesa de rectificat şi piatra abrazivă în timpul procesului de aşchiere, iar pe de altă parte se datoresc jocului existent între conducta *4* şi turbina în mişcare de rotaţie şi de translaţie. Tot odată trebuie să ţinem seama de faptul că admisia aerului nu se face uniform pe toată suprafaţa discului, ci numai pe un sector al lui. Vom adopta soluţii constructive, astfel ca pierderile de presiune să nu fie mai mari de 15 % Δp

$$\Delta p_j = 0{,}15\ \Delta p = 0{,}3 \text{ at.}$$

e) Pentru simplificarea calculelor vom considera că scurgerea aerului se face în regim permanent. Eroarea care se face prin această simplificare este destul de mică, pentru că nu ia în consideraţie forţele de inerţie ale masei de aer, forţe care apar ca urmare a variaţiei în timp a vitezei curentului de aer. Această eroare este substanţială numai în cazul unor conducte foarte lungi în care ar avea loc variaţii considerabile ale vitezei curentului de aer într-un interval scurt de timp. Ca ipoteza admisă, eroarea introdusă în calcule este mai mică de 3 % [1]

$$\Delta p_N = 0{,}03\ \Delta p = 0{,}06 \text{ at.}$$

Regimul de curgere influenţează mărimea pierderii de sarcină. Limita la care se face trecerea de la curgerea laminară la cea turbulentă este dată în numărul lui Reynolds. În general, se consideră că trecerea de la curgerea laminară la cea turbulentă, în tuburi de secţiune circulară constantă se face în jurul valorii $\mathcal{R}e = 2320$. În cazul nostru, ajutajul are o secţiune continuu variabilă, trecerea la regim turbulent se face la alte valori ale numărului Reynolds ($\mathcal{R}'e$).

La ajutaje convergente, $\mathcal{R}'e = 5{,}7\ \mathcal{R}e$, [4]. Vom considera de parte $\mathcal{R}e' = 5{,}7\ \mathcal{R}e$, unde $\mathcal{R}e = \frac{Wd}{\nu}$, iar pe de altă parte vom ţine seama de variaţia densităţii aerului cu presiunea.

Tabela 4

d_i [mm]	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
W[m/s]	28,4	14,2	9,5	7,1	5,7	4,7	4,06	3,55	3,16	2,04

$\nu_{aer} = 1{,}85 \cdot 10^{-6}$ [kg.s. m^{-2}]

În tabela 4 prezentăm valorile vitezelor de curgere critice la intrare în ajutaj, unde probabilitatea existenţei unei curgeri laminare este mai mare decît la ieşirea din ajutaj.

Pentru uşurinţa calculelor am considerat $p_1 = 6$ at şi vîscozitatea cinematică a aerului constantă.

Se observă că avem o curgere turbulentă în ajutaj ori care ar fi presiunea din amonte p_1 şi care nu depinde de diametrul d_1 la intrare în ajutaj.

În regim turbulent, pierderea de sarcină este dată de relaţia

$$h_r = \frac{l}{d} \lambda \frac{W^2}{2g}, \tag{16}$$

unde, după indicaţiile date în [4],

$$\lambda = 0{,}242\ \mathcal{R}'e^{-0224}, \tag{17}$$

din calcule şi din practică se admite $\lambda = 0{,}03$.

Făcînd calculele lui h_r, rezultă o pierdere de sarcină care poate fi estimată ca o valoare medie de 0,5 at.

În tabela 5 se arată cum variază pierderea de sarcină în turbină, în funcţie de diametrul d_2 de ieşirea şi lungimea l a rotorului.

Tabela 5

d_2 [mm]	1	2	2	2	3	3	4	4	6	8
l [mm]	2,5	5	10	15	18	23	25	30	30	30
h_r [at]	0,16	0,16	0,32	0,32	0,38	0,49	0,4	0,48	0,32	0,4

Pentru simplificarea calculelor au considerat valorile medii

$$d_m = \frac{1}{2}(d_1 + d_2) \tag{18}$$

$$W_m = \frac{1}{2}(W_1 + W_2). \tag{19}$$

Aşa cum am arătat mai sus, ajutajul este proiectat să realizeze practic o cădere de presiune de la p_1 la p_2, regimul de lucru va fi ales corespunzător acestui scop, presiunile de intrare şi de ieşire din ajutaj reale, respectiv p_{1r} şi p_{2r} sînt date de relaţiile

$$p_{1r} = p_1 + \Delta p' \tag{20}$$

$$p_{2r} = p_2 - \Delta p'', \tag{21}$$

unde $\Delta p'$ şi $\Delta p''$ reprezintă pierderile de presiune la intrare în ajutaj şi, respectiv, la ieşirea din ajutaj.

De la început am admis, ca ipoteză, faptul că datorită vitezei foarte mari de curgere a aerului prin ajutaj nu are timp practic să se facă schimb de căldură cu exteriorul. În consecinţă, entropia aerului, s, este constantă, iar

$$ds = 0. \tag{22}$$

De asemenea, am admis că avem entalpia constantă

$$di = 0. \tag{23}$$

Deşi trecerea aerului din interiorul ţevii de rectificat (figura 1) în ajutaj se face brusc, trecînd de la o secţiune mare la alta care se îngustează mult, se produce un efect de laminare adiabatică a jetului de aer, dar care îşi păstrează entalpia constantă.

Diferenţa de temperatură produsă prin laminarea aerului între două limite de presiune prin aşa zisul efect integral Joule-Thomson se poate neglija, fiind foarte mică (diferenţa de presiune p_1 şi p_2 este mică), iar efectul temperaturii degajate nu va produce variaţia diametrului ţevii de rectificat.

Calculul scăderii de temperatură produsă prin strangularea aerului se face cu formula aproximativă a lui Thomson [6]

$$\Delta_t = a(p_1 - p_2)\left(\frac{273}{T_1}\right)^2 \tag{24}$$

(pentru $\Delta p = 1{,}5$ at se obţine $\Delta t = 0{,}35$ °C) în care a este o constantă, care pentru aer are valoarea $a_{aer} = 0{,}268 - 8{,}433 \cdot 10^{-4} \cdot p_1$, p_1 fiind exprimat în bari.

Pentru utilizarea rezultatelor teoretice în proiectare propunem în tabelul 6 parametri principali constructivi pentru două variante de turbine (A şi B)

Tabela 6

Varianta	di [mm]	Z	M [mm]	D [mm]	l [mm]	a [mm]	b [mm]	d_1 [mm]	d_2 [mm]	r_m [mm]	C_1 [mm]	C_2 [mm]
A	2	4	$M5$	9	10	3	5	1	1,5	2,1	0,5	0,5
B	10	4	$M45$	100	30	5	25	8	20	20	1	1

4. CONCLUZII

Din cele prezentate mai sus rezultă clar avantajele care pot fi aduse practicei prin aplicarea metodei şi anume:

— realizarea rectificării interioare a pieselor cu lungimi mult mai mari decît cele ce se pot executa prin rectificarea practică pînă în prezent;

— eliminarea operaţiilor suplimentare de suprafinisare care sînt costisitoare,

— evitarea vibraţiilor care pot apare din cauza vitezelor mari folosite în producţie;

— instalaţie simplă;

— economisirea de energie scumpă (energie electrică).

Energie electrică se folosește numai pentru producerea aerului industrial.

În încheiere trebuie precizat că pentru obținerea unor suprafețe de calitate ridicate este necesară o pregătire prealabilă a aerului. Astfel, trebuie îndepărtată orice particuă mai mare de 25 μm. Particulele mai mici din aerul industrial sînt în funcție de rugozitatea dorită. Nu se recomandă să se folosească o filtrare mai fină decît cea necesară, deoarece aceasta ar duce la o scumpire a produselor [5].

Primită la redacție la 7 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. V. COSOROABĂ ș.a., *Acționări pneumatice*, Edit. tehnică, București, 1971, p. 46.
2. ST. ENACHE ș.a. *Așchiere și scule așchietoare*, Litografia și tipografia Institutului Politehnic, București, 1973, p. 283, 296.
3. S. M. LOSEV, *Turbine cu abur*, Edit. tehnică, București, 1958, p. 54.
4. D. PAVEL, *Hidraulica teoretică și aplicată*, Edit. tehnică, București, 1950, p. 181, 191.
5. H. K. SHAH, *Principiile pregătirii aerului comprimat în sistemele pneumatice industriale*, I.D.T. Caiet de documentare selectivă, 1973. Din The Indian and Eastern Engineer, S.U.A. **112**, *8*, 1970.
6. C. STAMATESCU, *Tehnica frigului*, Edit. tehnică, Vol. I, București, 1972, p. 394.
7. L. STOICESCU ș.a., *Termotehnica*, Litografia și tipografia învățămîntului, București, 1957, p. 627.
8. AL. TODICESCU, *Mecanica fluidelor și mașini hidropneumatice*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1974, p. 285.
9. I. VLĂDEA, *Manual de termotehnică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1962.
10. * * * *Producerea și distribuția aerului comprimat* (în Schweizer Maschinenmarkt, Elveția, 70, *49*, 46—51, 1970).

Calculul dinamic al construcțiilor sub acțiuni speciale Sub redacția B. G. Korenev și I. M. Rabinovici, Moscova, Stroiizdat, 1981.

Monografia inginerească din colecția „Manualul proiectantului" tratează o serie de probleme dinamice speciale, întîlnite de inginerul constructor. Capitolele au următoarele titluri:

1. Calculul construcțiilor sub efectul undelor de explozii.
2. Protecția clădirilor pentru producția de explozive la sarcinile apărute la explozia de amestecuri de gaze și aer în incintă.
3. Calculul construcțiilor sub acțiuni seismice.
4. Nestabilitatea aerodinamică a construcțiilor înalte și a celor subțiri.
5. Acțiuni dinamice asupra clădirilor produse de avioane supersonice.
6. Încărcări la macarale.
7. Regimuri speciale de lucru ale construcțiilor în care se află agregate energetice.
8. Interacțiunea dinamică între construcții și fundații și transmiterea vibrațiilor prin sol.
9. Problema dinamică a contactului pe semispațiu.
10. Calculul parametrilor vibrațiilor solului și clădirilor, cauzate de mișcarea metrourilor.
11. Vibrațiile fundațiilor instalațiilor de matrițare prin explozii și ale solurilor.
12. Calculul construcțiilor înzestrate cu absorbitori dinamici.
13. Mijloace aerodinamice de absorbire a vibrațiilor produse de vînt asupra construcțiilor înalte.
14. Modelarea fenomenelor dinamice prin modele la scară redusă.
15. Fotoelasticitate dinamică.

După cum se constată din această enumerare, monografia tratează o serie de probleme dinamice noi, pe care inginerul proiectant este pus să le rezolve.

Considerăm monografia ca deosebit de utilă pentru inginerii constructori proiectanți.

Prof. Gh. Buzdugae

B. G. KORENEV, *Probleme ale teoriei transmisiei căldurii și termoelasticității*, Moscova, Editura de fizico-matematici, 1980.

Monografia profesorului Korenev studiază distribuția cîmpurilor de temperaturi și de tensiuni, întîlnite n industria chimică, energetică și în alte domenii unde au loc procese termice.

Capitolul 1 studiază probleme staționare de transmisia căldurii prin bare, plăci, semispațiu, tuburi.

În al doilea capitol se studiază undele termice, datorite variațiilor periodice de temperatură, în aceleași corpuri descrise anterior.

Al treilea capitol se ocupă de mișcarea surselor de căldură și cîmpurile de temperatură ce rezultă.

Capitolul al patrulea se ocupă de sursele de căldură, iar al cincilea de cîmpurile de temperatură nestaționare.

Cu al șaptelea capitol începe studiul de termoelasticitate: problemele cvasistatice de termoelasticitate și introducerea noțiunii de potențial termoelastic.

Capitolul al șaptelea examinează o serie de probleme aplicative ale teoriei cvasistatice a termoelasticității.

Cartea se adresează cercetătorilor, inginerilor, studenților și personalului didactic universitar.

Prof. Gh. Buzdugan

V. BOETZ, *Flexible Sonder-Werkzeugmaschinen für spanende Fertigung. Bau- und Arbeitseinheiten. Planung, Wirtschaftlichkeit. ausgeführte Bauformen.* (Mașini unelte speciale flexibile, pentru prelucrări prin așchiere — Unități constructive și de lucru, proiectare, economicitate, forme constructive realizate"). SPRINGER VERLAG Berlin — Heidelberg — New York, 1979, 90 pag. — 69 fig.

Lucrarea urmărește prezentarea principiilor constructive și a formelor mașinilor moderne prelucrătoare prin așchiere, precum și a bazelor de utilizare a acestora în proiectarea judicioasă a liniilor de fabricație, în condițiile tehnicii actuale.

O asemenea expunere apare ca o necesitate, datorită modificării de principiu a structurii mașinilor unelte, ca urmare a transformării permanente și în ritm rapid a produselor, cerute de tehnica modernă în continuă schimbare.

În această situație, reducerea seriilor de produse fie ca număr de exemplare fie ca durată de menținere în fabricație, datorită uzurii morale intense prin evoluția tehnicii, face ca utilizarea mașinilor universale sau a mașinilor specializate pe produs să devină neeconomică. A apărut astfel ideea alcătuirii unor mașini „flexibile" realizate prin combinarea după nevoie a unor unități (blocuri) specializate pe operații unitare, care, prin simple modificări de montaj a blocurilor, dau naștere la mașini speciale („Sondermaschinen") cu comandă centralizată automată sau semiautomată, deservite de un personal cu pregătire generală.

Lucrarea de față analizează problemele puse fabricației moderne, descrie cele mai răspîndite forme constructive de mașini prelucrătoare și dă indicații de proiectare tehnologică a ansamblelor, cu parametrii caracteristici de funcționare și exemple de calcul tehnologic din care reiese avantajul economic al mașinilor flexibile față de cele universale.

Sub formă de trecere în revistă a cuprinsului cărții, relatăm rezumativ conținutul capitolelor după cum urmează : problemele și semnificația mașinilor speciale flexibile ; unități constructive ; unități de lucru ; unități de deservire a procesului de lucru ; unități de antrenare ; operații suplimentare fără așchiere executabile pe mașinile așchietoare ; proiectarea tehnologică a mașinilor prelucrătoare (ordonarea operațiilor, alegerea adecvată a deplasării sculelor, parametrii de lucru — viteze, avansuri, puteri — calculul timpilor de lucru, principiile de conducere a procesului de lucru) ; elemente de calcul a rentabilității ; formele constructive ale mașinilor speciale ; scule utilizabile, bazele de combinare ale mașinilor în cadrul liniilor de fabricație.

Prin caracterul său tehnologic, lucrarea nu abordează, evident, problemele de proiectare constructivă a mașinilor flexibile și a unităților componente.

În ansamblu lucrarea are un caracter practic și reușește, prin concizie și sistematizare să ofere atît elemente de inițiere în problemele acestor mașini unelte cît și principiile de alcătuire și proiectare tehnologică a lor, fiind utilă unui larg cerc de interesați fie ca specialiști tehnologi de proiectare sau de atelier, fie ca economiști, merceologi, studenți, care urmăresc să cunoască specificul tehnicii prelucrătoare moderne.

Eugen Bugajewski

PAUL LOHSE, *Getriebesynthese, Bewegungsabläufe sbener Koppelmechanismen (2. Auflage)* *(Sinteza mecanismelor — Procese de mișcare ale mecanismelor plane articulate)* (Ediția a 2-a.)
SPRINGER — VERLAG, Berlin — Heidelberg — New York, 1980, 228 pag., 392 figuri.

Lucrarea se extinde asupra mecanismelor plane cu bare articulate și urmărește proiectarea judicioasă a acestora în vederea sporirii eficienței și economicității lor în exploatare.

După cum își formulează tema autorul în prefață, se pornește de la impunerea unui număr limitat sau nelimitat de poziții, urmînd ca printr-o metodă de proiectare adecvată să se ajungă la forma constructivă și dimensiunile mecanismului corespunzător care să reprezinte o soluție cît mai simplă și rentabilă în funcționare. Astfel studiile de sinteză abordate prezintă aspectul geometric al mișcării (sinteza geometrică sau a pozițiilor) de la care este apoi posibilă trecerea la condiționări cinematice (viteze, accelerații).

După o prezentare introductivă privind structura principalelor forme constructive ale mecanismelor plane cu bare articulate și funcțiunile lor, se expun bazele geometriei mișcării, folosind în principal teoria curbelor polare și se arată că problemele cinematice se pot reduce la cele geometrice cu introducerea timpului. Se trece apoi la aplicarea în sinteza geometrică a mecanismelor care ocupă trei sferturi din volumul cărții, conform obiectivului propus.

Rezumativ, conținutul pe capitole apare după cum urmează : bazele privind construcția și funcțiunile mecanismelor (indicații structurale, tipuri principale de mecanisme — ordonate după numărul de elemente și obținerea diferitelor categorii de curbe de bielă — aprecierea calitativă a mecanismelor), geometria constructivă a mișcării (problemele pozițiilor, curbe polare), sinteza pozițiilor distincte, sinteza seriilor de poziții, proiectarea mecanismelor pentru a obține curbe date (metode generale, conduceri rectilinii, pentru curbe date prin formule, pentru curbe empirice, pentru domenii de poziții), proiectarea pentru mișcări date (deplasări paralele), proiectarea mecanismelor pentru mișcări coordonate (pentru poziții din-

stincte, funcţii de transfer — liniare şi de ordin superior — staţionări, coordonări), proiectarea de mecanisme transformatoare de distanţe (pentru familii de curbe de bielă, pentru funcţii de transfer variabile — transformări de curse).

Problemele de sinteză sînt tratate, conform temei propuse, atît sub aspectul alegerii structurii adecvate condiţiilor impuse (sinteza calitativă) cît şi al determinării dimensiunilor funcţionale (sinteza dimensională sau cantitativă), căreia i se acordă cea mai mare pondere. Totodată se dau criterii de apreciere a soluţiilor, pentru asigurarea unui rezultat tehnic acceptabil („utilizabil"), eventual optimizat.

Studiile şi metodele prezentate sînt de natură geometrică — grafică, ca bază a elaborării oricăror metode de calcul, pînă la prelucrarea numerică a datelor.

Se evidenţiază caracterul practic aplicativ al lucrării, care deşi fundamentat teoretic nu prezintă demonstraţii în extenso sau teoreme fundamentale, care se presupun cunoscute în prealabil punîndu-se accentul pe elaborarea de metode generalizate de lucru.

Este de remarcat extrema concizie în exprimare, sublinierea în aliniate distincte a definiţiilor, teoremelor, remarcilor şi indicaţiilor de lucru, precum şi organizarea scrupuloasă a materialului şi prezentarea cazurilor ca particularizări ale unor metode generale, ceea ce conferă lucrării un caracter sinoptic deosebit de preţios în utilizarea efectivă în proiectare.

Trebuie totodată menţionat caracterul intuitiv al prezentării, pentru evitarea expunerilor lungi, astfel încît aprofundarea problemelor necesită o intensă activitate raţională, cu aspectul său util în formarea gîndirii şi asimilarea temeinică a materialului prezentat.

De asemenea, numărul mare de exemple cu valoare aplicativă în industrie şi desenele abundente de o deosebită calitate (la care se face apel intens pentru întărirea justificărilor teoretice şi reducerea la minimum a expunerilor), atribuie lucrării calităţii deosebite de îndrumar în proiectare.

Faţă de alte lucrări similare ce tratează probleme de sinteză pe cale geometrică, prezenta carte apare pe de-o parte ca o unificare a unui vast material bibliografic cuprinzînd în mare parte cercetări dintre cele mai recente pe probleme izolate alături de manuale de bază (de altminteri cititorul este pus la curent cu stadiul rezolvării problemelor de fond), iar pe de altă parte cartea prezintă o originală latură aplicativă prin dezvoltarea unor metode de lucru unitare pe diferitele aspecte de sinteză geometrică, mergînd pînă la alcătuirea de „programe de proiectare" eşalonate pe etape, cu un profund caracter de sistematizare, care, deşi expuse extrem desuccint, au o deosebită valoare în utilizarea practică curentă.

În ansamblu, lucrarea, de un ridicat nivel de cuprindere a problemelor de geometrie a mişcării, contribuie la formarea spiritului metodic de proiectare eficientă şi mai ales la activitatea practică a constructorului de maşini, adresîndu-se în general tuturor celor — preocupaţi de obţinerea mişcărilor neuniforme care se realizează în varietate nelimitată prin folosirea curbelor de bielă, drept care mecanismele cu bare articulate sînt calificate ca „mecanisme cu bielă" („Koppelgetriebe").

Eugen Bugajewski

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor, solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de colaboratori din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Millé, nr. 15, sectorul 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 41, nr. 3 mai—iunie 1982

SUMAR

STUDII

D. GH. PETCU, C. GH. POPA, O nouă metodă numerică pentru soluţionarea problemei curgerii nestaţionare bidimensionale (x—y), bifazice (apă-ţiţei), prin medii poroase 349

T. OROVEANU, B. SIRO, Asupra caracteristicii hidraulice (H—Q) şi a influenţelor presiunii şi temperaturii în pomparea succesivă de produse petroliere 366

I. SETEANU, V. DADU, M. ERHAN, Influenţa paletajului rotoric asupra desprinderii stratului limită la grupurile bulb reversibile 387

MIRCEA V. SOARE, GH. OBLEMENCO, Influenţa condiţiilor de rezemare asupra stării de eforturi şi de deformaţii într-o structură planar-pătrată diagonală 403

M. A. DUMBRAVĂ, Considerarea efectului hidrodinamic în optimizarea funcţională a lagărelor hidrostatice 419

LUCIAN CĂPITANU, Instalaţie pentru oxidarea pulberii de wolfram 427

RECENZII 430

O NOUĂ METODĂ NUMERICĂ PENTRU SOLUȚIONAREA PROBLEMEI CURGERII NESTAȚIONARE BIDIMENSIONALE (x—y), BIFAZICE (APĂ-ȚIȚEI), PRIN MEDII POROASE

de D. GH. PETCU, C. GH. POPA
Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești

Lucrarea prezintă un model numeric pentru soluționarea problemei curgerii bifazice apă-țiței, cu influența presiunii capilare și a efectului gravitațional, în spațiul bidimensional x—y.

Noutatea constă în modul de soluționare a sistemului de ecuații rezultat în urma dezvoltării în diferențe finite, care a condus la înlăturarea unor erori care afectau în special valorile saturațiilor.

Pentru testare, modelul a fost aplicat pentru cazul curgerii amestecului apă-țiței într-o carotă, iar rezultatele au fost comparate cu soluția analitică. Aceasta a pus în evidență avantajele folosirii noii metode în comparație cu altele cunoscute.

1. INTRODUCERE

Necesitatea creșterii factorului final de recuperare la zăcămintele de țiței a condus la aplicarea metodelor de recuperare terțiară. Costul relativ ridicat al proceselor de recuperare terțiară a impus noi cerințe pentru exactitatea parametrilor de proiectare, ceea ce a condus la îmbunătățirea metodelor de prevedere a exploatării.

Modelele matematice simpliste (cele analitice de exemplu) folosite pentru modelarea curgerilor din zăcămintele de petrol și gaze nu mai corespund întrucît, ele neputînd fi soluționate decît pentru cazuri particulare de zăcămînt, nu iau în considerare geometria curgerii, înclinarea zăcămîntului, amplasarea sondelor și influența lor în procesul de dezlocuire, grosimea variabilă a zăcămîntului, neuniformitatea parametrilor lui pe orizontală și verticală, istoricul de exploatare etc.

Toate aceste condiții au condus la elaborarea unor modele matematice mai complexe care nu mai pot fi soluționate analitic, ci numeric, simulînd procesul de exploatare cu ajutorul calculatorului electronic.

Modelele numerice prezintă un mare avantaj pentru industria extractivă de petrol pentru că, în timp ce un zăcămînt poate fi exploatat o singură dată, cu implicații economice deosebite, modelele numerice pot simula rapid procesul de exploatare în diverse variante, ceea ce permite luarea deciziei optime în conducerea exploatării zăcămîntului.

Prezenta lucrare prezintă un model numeric pentru curgerea bifazică apă-țiței cu influența presiunii capilare și a efectului gravitațional, care poate fi folosit pentru proiectarea exploatării zăcămîntului de țiței, cu sau fără istoric de exploatare, prin injecție de apă sau cu acvifer parțial

sau total activ. Grosimea zăcămîntului, înclinarea și geometria pot fi variabile, acoperindu-se o gamă destul de largă de tipuri de zăcăminte întîlnite în țara noastră. Modelul elaborat ia în considerare distribuția neuniformă în timp și spațiu a parametrilor de zăcămînt.

Literatura de specialitate oferă mai multe metode de rezolvare numerică a unei astfel de probleme. În prezenta lucrare s-a folosit metoda de soluționare simultană (SS), prin considerarea implicită a presiunilor de fază P_t și P_a (și deci și a saturațiilor) cu transmisibilități explicite.

Pentru rezolvarea sistemului algebric de ecuații rezultat se pot folosi metodele iterative (Jacobi, Gauss-Seidel și S.O.R.). Cele mai bune rezultate însă, le-a furnizat metoda de soluționare simultană prin ecuații cuplate (SSEC), metodă originală elaborată în cadrul laboratorului de „Modelare numerică" din I.P.G. Ploiești. Această metodă poate fi aplicată sub oricare din variantele iterative, iar în prezenta lucrare a fost utilizată sub varianta Gauss-Seidel.

Algoritmul elaborat și programul de calculator construit a fost aplicat pentru testare pentru cazul curgerii liniare într-un tub (ale cărui rezultate au fost comparate cu soluția analitică obținută prin aplicarea teoriei Buckley-Leverett).

Rezultatele obținute, în bună concordanță cu realitatea, au arătat fiabilitatea și viabilitatea modelului elaborat.

2. MODEL NUMERIC PENTRU CURGEREA BIFAZICĂ (APĂ-ȚIȚEI) ÎN SPAȚIUL BIDIMENSIONAL, CU INFLUENȚA PRESIUNII CAPILARE ȘI A EFECTULUI GRAVITAȚIONAL

Fie un mediu poros-permeabil de porozitate m, permeabilitate absolută K, permeabilitate relativă pentru faza apă k_a și, respectiv, pentru faza țițeiului k_t, saturat deci cu apă de saturație S_a și țițeiului de saturație S_t, în care există o sursă de țițeiului cu debit volumic specific (pentru unitatea de volum) q_t și o sursă de apă cu debit volumic specific q_a. Curgerea se consideră incompresibilă, astfel că factorii de volum pentru cele două faze (b_a și b_t), precum și masele specifice (ρ_a și ρ_t) și deci și viscozitățile dinamice (μ_a și μ_t), sînt constante în timp și spațiu [1].

Pentru stabilirea legii matematice a curgerii bifazice, deci a ecuațiilor de curgere, se pornește de la cele trei ecuații fundamentale ale hidraulicii subterane, scrise pentru fiecare fază [2] și anume:

— ecuația de continuitate;

— ecuația de forță a lui Darcy;

— ecuația de stare.

Astfel, în coordonatele carteziene ale spațiului bidimensional ecuațiile de continuitate sînt:

— pentru faza apă:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_a \cdot v_{ax}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_a \cdot v_{ay})\right] + M_{sa} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_a \cdot m \cdot \frac{S_a}{b_a}\right), \qquad (1)$$

— pentru faza țiței:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho_t \cdot v_{t_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_t \cdot v_{t_y}) + M_{st} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_t \cdot m \cdot \frac{S_t}{b_t}\right)\right]. \tag{1'}$$

Ecuația de forță a lui Darcy, extinsă la cazul mișcării bidimensionale, are forma:

— pentru faza apă:

$$\vec{v}_a = -\frac{K \cdot k_a}{\mu_a \cdot b_a} \cdot \text{grad}\, \Phi_a \tag{2}$$

— pentru faza țiței:

$$\vec{v}_t = -\frac{K \cdot k_t \cdot}{\mu_t \cdot b_t} \cdot \text{grad}\, \Phi_t, \tag{2'}$$

unde s-au definit potențialele de fază:

$$\Phi_a = P_a - \rho_a \cdot g \cdot z, \tag{3}$$

$$\Phi_t = P_t - \rho_t \cdot g \cdot z, \tag{3'}$$

z fiind cota punctului față de o suprafață orizontală de referință arbitrar aleasă (fig. 1), g — accelerația gravitațională, iar P_a și P_t — presiunile în faza apă și, respectiv, țiței, legate prin intermediul presiunii capilare:

$$P_c = P_t - P_a. \tag{4}$$

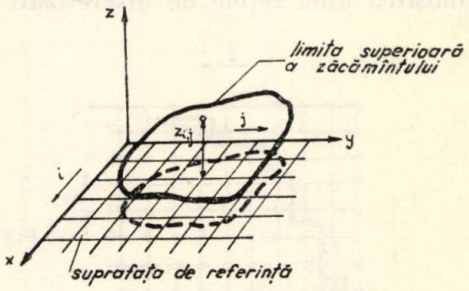


Fig. 1. — Domeniul de definiție.

În ecuațiile (2) putem exprima:

$$\text{grad}\, \Phi_f = \frac{\partial \Phi_f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Phi_f}{\partial y} \vec{j}, \qquad f = a, t. \tag{5}$$

Curgerea fiind incompresibilă, ecuațiile de stare au forma:

$$\rho_f = \text{const.}, \qquad f = a, t. \tag{6}$$

Înlocuind ecuațiile (2) și (6) în ecuațiile de continuitate și făcînd simplificările, obținem ecuațiile de mișcare sub forma sistemului de ecuații diferențiale :

$$\nabla\left(\frac{K\cdot k_a}{\mu_a\cdot b_a}\nabla\Phi_a\right)+b_a\cdot q_a=m\cdot\frac{\partial S_a}{\partial t},$$
$$\nabla\left(\frac{K\cdot k_t}{\mu_t\cdot b_t}\nabla\Phi_t\right)+b_t\cdot q_t=m\cdot\frac{\partial S_t}{\partial t}, \tag{7}$$

unde

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} \tag{8}$$

și debitele volumice specifice :

$$q_a=\frac{M_{sa}}{\rho_a},\quad q_t=\frac{M_{st}}{\rho_t}. \tag{9}$$

Saturațiile sînt legate prin relația :

$$S_a+S_t=1. \tag{10}$$

Curgerea bidimensională bifazică este o problemă cu condiții inițiale și la limită aplicate unui domeniu închis. La limita zăcămîntului neexistînd curgere, vom considera condiții la limită de tip Neumann (sub formă de derivată), iar drept condiție inițială se va considera presiunea în faza țiței, uniform sau neuniform distribuită la nivelul de referință $z=0$.

Pentru rezolvarea numerică a sistemului (7), condițiile la limită impun folosirea unei rețele de discretizare cu centrare pe bloc (fig. 2).

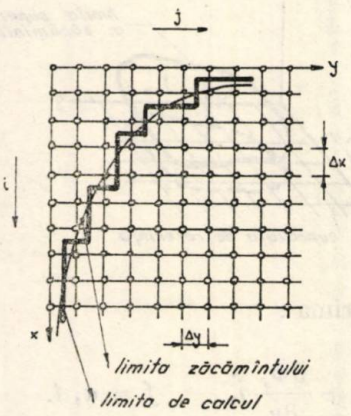


Fig. 2. — Modelarea limitei zăcămîntului.

La scrierea în diferențe finite a ecuațiilor (7) se are în vedere că $S_a=S_a(P_c)$ (fig. 3) și

$$P_c=\Phi_t-\Phi_a+(\rho_t-\rho_a)\cdot g\cdot z, \tag{11}$$

astfel că

$$\frac{\partial S_a}{\partial t_a} = \frac{\partial S_a}{\partial p_c} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_t}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_a}{\partial t} \right). \tag{12}$$

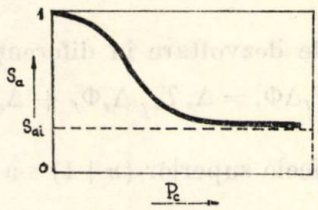


Fig. 3. — Dependența $S_a = S_a(P_c)$.

Dezvoltînd în diferențe finite în jurul nodului (i, j) din rețeaua de discretizare (fig. 4), pasul de rețea fiind :

— Δx, după direcția x ;

— Δy, după direcția y și după înmulțirea cu volumul unei celule $\Delta x \cdot \Delta y \cdot H$, ecuațiile (7) devin :

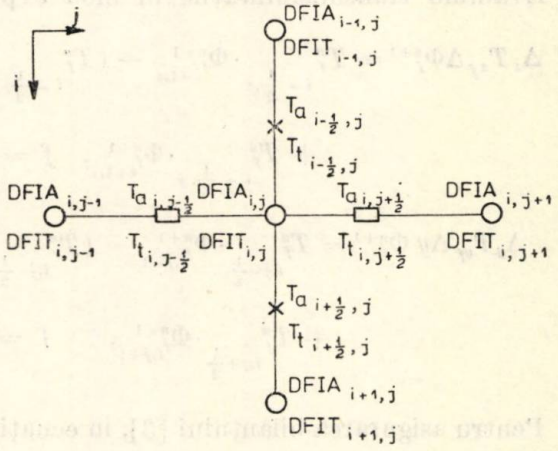


Fig. 4. — Element de rețea de discretizare.

$$\Delta T_a \, \Delta \Phi_a^{n+1} + Q_a \cdot b_a = G(\Phi_t^{n+1} - \Phi_t^n) - G \cdot (\Phi_a^{n+1} - \Phi_a^n), \tag{13}$$

$$\Delta T_t \, \Delta \Phi_t^{n+1} + Q_t \cdot b_t = - G \cdot (\Phi_t^{n+1} - \Phi_t^n) + G \cdot (\Phi_a^{n+1} - \Phi_a^n),$$

considerînd diferența finită regresivă :

$$\frac{\partial \Phi_f}{\partial t} = \frac{\Phi_f^{n+1} - \Phi_f^n}{\Delta t}, \quad f = a, t, \tag{14}$$

unde Δt este pasul de timp, H — grosimea stratului în punctul unde s-a făcut dezvoltarea și unde s-au notat debitele volumice :

$$Q_a = q_a \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot H \, ; \; Q_t = q_t \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot H, \tag{15}$$

debitele fiind considerate pozitive la injecție și negative la extracție.

S-a mai notat:

$$G = \frac{m \cdot \dfrac{\partial S_a}{\partial p_c} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot H}{\Delta t} \tag{16}$$

şi operatorii de dezvoltare în diferenţe finite:

$$\Delta T_f \Delta \Phi_f = \Delta_x T_{x_f} \Delta_x \Phi_f + \Delta_y T_{y_f} \Delta y \, \Phi_f, \quad f = a, \, t. \tag{17}$$

Prin indicele superior $(n+1)$ s-a notat nivelul de timp:

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \tag{18}$$

iar transmisibilităţile sînt:

$$T_{x_f} = \frac{K \cdot k_f}{\mu_f} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot H; \quad T_{y_f} = \frac{K \cdot k_f}{\mu_f} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot H, \quad f = a, \, t. \tag{19}$$

Evaluînd transmisibilităţile în mod explicit, se mai poate scrie:

$$\Delta_x T_{x_f} \Delta \Phi_f^{n+1} = T_{f_{i-\frac{1}{2},j}}^n \cdot \Phi_{f_{i-1,j}}^{n+1} - (T_{f_{i-\frac{1}{2},j}}^n + T_{f_{i+\frac{1}{2},j}}^n) \cdot \Phi_{f_{i,j}}^{n+1} +$$

$$+ T_{f_{i+\frac{1}{2},j}}^n \cdot \Phi_{f_{i+1,j}}^{n+1}, \quad f = a, \, t, \tag{20}$$

$$\Delta_y T_{y_f} \Delta y \, \Phi_f^{n+1} = T_{f_{i,j-\frac{1}{2}}}^n \cdot \Phi_{f_{i,j-1}}^{n+1} - (T_{f_{i,j-\frac{1}{2}}}^n + T_{f_{i,j+\frac{1}{2}}}^n) \cdot \Phi_{f_{i,j}}^{n+1} +$$

$$+ T_{f_{i,j+\frac{1}{2}}}^n \cdot \Phi_{f_{i,j+1}}^{n+1}, \quad f = a, \, t. \tag{20'}$$

Pentru asigurarea bilanţului [3], în ecuaţia (16) se va scrie:

$$\frac{\partial S_a}{\partial P_c} = \frac{N - \nu}{N} \cdot S_a'^{\nu} + \frac{S_a^{\nu+1} - S_a^n}{P_c^{\nu+1} - P_c^n} \cdot \frac{\nu}{N}, \tag{21}$$

unde $S_a'^{\nu}$ este panta curbei $S_a(P_c)$ la nivelul de iteraţie ν din totalul N de iteraţii folosite pentru rezolvarea sistemului algebric de ecuaţii ce rezultă din dezvoltarea în diferenţe finite.

Pentru asigurarea stabilităţii soluţiei numerice, permeabilităţile relative de fază din cadrul transmisibilităţilor vor fi evaluate în amonte, astfel că se scrie [4]:

$$T_{f_{i+\frac{1}{2},j}} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\mu_f} \cdot \frac{1}{4} \cdot (H_{i,j} + H_{i+1,j}) \cdot (K_{i,j} + k_{i+1,j}) \times$$

$$\times [\gamma \cdot k_{f_{i,j}} + (1 - \gamma) \cdot k_{f_{i+1,j}}], \quad f = a, \, t, \tag{22}$$

$$T_{f_{i,j+\frac{h}{2}}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\mu_f} \cdot \frac{1}{4} \cdot (H_{i,j} + H_{i,j+1}) \cdot (K_{i,j} + K_{i,j+1}) \times$$

$$\times [\gamma \cdot k_{f_{i,j}} + (1 - \gamma) \cdot k_{f_{i,j+1}}], \qquad f = a, t, \tag{22'}$$

unde

$$\gamma = 0 \text{ pentru } (\Phi_{f_{i,j}} \leqslant \Phi_{f_{i+1,j}} \text{ sau } \Phi_{f_{i,j}} \leqslant \Phi_{f_{i,j+1}}, \qquad f = a, t,$$

$$\gamma = 1 \text{ pentru } \Phi_{f_{i,j}} \geqslant \Phi_{f_{i+1,j}} \text{ sau } \Phi_{f_{i,j}} \geqslant \Phi_{f_{i,j+1}}, \qquad f = a, t. \tag{23}$$

În nodurile în care se află sondele, se pot specifica drept condiții la limită, fie presiunile în sonde, fie debitele. În prezenta lucrare se va considera cazul în care se specifică debitele. Dacă, însă, în ecuațiile (13), Q_t reprezintă debitul de țiței extras, prin Q_a se reprezintă fie debitul de apă extras prin sondele de extracție, dedus, implicit, în funcție de saturațiile în sondă și de debitul de țiței extras, fie debitul de injecție pentru punctele nodale în care se găsesc amplasate aceste sonde.

Astfel, din (13) rezultă :

$$\Delta T_a \Delta \Phi_a^{n+1} - G \cdot (\Phi_t^{n+1} - \Phi_t^n) + G \cdot (\Phi_a^{n+1} - \Phi_a^n) = -b_a \cdot Q_a, \tag{24}$$

$$\Delta T_t \Delta \Phi_t^{n+1} + G \cdot (\Phi_t^{n+1} - \Phi_t^n) - G \cdot (\Phi_a^{n+1} - \Phi_a^n) = b_t \cdot \Phi_t. \tag{24'}$$

Adunînd și scăzînd din fiecare membru al ecuațiilor (24) termenul $\Delta T_f \Delta \Phi_f^n (f = a, t)$ și notînd deplasările potențialelor în fiecare fază :

$$\text{DFIA}^{n+1} = \Phi_a^{n+1} - \Phi_a^n ; \ \text{DFIT}^{n+1} = \Phi_t^{n+1} - \Phi_t^n, \tag{25}$$

ecuațiile (24) capătă forma :

$$\Delta T_a \Delta \, \text{DFIA}^{n+1} - G \cdot \text{DFIT}^{n+1} + G \cdot \text{DFIA}^{n+1} = - \Delta T_a \Delta \Phi_a^n - b_a \Phi_a, \tag{26}$$

$$\Delta T_t \Delta \, \text{DFIT}^{n+1} + G \cdot \text{DFIT}^{n+1} - G \cdot \text{DFIA}^{n+1} = - \Delta T_t \, \Delta \Phi_t^n + b_t \cdot Q_t, \tag{26'}$$

unde Q_a reprezintă debitul de apă extras prin sondele de producție :

$$Q_a = - \, Q_t \cdot \frac{k_a}{k_t} \cdot \frac{\mu_t}{\mu_a} \tag{27}$$

sau debitul de injecție, injectat prin sondele de injecție.

Din (26), notînd reziduurile :

$$RA = \Delta T_a \, \Delta \Phi_a + b_a \cdot Q_a ; \ RT = \Delta T_t \, \Delta \Phi_t^n - b_t \cdot Q_t \tag{28}$$

şi dezvoltînd pentru fiecare nod (i, j), se obţine un sistem algebric generat de ecuaţiile :

$$T^n_{a\,i-\frac{1}{2},j}\cdot \mathrm{DFIA}^{n+1}_{i-1,j} + T^n_{a\,i,j-\frac{1}{2}}\,\mathrm{DFIA}^{n+1}_{i,j-1} - (\Sigma T^n_{a_{i,j}} - G)\cdot \mathrm{DFIA}^{n+1}_{i,j} + \tag{29}$$

$$+ T^n_{a\,i+\frac{1}{2},j}\cdot \mathrm{DFIA}^{n+1}_{i,j} + T^n_{a\,i,j+\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{DFIA}^{n+1}_{i,j+1} - G\cdot \mathrm{DFIT}^{n+1}_{i,j} = -RA,$$

$$T^n_{t\,i-\frac{1}{2},j}\cdot \mathrm{DFIT}^{n+1}_{i-1,j} + T^n_{t\,i,j-\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{DFIT}^{n+1}_{i,j-1} - (\Sigma T^n_{t_{i,j}} - G)\cdot \mathrm{DFIT}^{n+1}_{i,j} + \tag{29'}$$

$$+ T^n_{t\,i+\frac{1}{2},j}\cdot \mathrm{DFIT}^{n+1}_{i+1,j} + T^n_{t\,i,j+\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{DFIT}^{n+1}_{i,j+1} - G\cdot \mathrm{DFIA}^{n+1}_{i,j} = -RT,$$

ecuaţii care conţin fiecare cîte şase necunoscute (necunoscutele din nodul (i, j) şi cele din nodurile vecine) şi unde s-a notat :

$$\Sigma T^n_{f_{i,j}} = T^n_{f\,i-\frac{1}{2},j} + T^n_{f\,i,j-\frac{1}{2}} + T^n_{f\,i+\frac{1}{2},j} + T^n_{f\,i,j+\frac{1}{2}}, \quad f = a, t. \tag{30}$$

Acest sistem de ecuaţii poate fi rezolvat prin diferite metode, de obicei iterative. Întrucît din rezolvarea sistemului de ecuaţii rezultă implicit presiunile în fiecare fază, care sînt legate prin intermediul presiunii capilare de saturaţie, înseamnă că şi saturaţiile sînt calculate indirect tot implicit. Din acest motiv metoda aceasta a luat denumirea de metoda soluţionării simultane (metoda SS) [4, 5, 6].

Mai jos este redată principala metodă iterativă pentru metoda SS (metoda Gauss-Seidel), cît şi o variantă perfecţionată a metodei SS, denumită metoda soluţionării simultane prin ecuaţii cuplate (metoda SSEC) [7].

3. SISTEMUL DE ECUAŢII ŞI SOLUŢIONAREA SIMULTANĂ PRIN METODA GAUSS-SEIDEL (METODA SS)

Ecuaţiile (29) scrise în fiecare nod interior (i, j) al reţelei de discretizare, generează un sistem de ecuaţii cu matrice bloc pendatiagonală, în care ecuaţiile pentru fiecare fază apar succesiv. Aplicînd metoda Gauss-Seidel pentru fiecare din ecuaţiile sistemului se obţin relaţiile iterative de recurenţă pentru estimarea succesivă a necunoscutelor $\mathrm{DFIA}_{i,j}$ şi $\mathrm{DFIT}_{i,j}$, astfel :

$$\mathrm{DFIA}^{\nu+1}_{i,j} = (\mathrm{RA} + T^n_{a\,i-\frac{1}{2},j}\cdot \mathrm{DFIA}^{\nu+1}_{i-1,j} + T^n_{a\,i,j-\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{DFIA}^{\nu+1}_{i,j-1} + \tag{31}$$

$$+ T^n_{a\,i+\frac{1}{2},j}\cdot \mathrm{DFIA}^{\nu}_{i+1,j} + T^n_{a\,i,j+\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{DFIA}^{\nu}_{i,j+1} - G\cdot \mathrm{DFIT}^{\nu}_{i,j})/(\Sigma T^n_{a_{i,j}} - G),$$

$$\mathrm{DFIT}_{i,j}^{\nu+1} = (RT + T_{t\,i-\frac{1}{2},j}^{n} \cdot \mathrm{DFIT}_{i-1,j}^{\nu+1} + T_{t\,i,j-\frac{1}{2}}^{n} \cdot \mathrm{DFIT}_{i,j-1}^{\nu+1} +$$

$$+ T_{t\,i+\frac{1}{2},j}^{n} \cdot \mathrm{DFIT}_{i+1,j}^{\nu} + T_{t\,i,j+\frac{1}{2}}^{n} \cdot \mathrm{DFIT}_{i,j+1}^{\nu} - G \cdot \mathrm{DFIA}_{i,j}^{\nu+1})/(\Sigma T_{t_{i,j}}^{n} - G), \tag{31'}$$

unde ν este un nivel de iterație cunoscut.

Procesul iterativ continuă pînă cînd sînt îndeplinite condițiile de convergență, putîndu-se face apoi reinițializarea.

4. METODA PERFECȚIONATĂ DE SOLUȚIONARE SIMULTANĂ PRIN ECUAȚII CUPLATE (METODA SSEC)

Așa cum rezultă din metoda iterativă clasică de rezolvare a sistemelor generate de curgerile multifazice, fiecare din ecuațiile sistemului este tratată separat, neținîndu-se cont de interdependența presiunilor de fază din fiecare nod. Aceasta conduce la o propagare diferită a erorilor în fiecare ecuație care afectează valoarea saturației calculată implicit în funcție de aceste presiuni. Ca atare, pentru creșterea ratei de convergență se impune tratarea simultană a celor două ecuații, considerîndu-le ca formînd un subsistem al sistemului general (7).

Astfel, matriceal, ecuațiile (29) se mai pot scrie sub forma :

$$\begin{vmatrix} T_{a\,i-\frac{1}{2},j}^{n} & 0 \\ 0 & T_{t\,i-\frac{1}{2},j}^{n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{DFIA} \\ \mathrm{DFIT} \end{vmatrix}_{i-1,j}^{n+1} + \begin{vmatrix} T_{a\,i,j-\frac{1}{2}}^{n} & 0 \\ 0 & T_{t\,i,j+\frac{1}{2}}^{n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{DFIA} \\ \mathrm{DFIT} \end{vmatrix}_{i,j-1}^{n+1} -$$

$$- \begin{vmatrix} \Sigma T_{a_{i,j}}^{n} - G & G \\ G & \Sigma T_{t_{i,j}}^{n} - G \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{DFIA} \\ \mathrm{DFIT} \end{vmatrix}_{i,j}^{n+1} + \begin{vmatrix} T_{a\,i+\frac{1}{2},j}^{n} & 0 \\ 0 & T_{t\,i+\frac{1}{2},j}^{n} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \mathrm{DFIA} \\ \mathrm{DFIT} \end{vmatrix}_{i+1,j}^{n+1} + \begin{vmatrix} T_{a\,i,j+\frac{1}{2}}^{n} & 0 \\ 0 & T_{t\,i,j+\frac{1}{2}}^{n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathrm{DFIA} \\ \mathrm{DFIT} \end{vmatrix}_{i,j+1}^{n+1} = - \begin{vmatrix} RA \\ RT \end{vmatrix} \tag{32}$$

sau

$$T_{i-\frac{1}{2},j}^{n} \cdot \mathrm{DFI}_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j-\frac{1}{2}}^{n} \cdot \mathrm{DFI}_{i,j-1}^{n+1} - S_{i;j}^{n} \cdot \mathrm{DFI}_{i,j}^{n+1} + T_{i+\frac{1}{2},j}^{n} \cdot$$

$$\cdot \mathrm{DFI}_{i+1,j}^{n+1} + T_{i,j+\frac{1}{2}}^{n} \cdot \mathrm{DFI}_{i,j+1}^{n+1} = - R, \tag{33}$$

unde, evident, s-a notat:

$$\mathrm{DFI}^{n+1}_{i,j} = \begin{vmatrix} \mathrm{DFIA} \\ \\ \mathrm{DFIT} \end{vmatrix}^{n+1}_{i,j}, \quad S^n_{i,j} = \begin{vmatrix} \Sigma T^n_{a_{i,j}} - G & G \\ \\ G & \Sigma T^n_{t_{i,j}} - G \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} RA \\ \\ RT \end{vmatrix} \text{ etc.}$$

Pentru aplicarea metodei Gauss-Seidel, din (33), pentru nivelul ν de iterație, se scrie:

$$\mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i,j} = (R + T^n_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i-1,j} + T^n_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i,j-1} + T^n_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu}_{i+1,j} + \tag{34}$$

$$+ T^n_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu}_{i,j+1}) \cdot \mathrm{SINV}^n_{i,j},$$

unde $\mathrm{SINV}^n_{i,j}$ este inversa matricei $S^n_{i,j}$.

Fie

$$\det S^n_{i,j} = (\Sigma T^n_{a_{i,j}} - G) \cdot (\Sigma T^n_{t_{i,j}} - G) - G^2$$

valoarea determinantului $S^n_{i,j}$. Atunci

$$\mathrm{SINV}^n{}_{i,j} = \begin{vmatrix} \dfrac{\Sigma T^n_{t_{i,j}} - G}{\det S^n_{i,j}} & \dfrac{-G}{\det S^n_{i,j}} \\ \\ \dfrac{-G}{\det S^n_{i,j}} & \dfrac{\Sigma T^n_{t_{i,j}} - G}{\det S^n_{i,j}} \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Pe de altă parte, din (34) se poate scrie:

$$BK = R + T^n_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i-1,j} + T^n_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i,j-1} + T^n_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu}_{i+1,j} +$$

$$+ T^n_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{DFI}^{\nu}_{i,j+1} \tag{36}$$

sau

$$BK = \begin{vmatrix} \mathrm{BAK} \\ \mathrm{BTK} \end{vmatrix}, \tag{37}$$

unde

$$\mathrm{BAK} = RA + T^n_{a_{i-\frac{1}{2},j}} \cdot \mathrm{DFIA}^{\nu+1}_{j-1;j} + T^n_{a_{i,j-\frac{1}{2}}} \cdot \mathrm{DFIA}^{\nu+1}_{i,j-1} +$$

$$+ T^n_{a_{i+\frac{1}{2},j}} \cdot \mathrm{DFIA}^{\nu}_{i+1,j} + T^n_{a_{i,j+\frac{1}{2}}} \cdot \mathrm{DFIA}^{\nu}_{i,j+1}, \tag{38}$$

$$\mathrm{BTK} = RT + T^n_{t\,i-\frac{1}{2},j}\cdot\mathrm{DFIT}^{\nu+1}_{i-1,j} + T^n_{t\,i,j-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{DFIT}^{\nu+1}_{i,j-1} + T^n_{t\,i+\frac{1}{2},j} \tag{38'}$$

$$\cdot\mathrm{DFIT}^{\nu}_{i+1,j} + T^n_{t\,i,j+\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{DFIT}^{\nu}_{i,j+1}.$$

Deci (33) se poate scrie sub forma

$$\mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i,j} = \mathrm{SINV}^n_{i,j}\cdot BK, \tag{39}$$

de unde, prin dezvoltare, rezultă :

$$\mathrm{DFIA}^{\nu+1}_{i,j} = \frac{\Sigma T^n_{t_{i,j}} - G}{\det S^n_{i,j}}\cdot\mathrm{BAK} - \frac{G}{\det S^n_{i,j}}\cdot\mathrm{BTK}, \tag{40}$$

$$\mathrm{DFIT}^{\nu+1}_{i,j} = \frac{\Sigma T^n_{a_{i,j}} - G}{\det S^n_{i,j}}\cdot\mathrm{BTK} - \frac{G}{\det S^n_{i,j}}\cdot\mathrm{BAK}. \tag{40'}$$

Fie erorile pe iterație :

$$\Sigma_a = \max_{i,j} |\mathrm{DFIA}^{\nu+1} - \mathrm{DFIA}^{\nu}|,$$

$$\Sigma_t = \max_{i,j} |\mathrm{DFIT}^{\nu+1} - \mathrm{DFIT}^{\nu}|.$$

Ca în orice proces iterativ, calculul va continua pînă cînd este îndeplinită condiția de convergență :

$$\max(\Sigma_a, \Sigma_t) \leqslant \Sigma_{admis}$$

și atunci

$$\mathrm{DFIA}^{n+1} = \mathrm{DFIA}^{\nu+1};\ \mathrm{DFIT}^{n+1} = \mathrm{DFIT}^{\nu+1},$$

după care se poate face reinițializarea :

$$\Phi^{n+1}_{a_{i,j}} = \Phi^n_{a_{i,j}} + \mathrm{DFIA}^{n+1}_{i,j},$$

$$\Phi^{n+1}_{t_{i,j}} = \Phi^n_{t_{i,j}} + \mathrm{DFIT}^{n+1}_{i,j},$$ pentru orice punct (i, j) interior rețelei.

Evident, dacă se dorește aplicarea metodei suprarelaxării succesive (S.O.R.) pentru SSEC, introducînd parametrul de suprarelaxare ω, se poate scrie :

$$\mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i,j} = \mathrm{DFI}^{\nu}_{i,j} + \omega\cdot[R + T^n_{t\,i-\frac{1}{2},j}\cdot\mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i-1;j} + T^n_{t\,i,j-\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{DFI}^{\nu+1}_{i,j-1} + \tag{41}$$

$$+ T^n_{t\,i+\frac{1}{2},j}\cdot\mathrm{DFI}^{\nu}_{i-1;j} + T^n_{t\,i,j+\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{DFI}^{\nu}_{i,j+1})\cdot\mathrm{SINV}^n_{i;j} - \mathrm{DFI}^{\nu}_{i,j}], \quad 1 \leqslant \omega < 2,$$

ceea ce, conform relaţiilor (40), se poate scrie dezvoltat :

$$DFIA_{i,j}^{\nu+1} = DFIA_{i,j}^{\nu} + \omega \cdot \left[\frac{\Sigma T_{t\,i,j}^{n} - G}{\det S_{i,j}^{n}} \cdot BAK - \frac{G}{\det S_{i,j}^{n}} \cdot BTK - DFIA_{i,j}^{\nu} \right], \tag{42}$$

$$DFIT_{i,j}^{\nu+1} = DFIT_{i,j}^{\nu} + \omega \cdot \left[\frac{\Sigma T_{a\,i,j}^{n} - G}{\det S_{i,j}^{n}} \cdot BTK - \frac{G}{\det S_{i,j}^{n}} \cdot BAK - DFIT_{i,j}^{\nu} \right]. \tag{42'}$$

5. APLICAŢIE

Fie un zăcămînt de lungime 180 m, lăţime 10 m şi grosime 10 m, peste care se suprapune o reţea de discretizare cu pasul $\Delta x = 10$ m şi $\Delta y = 10$ m (fig. 5).

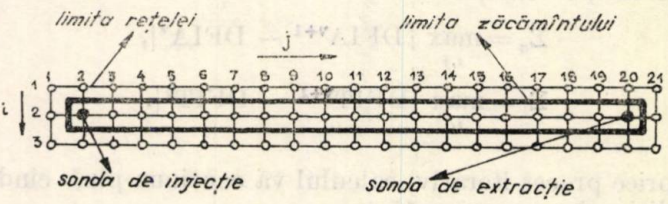


Fig. 5. — Reţeaua de discretizare asociată zăcămîntului de tip carotă.

La un capăt al zăcămîntului se află o sondă de debit $Q_{inj} = 10$ m^3/zi, iar la celălalt capăt o sondă de extracţie care produce 10 m^3/zi lichid (ţiţei pînă la pătrunderea frontului de dezlocuire, iar apoi ţiţei + apă) în scopul menţinerii bilanţului debit fluid injectat egal cu debit fluid extras.

Zăcămîntul de porozitate $m = 0{,}2$ şi permeabilitate absolută $K = 0{,}5$ D, este saturat iniţial uniform cu apă de saturaţie $S_{ai} = 0{,}2$ şi ţiţei $S_{to} = 0{,}8$. Presiunea iniţială de zăcămînt este 100 at în faza ţiţei.

Avînd în vedere că teoria clasică Buckley-Leverett nu ia în considerare presiunea capilară, pentru a face posibilă compararea soluţiei numerice cu soluţia analitică, a fost utilizată o variaţie fictivă de presiune capilară cu saturaţie normalizată S avînd o alură liniară şi cu valori mici pentru P_c (fig. 6).

Proprietăţile mediului fluid asigură incompresibilitatea sistemului la fel ca în teoria Buckley-Leverett astfel că se consideră :

$$b_a = 1\,;\; b_t = 1\,;\; \mu_a = 1 \text{ cP}\,;\; \mu_t = 1 \text{ cP}\,;$$

$$\rho_a = 1 \text{ kg/m}^3\,;\; \rho_t = 1 \text{ kg/m}^3.$$

Zăcămîntul este orizontal, astfel că $z_{i,j} = 0$ pentru orice nod (i, j). Se mai consideră saturația ireductibilă în faza țiței $S_{t_{ir}} = 0$.

Permeabilitățile relative sînt cele date în figura 7, care se pot exprima prin relațiile analitice empirice :

$$k_a = \left[\frac{S_a - S_{a_i}}{1 - S_{a_i}}\right]^3; \quad k_t = \left[\frac{1 - S_a - S_{a_i}}{1 - S_{a_i} - S_{t_{ir}}}\right]^4.$$

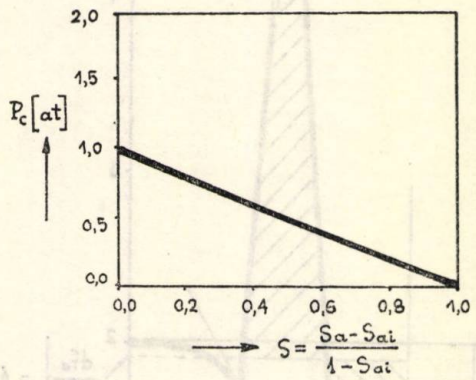


Fig. 6. — Variația fictivă a presiunii capilare P_c cu saturația normalizată S.

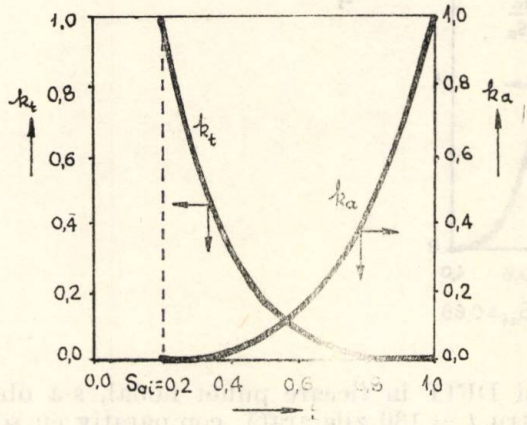


Fig. 7. — Curbele de permeabilitate relativă de fază.

Conform teoriei Buckley-Leverett [8, 9, 10] a fost construită variația fracției de apă în curent f_a cu saturația S_a și variația $\frac{df_a}{dS_a}$ cu S_a (fig. 8), care de fapt conduce la aflarea profilului de saturație în lungul carotei la diferite momente de calcul, adică la aflarea variației $S_a(x, t)$, conform relației :

$$x|_{S_a} = \frac{Q_{inj}}{m \cdot H \cdot \Delta y} \cdot \left.\frac{df_a}{dS_a}\right|_{S_a} \cdot t.$$

Aplicaţia a fost executată în două variante şi anume, una pentru cazul metodei SS şi alta pentru cazul metodei SSEC.

Cu datele de mai sus, utilizînd în primul rînd metoda SS în varianta clasică, respectiv utilizînd ecuaţiile (31) conform metodei Gauss-Seidel

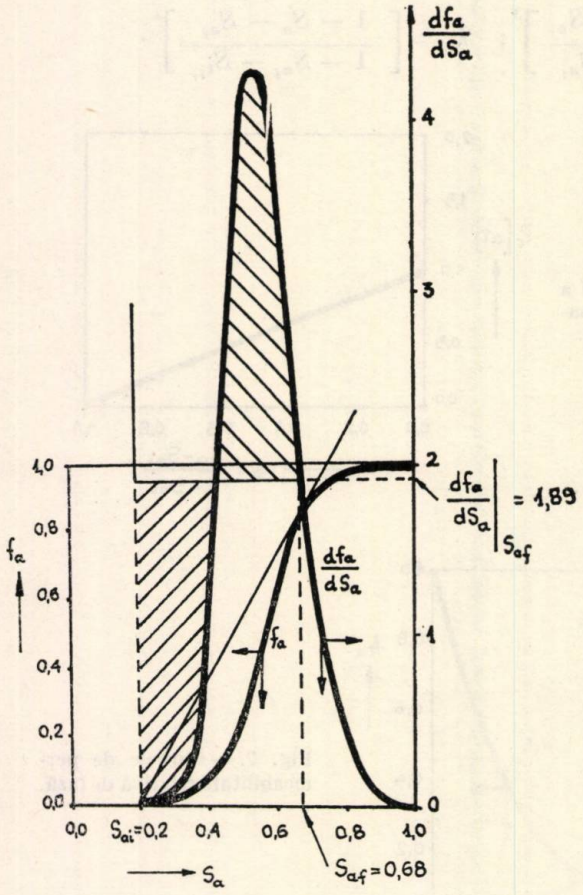


Fig. 8. — Variaţia f_a şi $\frac{df_a}{dS_a}$ cu S_a conform teoriei Buckley-Leverett.

pentru calculul lui DFIA şi DFIT în fiecare punct nodal, s-a obţinut o soluţie numerică care pentru $t = 130$ zile arată, comparativ cu soluţia analitică, după cum este reprezentată în figura 9.

Întrucît ecuaţiile (31) şi (31′) au fost tratate separat, din ecuaţia (31) rezolvîndu-se iterativ DFIA, iar din ecuaţia (31′) DFIT, erorile se propagă diferit asupra acestor necunoscute. Valoarea saturaţiei în apă fiind funcţie de diferenţa dintre DFIA şi DFIT, este astfel puternic afectată de precizia soluţiei. Dat fiind că soluţia numerică este calculată cu un anumit ordin de eroare (în cazul de faţă admiţîndu-se o eroare relativă de 1‰ pentru un număr maxim de 40 iteraţii), este de presupus că rezultatele, aşa cum apar ele în figura 9, au fost puternic afectate de erorile datorită metodei de calcul. Este interesant de remarcat că sistemul de

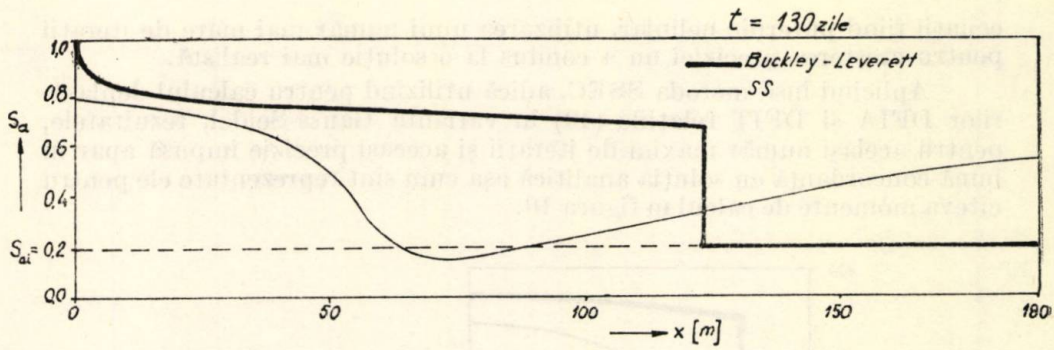


Fig. 9. — Soluția numerică a metodei SS comparativ cu soluția analitică Buckley-Leverett.

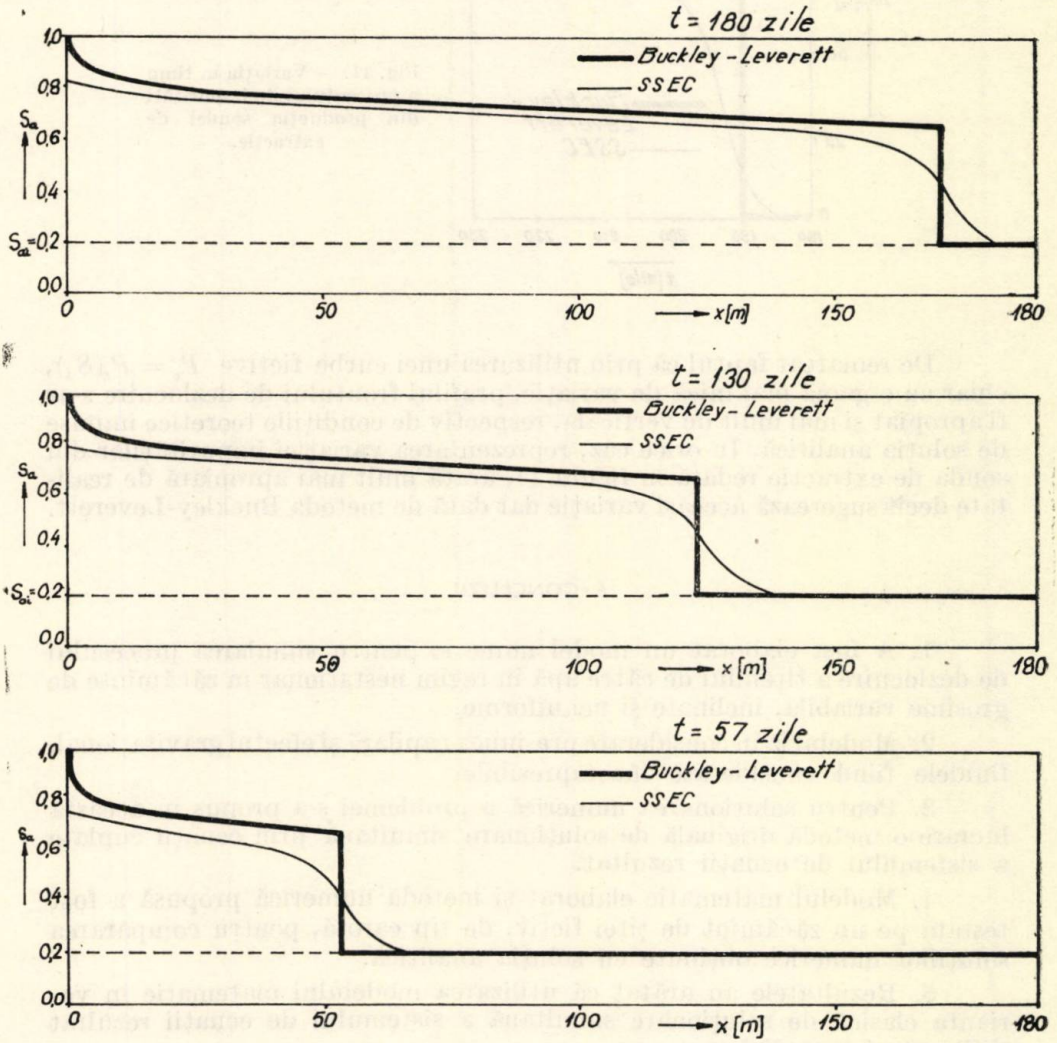


Fig. 10. — Soluția numerică a metodei SSEC comparativ cu soluția analitică Buckley-Leverett.

ecuații fiind puternic neliniar, utilizarea unui număr mai mare de iterații pentru creșterea preciziei nu a condus la o soluție mai realistă.

Aplicînd însă metoda SSEC, adică utilizînd pentru calculul deplasărilor DFIA și DFIT relațiile (40) în varianta Gauss-Seidel, rezultatele, pentru același număr maxim de iterații și aceeași precizie impusă apar în bună concordanță cu soluția analitică așa cum sînt reprezentate ele pentru cîteva momente de calcul în figura 10.

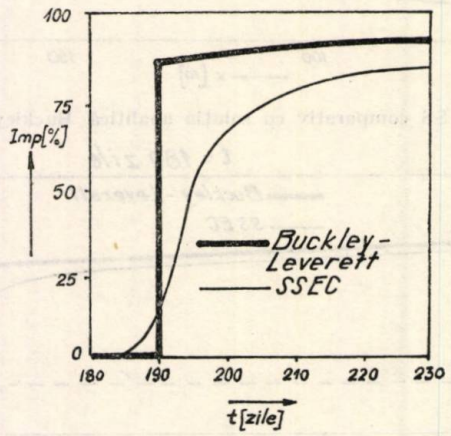


Fig. 11. — Variația în timp a procentului de impurități din producția sondei de extracție.

De remarcat faptul că prin utilizarea unei curbe fictive $P_c = P_c(S_a)$, chiar cu o gamă mai mică de variație, profilul frontului de dezlocuire s-ar fi apropiat și mai mult de verticală, respectiv de condițiile teoretice impuse de soluția analitică. În orice caz, reprezentarea variației impurităților din sonda de extracție redată în figura 11, arată mult mai apropiată de realitate decît sugerează aceeași variație dar dată de metoda Buckley-Leverett.

6. CONCLUZII

1. A fost elaborat un model numeric pentru simularea procesului de dezlocuire a țițeiului de către apă în regim nestaționar în zăcăminte de grosime variabilă, înclinate și neuniforme.

2. Modelul ia în considerare presiunea capilară și efectul gravitațional, fluidele fiind considerate incompresibile.

3. Pentru soluționarea numerică a problemei s-a propus în această lucrare o metodă originală de soluționare simultană prin ecuații cuplate a sistemului de ecuații rezultat.

4. Modelul matematic elaborat și metoda numerică propusă a fost testată pe un zăcămînt de țiței fictiv, de tip carotă, pentru compararea soluțiilor numerice obținute cu soluția analitică.

5. Rezultatele au arătat că utilizarea modelului matematic în varianta clasică de soluționare simultană a sistemului de ecuații rezultat (SS) este impractică.

6. Utilizarea modelului matematic în varianta propusă de soluționare simultană prin ecuații cuplate (metoda SSEC) a condus la rezultate în bună concordanță atît cu soluția analitică cît și cu realitatea simulată.

Primită la redacție la 11 noiembrie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. C. GH. POPA, *Modelarea numerică a exploatării zăcămintelor de hidrocarburi fluide*, cap. 7, în Ingineria zăcămintelor de hidrocarburi, Edit. tehnică, București, 1981.
2. I. CREȚU, *Hidraulica generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
3. G. W. THOMAS, R. R. JAGAI, *Notes on Reservoir Simulation*, University of Tulsa, 1975.
4. K. AZIZ, A. SETTARI, *Petroleum Reservoir Simulation*, Apll. Sc. Publ. Ltd., London, 1979.
5. H. B. CRICHLOW, *Modern Reservoir Engineering — A. Simulation Approach*, Prentice — Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.
6. D. W. PEACEMAN, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*, Elsevier Sc. Publ. Co., Amsterdam, Oxford, New York, 1977.
7. D. GH. PETCU, *Proiectarea exploatării unui zăcămînt de țiței*, Proiect de diplomă, I.P.G., Ploiești, 1981.
8. S. E. BUCKLEY, M. C. LEVERETT, *Mechanism of Fluid Displacements in Sands* — Trans. AIME **146**, *149* (1942).
9. H. J. WELGE, *A Simplified Method for Computing Oil Recovery by Gas or Water Drive*, Trans AIME **195**, *91* (1952).
10. A. CÂRCOANĂ și GH. ALDEA, *Mărirea factorului final de recuperare la zăcămintele de hidrocarburi*, Edit. tehnică, București, 1976.

ASUPRA CARACTERISTICII HIDRAULICE ($H-Q$) ŞI A INFLUENŢELOR PRESIUNII ŞI TEMPERATURII ÎN POMPAREA SUCCESIVĂ DE PRODUSE PETROLIERE

de T. OROVEANU, B. SIRO
Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Se stabileşte caracteristica hidraulică (H—Q) comună a sistemului pompă-conductă la pomparea succesivă a două produse sub forma unei ecuaţii în q (debit) a cărei rezolvare se poate efectua printr-una din metodele iterative. Efectele presiunii din conductă şi a temperaturii produselor, în cazul pompării succesive, se includ în ecuaţia caracteristicii hidraulice (H—Q) comune prin considerarea unui diametru efectiv determinat pe baza diametrului calibrat al conductei şi al efectelor respective. Se analizează şi cazul mai multor produse ($n > 2$) aflate simultan pe conductă în pompare succesivă şi se propune o schemă logică bloc pentru rezolvarea problemei în acest caz.

1. INTRODUCERE

În tratarea unor probleme de optim, dar şi în alte probleme hidraulice, privind transportul succesiv de produse petroliere, trebuie determinate în mod curent unele debite cum sînt : debitul cu care se pompează un anumit produs P_j, debitul cu care se pompează o pereche adiacentă de produse din cadrul unui ciclu, atunci cînd o anumită secţiune a zonei lor de amestec a ajuns la o anumită distanţă de capătul iniţial al conductei de transport, debitul unui produs pe diverse tronsoane ale conductei etc. Aceste debite se pot găsi, în mod obişnuit, din caracteristica hidraulică ($H-Q$) comună a sistemului pompă-conductă, care se obţine realizînd bilanţul presiunilor produse de pompele montate pe conductă, respectiv al pierderilor de presiune din conductă datorate rezistenţelor hidraulice, la care se mai adaugă unii termeni privind presiunile iniţiale ale pompelor (la aspiraţie), presiunea finală pe conductă etc. În ultimă instanţă însă, această caracteristică hidraulică comună poate fi prezentată sub forma unui polinom în q, de un anumit grad, în care q reprezintă debitul în sistemul pompă-conductă considerat. După rezolvarea ecuaţiei corespunzătoare se determină q cu ajutorul căruia apoi se pot determina alţi parametri principali privind transportul succesiv de produse.

2. CARACTERISTICA HIDRAULICĂ ($H-Q$) COMUNĂ A SISTEMULUI POMPĂ-CONDUCTĂ CU DOUĂ PRODUSE AFLATE ÎN POMPARE SUCCESIVĂ

Se consideră un tronson de conductă de lungime L_c şi diametrul d, cu profilul longitudinal dat de mulţimea perechilor de coordonate :

$$(x_i, z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Reprezentarea acestui model de profil (cu unele detalii) este dată în figura 1.

Se admite că, în procesul pompării succesive, pe conductă se găsesc simultan două produse P_k, P_j $(k = j + 1)$, adiacente în cadrul unui ciclu de pompare, porțiunea $l_k = l_x$ din conductă (luată de la capătul inițial

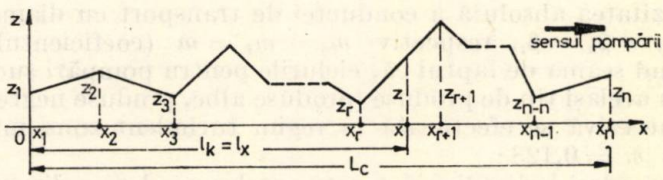


Fig. 1

al conductei în sensul pompării produselor) fiind deja umplută cu produsul P_k. Realizînd bilanțul pierderilor hidraulice de presiune și al presiunilor de pompare pentru această stare a sistemului pompă-conductă, se poate scrie

$$H_i(1 - N_p) + N_p\left[h_1^k K_H^k + h_2^k \frac{(K_H^k)^{-1/2}}{M_p} q(x) + h_3^k \frac{(K_H^k)^{-2}}{M_q^2} q^2(x)\right] =$$

$$= \frac{\beta_l}{d^{5-m}} \nu_k^m l_x q^{2-m}(x) + \frac{\beta_l}{d^{5-m}} \nu_j^m \frac{\gamma_j}{\gamma_k} (L_c - l_x)\, q^{2-m}(x) + H_z + (H_f + \Delta H_s)\frac{\gamma_j}{\gamma_k}, \quad (2)$$

în care am notat:

ν_j, γ_j; ν_k, γ_k — viscozitatea cinematică și greutatea specifică pentru produsul P_j, respectiv P_k;

H_i, H_f — înălțimea de pompare inițială (la aspirația pompelor) și finală;

N_p, M_p — numărul de pompe montate în serie, respectiv în paralel în casa de pompe;

ΔH_s — pierderile hidraulice datorate separatoarelor mecanice (dacă se utilizează);

K_H^k — coeficientul de corecție pentru înălțimea de pompare, la pomparea produsului P_k; s-a ținut seama de faptul că viteza specifică a pompelor se păstrează constantă la pomparea diverselor produse (la turație constantă) [1] și că deci se poate considera

$$K_Q^k = (K_H^k)^{3/2}, \quad (3)$$

în care K_Q^k este coeficientul de corecție pentru debit la pomparea produsului P_k;

β_l factorul lui L. S. Leibenson din relația pierderilor hidraulice, care după [2] are expresia

$$\beta_l = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2-m} \frac{A}{2g}, \quad (4)$$

coeficientul A fiind dat de relația

$$A = 10^{0,127 \log \frac{k}{d} - 0,627}, \tag{5}$$

k fiind rugozitatea absolută a conductei de transport cu diametrul d; se consideră $\beta_j = \beta_k = \beta_l$, respectiv $m_j = m_k = m$ (coeficientul lui Leibenson) ținînd seama de faptul că, ciclurile pentru pompări succesive sînt alcătuite din același tip de produse (produse albe, produse negre), iar pomparea lor succesivă se efectuează în regim turbulent zona intermediară pentru care $m = 0,123$;

H_z — pierderi hidraulice datorate cotelor geodezice din profilul longitudinal al conductei, pentru care putem scrie

$$H_z = (z - z_{ic}) + (z_{fc} - z)\frac{\gamma_j}{\gamma_k}, \tag{6}$$

$z_{ic} = z_1$, $z_{fc} = z_n$ fiind cotele geodezice ale capetelor conductei, iar z cota geodezică corespunzătoare lungimii l_x (fig. 1). Dacă se consideră o variație liniară a pantei geometrice a profilului longitudinal al conductei pe porțiunea $(x_r \ldots x_{r+1})$ și faptul că $x_r \leqslant l_x \leqslant x_{r+1}$; $\gamma = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, atunci parametrul z din (6) poate fi exprimat în funcție de l_x cu relația:

$$z = z_r + (z_{r+1} - z_r)\frac{l_x - x_r}{x_{r+1} - x_r}. \tag{7}$$

Ca urmare, formula (6) devine

$$H_z = \frac{z_{r+1} - z_r}{x_{r+1} - x_r}\left(1 - \frac{\gamma_j}{\gamma_k}\right) l_x + \frac{z_{r+1} - z_r}{x_{r+1} - x_r}\left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right) x_r -$$

$$- (z_r - z_{fc})\frac{\gamma_j}{\gamma_k} + (z_r - z_{ic}) \tag{8}$$

și ne arată că H_z este o funcție de timp pentru că și l_x depinde de timp. În această ordine de idei, se poate menționa că și debitul $q(x)$ din (2) depinde de fapt de timp. Tot în legătură cu relația (2), este neecesar să se precizeze că expresia înălțimii de pompare produsă de pompe se referă la pompe centrifuge, deoarece la pomparea succesivă a produselor petroliere sistemul de pompare cel mai utilizat este cel „din pompă în pompă", în care caz se utilizează tipul de pompe menționat. Caracteristica internă a pompelor centrifuge a fost considerată de forma

$$H_p^k = h_1^k K_H^k + h_2^k (K_H^k)^{-1/2} q + h_3^k (K_H^k)^{-3/2} q^2 \tag{9}$$

(la pomparea produsului P_k), expresie care conduce la o eroare mult mai mică față de caracteristica reală trasată experimental, spre deosebire de

aceeași caracteristică scrisă de specialiștii în transport de produse prin conducte [3], [4], [5].

$$H = a_0 - a_1 q^{2-m}, \tag{10}$$

care caută să simplifice, în acest fel, relația de bilanț de tip (2) (avînd în vedere că expresia (10) este apropiată ca formă de relația lui Leibenson pentru pierderile hidraulice pe conductă), deși această expresie pentru caracteristica internă a pompelor centrifuge dă erori mai mari față de cea reală.

Dacă în relația (2) se operează cu factorul $g/n^2 \cdot D_2^2$ (n — turația nominală a pompei utilizate, D_2 — diametrul exterior al rotorului pompei), atunci se obține

$$\frac{gH_i(1 - N_p)}{n^2 D_2^2} + h_{1s}^k + h_{2s}^k q_s(x) + h_{3s}^k q_s^2(x) =$$

$$= \frac{\beta_l}{d^{5-m}} \nu_k^m l_x g n^m D_2^{4-3m} q_s^{2-m}(x) + \frac{\beta_l}{d^{5-m}} \nu_j^m \frac{\gamma_j}{\gamma_k} (L_c - l_x) g n^m D_2^{4-3m} q_s^{2-m}(x) +$$

$$+ \frac{gH_z}{n^2 D_2^2} + \frac{g\gamma_j}{n^2 D_2^2 \gamma_k} (H_f + \Delta H_s), \tag{11}$$

unde s-a ținut seama de expresiile înălțimii de pompare specifice și a debitului specific [6], toți coeficienții și parametrul $q_s(x)$ devenind astfel adimensionali.

Așa cum am mai menționat, $q_s(x)$ este o funcție de timp și printre problemele esențiale din cadrul transportului succesiv de produse se situează stabilirea relației de variație a debitului în funcție de timp la „schimbarea", pe tronsonul dat de conductă, a produsului P_j cu produsul P_k și apoi determinarea timpului necesar acestei schimbări de produse. Cunoscînd o expresie de tipul $q_s = f(t)$, se poate stabili variația presiunilor în timp, ca și limitele acestei variații, la schimbarea perechii de produse $P_j - P_k$, care constituie elemente importante pentru reglajul presiunilor în cazul pompării succesive de produse dar și pentru o eventuală automatizare a acestui reglaj. De asemenea, cu o relație $q_s = f(t)$ se pot determina consumurile energetice la „schimbarea" celor două produse, ținînd seama că timpul consumat pentru schimbarea produselor poate avea, în anumite situații, o pondere mare în raport cu timpul total consumat la pomparea produselor dintr-un ciclu.

Pentru determinarea unei relații $q_s = f(t)$, V. A. Iufin în [3], plecînd de la o relație de tip (11) mai simplă (utilizează pentru caracteristica internă a unei pompe centrifuge o relație de tip (10)), propune schimbarea de variabilă

$$l_x(t) = \int_0^\tau v(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \frac{4}{\pi d^2} \int_0^\tau q_s(\tau)\, \mathrm{d}\tau = a V_k(t) \tag{12}$$

în care $a = 4/\pi d^2$, iar $V_k(t)$ reprezintă volumul conductei date umplut cu produsul P_k pînă în momentul t. Utilizînd în (11) schimbarea de variabilă din (12), se obţine o ecuaţie diferenţială de forma

$$a_1\left(\frac{dV_k(t)}{dt}\right)^2 + [a_2 V_k(t) - a_3]\left(\frac{dV_k(t)}{dt}\right)^{2-m} + \\ + a_4\frac{dV_k(t)}{dt} + a_5 V_k(t) + a_6 = 0, \tag{13}$$

în care s-au introdus următoarele notaţii:

$$a_1 = h_{3s}^k; \quad a_2 = -\frac{a\beta_l}{d^{5-m}}\left[\nu_j^m\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - \nu_k^m\right]; \quad a_3 = \frac{\beta_l}{d^{5-m}}\nu_j^m\frac{\gamma_j}{\gamma_k}L_c;$$

$$a_4 = h_{2s}^k; \quad a_5 = \frac{ag}{n^2D_2^2}\frac{z_{r+1} - z_r}{x_{r+1} - x_r}\left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right);$$

$$a_6 = h_{1s}^k + \frac{g}{n^2D_2^2}\left[\frac{H_i(1 - N_p)\gamma_k - (H_f + \Delta H_s)\gamma_j}{\gamma_k} - \right.$$

$$\left. - \frac{z_{r+1} - z_r}{x_{r+1} - x_r}\left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1\right)x_r + (z_r - z_{fc})\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - (z_r - z_{lc})\right]. \tag{14}$$

Ecuaţia diferenţială (13) ca şi cea obţinută de V. A. Iufin în [3] (sau cea obţinută în [11]) nu poate fi rezolvată pe cale analitică. Abia după unele simplificări, care introduc evident erori suplimentare, se obţine o soluţie analitică, respectiv relaţia funcţională $q = f(t)$.

Referindu-ne la rezolvarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (13) se pune problema discretizării parametrului $V_k(t)$, care nu pune probleme deosebite, ţinînd seama că se poate nota

— la timpul $t = 0$, $V_k(0) = 0$,

— la timpul $t = T_c$, $V_k(T_c) = \frac{\pi d^2}{4}L_c$. (15)

Din cele anterioare rezultă deci că pentru un diametru dat d al conductei de transport, discretizarea parametrului $V_k(t)$ se reduce de fapt la discretizarea lungimii conductei, adică la „segmentarea" (eventual cu un pas constant Δx) a profilului longitudinal al conductei. Ideal ar fi ca aceste coordonate ale profilului să corespundă aunui anumit „pas de discretizare" prestabilit ($\Delta x = x_{r+1} - x_r = \text{const.}$)

În acest fel, operînd discretizarea variabilei $V_k(t)$ în cadrul ecuației (13), se obține

$$a_1\left[\frac{V_{ki}(t_i)-V_{k(i-1)}(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right]^2+(a_2V_{ki}(t_i)-a_3)\left[\frac{V_{ki}(t_i)-V_{k(i-1)}(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}\right]^{2-m}+$$

$$+a_4\frac{V_{ki}(t_i)-V_{k(i-1)}(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}+a_5V_{ki}(t_i)+a_6=0. \tag{16}$$

Se poate remarca însă că pentru un pas de discretizare dat $\Delta x = \text{const.}$ al profilului longitudinal, discretizarea volumului $V_k(t)$ se reduce de asemenea la o constantă

$$V_{ki}(t_i)-V_{k(i-1)}(t_{i-1})=\frac{\pi d^2}{4}\Delta x=\text{const.}=k_v, \tag{17}$$

iar cu considerarea unor diferențe de acest fel pentru $i=1, 2, \ldots, n$ se determină [12]

$$V_{ki}(t_i)=ik_v. \tag{18}$$

Dacă se notează $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$, atunci (16) devine

$$a_1\frac{k_v^2}{(\Delta t_i)^2}+[a_2ik_v-a_3)]\frac{k_v^{2-m}}{(\Delta t_i)^{2-m}}+a_4\frac{k_v}{\Delta t_i}+a_5ik_v+a_6=0. \tag{19}$$

Din (19) se poate determina elementul discret de timp Δt_i, care reprezintă de fapt timpul necesar pentru umplerea conductei cu un volum k_v din produsul P_k, în condițiile pompării succesive a produselor P_j, P_k $(k=j+1)$, la pasul de indice i al acestei operațiuni, efectuate în cadrul unui sistem dat de pompă-conductă.

Înainte de a trata rezolvarea ecuației din (19) ne vom referi la cîteva aspecte legate de discretizarea profilului longitudinal al conductei și de mulțimea perechilor de coordonate date ale aceluiași profil. Astfel, după i pași de discretizare ne putem situa în punctul A (fig. 2) al profilului, fapt care ne arată că termenii 4 și 5 din (19) depind de mărimea pasului Δx, de indicele pasului i și de mulțimea perechilor de coordonate corespunzătoare profilului. Pe de altă parte, realizînd al $(i+1)$-lea pas, este posibil să se depășească perechea de coordonate $(x_{r+1}; z_{r+1})$ (fig. 2) în care de fapt se produce modificarea pantei geometrice a profilului longitudinal, ceea ce nu ar avea o importanță deosebită, cu singura restricție clasică

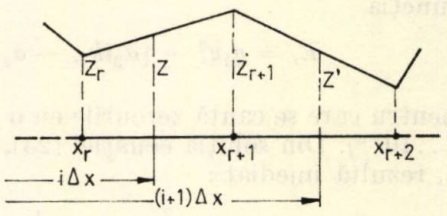


Fig. 2

$$i_h x_{r+1} \geqslant z_{r+1}; \quad r=1, 2, \ldots, N-1, \tag{20}$$

(i_h — panta hidraulică) a cărei verificare se presupune că s-a efectuat. În practică însă, dacă este absolut necesar, se poate realiza o discretizare

a profilului longitudinal al conductei astfel încît în mulțimea indicilor coordonatelor profilului discretizat I să fie cuprinsă mulțimea indicilor coordonatelor profilului real $N(N \subset I)$, determinîndu-se de fiecare dată pasul de discretizare $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i - i \in I$ și, respectiv, constanta k_{vi}. Coeficienții a_5 și a_6 din (19) se pot scrie în acest caz

$$a_5 = \frac{ag}{n^2 D_2^2} \xi(r, r+1) \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right),$$

$$a_6 = h_{1s}^k + \frac{g}{n^2 D_2^2} \left[\frac{H_i(1 - N_p)\gamma_k - (H_f + \Delta H_i)\gamma_j}{\gamma_k} - \right.$$

$$\left. - \xi(r, r+1) \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) x_r + (z_r - z_{fc}) \frac{\gamma_j}{\gamma_k} - (z_r - z_{ic}) \right], \qquad (21)$$

unde

$$\xi(r, r+1) = \frac{z_{r+1} - z_r}{x_{r+1} - x_r} \begin{cases} = 0 \quad \text{pentru} \sum_{s=1}^{i} \Delta x_s = x_{r+1}, \\ \neq 0 \quad \text{pentru} \; x_r < \sum_{s=1}^{i} \Delta x_s < x_{r+1}. \end{cases} \qquad (22)$$

Cu considerațiile anterioare, ecuația (19) poate fi privită ca o relație generală pentru problema dată și după o schimbare de variabilă de tipul $y_i = k_{vi}/\Delta t_i$ ea poate fi scrisă sub forma

$$a_1 y_i^2 + [a_2 i k_{vi} - a_3] y_i^{2-m} + a_4 y_i + a_5 i k_{vi} + a_6 = 0. \qquad (23)$$

Rezolvarea acestei ecuații se poate face numeric (pentru fiecare pas de discretizare) printr-o metodă iterativă convenabilă, definind eventual funcția

$$E_i = a_1 y_i^2 + [a_2 i k_{vi} - a_3] y_i^{2-m} + a_4 y_i + a_5 i k_{vi} + a_6, \qquad (24)$$

pentru care se caută zerourile cu o precizie suficient de mare ($\varepsilon = 10^{-3} \ldots 10^{-6}$). Din soluția ecuației (23), pentru pasul de discretizare de indice i, rezultă imediat:

$$\Delta t_i = \frac{k_{vi}}{y_i} = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\Delta x_i}{y_i}. \qquad (25)$$

Pe de altă parte, ținînd seama de expresia lui k_v, se poate observa că y_i reprezintă debitul cu care lucrează sistemul dat pompă-conductă cînd produsul P_k a parcurs primii i pași de discretizare din profilul longitudinal al conductei. În acest fel se poate obține caracteristica

$$q_r^k = f(t_r); \qquad r \in I; \qquad (26)$$

în care avem

$$t_r = \sum_{s=1}^{r} \Delta t_s. \tag{27}$$

De asemenea, se poate determina durata întregului proces de „schimbare" a produsului P_j cu P_k pe conducta respectivă

$$T_{jk} = \sum_{i \in I} \Delta t_i. \tag{28}$$

Pentru a încheia corespunzător problema pusă, este necesar să mai precizăm următoarele aspecte:

a) limitele între care trebuie căutat zeroul pentru funcţia (24);

b) mărimea limită superioară pentru pasul de discretizare Δx.

Observînd că

$$q|_{t=0} = q^j, \text{ respectiv } q|_{t=T_{jk}} = q^k, \tag{29}$$

se constată imediat că $q^j \ldots q^k$ reprezintă limitele între care trebuie căutat zeroul funcţiei din (24). Determinarea debitelor q^j, q^k se poate face din ecuaţia de bilanţ în condiţiile în care se pompează numai produsul P_j, respectiv P_k.

În ceea ce priveşte mărimea limită superioară pentru pasul de discretizare Δx, se pot remarca două tendinţe: b_1) un Δx cît mai mic, pentru că în acest fel creşte precizia în rezolvarea problemei puse; b_2) un Δx cît mai mare, pentru că altfel mulţimea I creşte mult şi „timpul calculator" necesar pentru determinarea lui T_{jk} devine important. De aceea se poate pleca, eventual, de la evaluarea intervalului

$$\Delta q = |q^j - q^k|, \tag{30}$$

care poate fi discretizat convenabil — $\Delta q/n$ (n — număr întreg), iar apoi din (11) sau (2) se obţine valoarea corespunzătoare pentru Δx.

Dar concluzia cea mai importantă ce se poate desprinde din ultima parte a celor prezentate anterior este cea legată de aspectul metodologic: dacă tot nu este posibilă o soluţie analitică pentru ecuaţia diferenţială (13), atunci nu este justificată în acest caz schimbarea de variabilă din (12), pentru că printr-o soluţie numerică, similară cu cele prezentate anterior, poate fi rezolvată direct, pentru fiecare pas de discretizare, însăşi „ecuaţia de bilanţ" (11). Într-adevăr, dacă se notează

$$b_1 = h_{3s}^k; \quad b_{2i} = \frac{\beta_l}{d^{5-m}} g n^m D_2^{4-3m} \left[\nu_k^m x_i + \nu_j \frac{\gamma_j}{\gamma_k} (L_c - x_i) \right]; \quad b_3 = h_{2s}^k, \tag{31}$$

$$b_{4i} = h_{1s}^k + \frac{g}{n^2 D_2^2} \left[\frac{H_i(1-N_p)\gamma_k - (H_f + \Delta H_s)\gamma_j}{\gamma_k} + (z_i - z_{fc}) \frac{\gamma_j}{\gamma_j} - (z_i - z_{ic}) \right],$$

atunci ecuația de bilanț (11), pentru pasul de discretizare de indice i, devine :

$$b_1 q_{si}^2 - b_{2i} q_{si}^{2-m} + b_3 q_{si} + b_{4i} = 0. \tag{32}$$

Determinarea intervalului de timp Δt_i se poate face cu relația

$$\Delta t_i = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{q_i}, \tag{33}$$

iar acela al timpului total de schimbare T_{jk} al produselor se poate realiza cu ajutorul expresiei (28). Din (31) se remarcă imediat că, dintre coeficienții ecuației (32), numai b_{2i} și b_{4i} depind de pasul de discretizare ales și deci numai acești coeficienți urmează să fie recalculați la modificarea indicelui i al acestui pas.

3. ASPECTE PRIVIND INFLUENȚA PRESIUNILOR DIN CONDUCTĂ ȘI A TEMPERATURII PRODUSELOR ÎN TRANSPORTUL SUCCESIV DE PRODUSE

Literatura ce tratează problemele transportului succesiv de produse calde este destul de bogată și se referă mai ales la distribuția concentrației unui produs în zona de amestec și la stabilirea volumelor de amestec în acest caz. Astfel se pot cita lucrările [7], [8], [9] și lista bibliografică poate fi mult extinsă.

În [10] se stabilește însă influența presiunilor din conductă și a temperaturii produselor pompate asupra diametrului (volumului) conductei. Studiul menționat este legat de poziționarea cît mai exactă a separatoarelor mecanice utilizate la transportul succesiv de produse reținînd faptul că cei doi parametri au o influență destul de mare asupra volumului conductei. Totul se reduce la determinarea unui diametru efectiv al conductei în care se înglobează efectele celor doi parametri.

Astfel, din [10] avem

$$d_{ef} = d_{ic} \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\gamma_{ip}}{\gamma_{tp}} + \frac{p_x - p_{ip}}{k_0}\right) \left\{ \frac{d_{ic}}{\delta E} (p_x - p_{ic}) + [1 - \alpha(t_x - t_{ic})]^2 \right\}}, \tag{34}$$

în care s-a notat :

d_{ic} — diametrul inițial (de calibrare) al conductei ;

γ_{ip}, γ_{tp} — greutatea specifică inițială (la temperatura de rezervor) cu care începe să fie pompat produsul, respectiv la temperatura t la care ajunge produsul în timpul pompării la distanța l_x de capătul inițial al conductei ;

p_x, p_{ip} — presiunea în conductă la distanța l_x, respectiv presiunea inițială la care se găsește produsul cînd începe pomparea sa ;

k_0 — modulul de compresibilitate al produsului pompat (pentru produse petroliere după [10], $k_0 = 13500$ [kgf/cm^2)] ;

δ — grosimea peretelui conductei de transport (în cm);
E — modulul lui Young pentru materialul conductei [kgf/cm^2];
p_{ic} — presiunea inițială la care s-a executat calibrarea conductei;
α — coeficientul de dilatare liniară al materialului din care este executată conducta;
t_x, t_{ic} — temperatura conductei la distanța l_x de la capătul inițial al acesteia, respectiv temperatura la care s-a efectuat calibrarea conductei; temperatura t_x se determină cu relația din [10]

$$t_x = \frac{t_{pi} - t_s}{2} e^{-\frac{l_x}{L_c} Su}, \tag{35}$$

în care coeficientul lui Șuhov — Su — are expresia

$$Su = \frac{\pi k d_{ic} L_c}{q \gamma_{ip} C_p} = \ln \frac{t_{ic} - t_s}{t_{fp} - t_s}, \tag{36}$$

notațiile suplimentare ce apar fiind:

q — debitul produsului pe conductă;
k — coeficientul global de transfer de căldură de la produs, prin peretele conductei, la exterior;
C_p — capacitatea calorică a produsului;
t_s — temperatura solului;
t_{fp} — temperatura finală a produsului (la capătul final al conductei sau tronsonului de conductă);
t_{ic} — temperatura inițială la care s-a făcut calibrarea conductei.

Dacă se ține seama de cele anterioare și de faptul că $\gamma_{ip}/\gamma_{tp} = \rho_{ip}/\rho_{tp}$ (în care ρ este densitatea produsului), atunci relația (34) se poate scrie

$$d_{ef} = d_{ic} \sqrt{1 + \left(1 - \frac{\rho_{20} - \beta(t_{ip} - 20)}{\rho_{20} - \beta[t_s - 20 + (t_{ip} - t_s) e^{-\frac{x_r}{L_c} Su}]} + \right.}$$

$$\left. + \frac{p_x - p_{ip}}{k_0}\right) \left\{ \frac{d_{ic}}{\delta E} (p_x - p_{ic}) + \left[1 - \alpha \left(t_s - t_{ic} + \frac{t_{ip} - t_s}{2} e^{-\frac{x_r}{L_c} Su}\right)\right]^2 \right\}, \tag{37}$$

în care

$$\beta = 1{,}825 - 0{,}001313\ \rho_{20}, \tag{38}$$

β fiind coeficientul de corecție de temperatură după [5].

Din (37) rezultă că diametrul efectiv d_{ef} variază în lungul conductei în funcție de unii parametri cum sînt: presiunea din conductă, temperatura produsului etc. Dar pentru a fi luat în considerație acest element în problema transportului succesiv de produse este necesar să se cunoască temperatura sistemului la distanța x_r (ceea ce se poate determina relativ

simplu), ca și presiunea p_x la aceeași distanță. Aceasta din urmă se poate obține dintr-o relație a lui Leibenson modificată :

$$p_x = \frac{\beta_l}{d^{5-m}} \nu_{jt}^m \gamma_{jt}(L_c - x_r)\, q^{2-m} + \gamma_{jt}(H_{zx} + H_{fc}), \tag{39}$$

în care indicele j se referă la produsul P_j, iar H_{zx}, în cazul unui singur produs aflat pe conductă, are expresia

$$H_{zx} = z_{jc} - z_{ic}. \tag{40}$$

În această situație însă apare o întrebare de principiu : ce diametru trebuie luat în considerație în (39) ?

În mod normal trebuie luat diametrul efectiv al conductei, la distanța l_x de capătul inițial al acesteia. Dar aceasta înseamnă că, ținînd seama de efectele presiunii și temperaturii, expresia pierderilor de sarcină scrisă sub forma (39) nu mai este explicită în raport cu p_x, deoarece diametrul efectiv, care intră în expresia amintită, conține la rîndul său, în expresia (37), parametrul presiunii. Într-adevăr, în această situație, relația (39) trebuie transcrisă astfel :

$$p_x = \frac{\beta_l \left[\nu_{j20}\, e^{-u(t_s-20+(t_{ij}-t_s)\, e^{-\frac{x_r}{L_c}Su}}\right]^m g\left(\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_r}{L_c}Su})\right] \times}{\left[1 + \left(1 - \frac{\rho_{j20} - \beta(t_{ij} - 20)}{\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s)\, e^{-\frac{x_r}{L_c}Su})} + \frac{p_x - p_{ij}}{k_0}\right) \times \right.}$$

$$\frac{\times q^{2-m} d_{ic}^{m-5}(L_c - x_r)}{\left. \times \left\{\frac{d_{ic}}{\delta E}(p_x - p_{ic}) + \left[1 - \alpha\left(t_s - t_{ic} + \frac{t_{ip} - t_s}{2} e^{-\frac{x_r}{L_c}Su}\right)\right]^2\right\}\right]^{\frac{5-m}{2}}} +$$

$$+ (\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s)\, e^{-\frac{x_r}{L_c}Su}))\, g(H_{zx} + H_{fc}). \tag{41}$$

Analizînd expresia (41) se poate constata că ea nu reprezintă relația lui Leibenson în sensul determinării pierderilor de sarcină pe conductă și deci această expresie nu poate fi de fapt egalată cu expresia înălțimii de pompare obținute cu ajutorul unui sistem de pompare dat, pentru a stabili astfel punctul de funcționare pe caracteristica comună (H—Q) a sistemului întreg pompă-conductă. Metoda de rezolvare a unei ecuații de tip (32) este depășită în acest caz. Totuși, pentru soluționarea problemei puse, la pomparea unui produs P_j, se propune următoarea metodologie :

a) Se ia în considerație o relație de bilanț de tip (32) și prin rezolvarea acesteia se obține debitul adimensional q_{1s}^j, respectiv q_1^j.

b) Cu ajutorul lui q_1^j din caracteristica internă a sistemului de pompare se obține înălțimea de pompare H_i^j, respectiv presiunea de pompare

$$p_i^j = g H_i^j [\rho_{j20} - \beta(t_{ji} - 20)], \tag{42}$$

în care t_{ji} este temperatura inițială a produsului P_j.

c) Se determină pierderea de sarcină la distanța x_r de capătul inițial al conductei ținînd seama de efectul temperaturii, presiunii și al discretizării profilului longitudinal al conductei. Relația lui Leibenson, în acest caz, poate fi scrisă sub forma

$$H_{lx} = \frac{\beta_l}{d^{5-m}} (q_1^j)^{2-m} \sum_{v=1}^{r} (\nu_{j20} e^{-u_j(t_s-20-(t_{ij}-t_s)\, e^{-\frac{x_v}{L_c} Su})})^m (x_{v+1} - x_v), \quad (43)$$

în care u_j este panta viscozigramei produsului P_j ce se determină după [5] din relația

$$u_j = \frac{\log \frac{\nu_{j1}}{\nu_{j2}}}{t_{j2} - t_{j1}}. \quad (44)$$

d) Dacă se ține seama și de celelalte elemente ce se încadrează în pierderile de sarcină, atunci (43) devine

$$H_{lx} = \frac{\beta_l}{d^{5-m}} (q_1^j)^{2-m} \sum_{v=1}^{r} (\nu_{j20} e^{-u_j(t_s-20-(t_{ij}-t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su})})^m (x_{v+1} - x_v) +$$

$$+ (z_{r+1} - z_{ic}) + H_{fc}. \quad (45)$$

Pentru a trece la presiuni, se va ține seama de variația greutății specifice a produsului P_j de-a lungul conductei și anume

$$p_{jx} = \frac{\beta_l}{d^{5-m}} g(q_1^j)^{2-m} \sum_{v=1}^{r} [\nu_{j20} e^{-u_j(t_s-20+(t_{ij}-t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su})}]^m (x_{v+1} - x_v) \times$$

$$\times [\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su})] - g[\rho_{j20} - \beta(t_{ij} - 20)]\, z_{ic} +$$

$$+ g[\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_{r+1}}{L_c} Su})]\, z_{r+1} +$$

$$+ g[\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-Su})]\, H_{fc}. \quad (46)$$

e) Dacă se efectuează operația :

$$p_x = p_i^j - p_{jx}, \quad (47)$$

se obține presiunea pe conductă la distanța $l_x = x_r$ de capătul inițial al acesteia.

f) Utilizînd p_x din (47) se determină diametrul efectiv d_{efx} pentru pasul de discretizare de indice $r - x_{r+1} - x_r$; $r = 1, 2, \ldots, n_I - 1$.

g) Se recalculează coeficientul b_2 din ecuația de tip (32) cu relația

$$b_2 = \frac{\beta_l g n^m D_2^{4-3m}}{\rho_{j20} - \beta(t_{ij} - 20)} \sum_{v=1}^{n_I - 1} [\nu_{j20} e^{-u_j(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su})}]^m \frac{(x_{v+1} - x_v)}{d_{efv}^{5-m}} \times$$

$$\times [\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su})], \quad (48)$$

în care n_I reprezintă numărul total de coordonate ale profilului longitudinal discretizat, iar b_4 cu relația

$$b_4 = h_{1s}^j + \frac{g[H_i(1 - N_p) + z_{ic}]}{n^2 D_2^2} +$$

$$+ \frac{g(H_{fc} - z_{fc})}{n^2 D_2^2 [\rho_{j20} - \beta(t_{ij} - 20)]} [\rho_{j20} - \beta(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-Su})]. \quad (49)$$

h) Cu b_2 și b_4 reactualizate se rezolvă ecuația de tip (32), determinîndu-se un nou debit q_2^j.

i) Se compară dacă

$$|q_1^j - q_2^j| \leqslant \varepsilon; \quad \varepsilon = 10^{-1} \ldots 10^{-3}, \quad (50)$$

— în cazul în care nu se respectă relația (50), se reiau calculele de la punctul b) pentru noul ciclu de calcule, utilizînd relația de atribuire $q_1^j = q_2^j$;

— în cazul în care condiția (50) este realizată, se opresc calculele, considerînd ultimul debit determinat prin aproximații succesive ca fiind cel cu care se poate opera în continuare.

În cazul în care pe tronsonul dat de conductă se află simultan două produse P_j, P_k ($k = j + 1$), produsul P_k ocupînd deja lungimea $l_x = x_r$ din conductă, iar restul $(L_c - l_x)$ fiind încă umplut cu produsul P_j, metodologia determinării debitului prin metoda aproximațiilor succesive, rămîne aceeași, cu următoarele aspecte specifice cazului:

1. la punctul g) coeficientul b_2 se calculează (și recalculează) după relația

$$b_2 = \frac{\beta_l g n^m D_2^{4-3m}}{\rho_{k20} - \beta_k(t_{ik} - 20)} \left[\sum_{v=1}^{r} [\nu_{k20} e^{-u_k(t_s - 20 + (t_{ik} - t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su_k})}]^m \frac{(x_{v+1} - x_v)}{d_{efv}^{5-m}} \times \right.$$

$$\times [\rho_{k20} - \beta_k(t_s - 20 + (t_{ik} - t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su_k})] +$$

$$\left. + \sum_{v=r+1}^{n_I - 1} [\nu_{j20} e^{-u_j(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su_j})}]^m \times \right.$$

$$\times \frac{(x_{v+1} - x_v)}{d_{efv}^{5-m}} [\rho_{j20} - \beta_j(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_v}{L_c} Su_j})], \quad (51)$$

iar coeficientul b_4 după relaţia

$$b_4 = h_{1s}^k + \frac{g[H_i(1 - N_p) + z_{ic} + z_r]}{nD_2^2} + \frac{g}{n^2 D_2^2[\rho_{k20} - \beta_k(t_{ik} - 20)]} \times$$

$$\times \{H_{fc} - z_{fc}) [\rho_{j20} - \beta_j(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-Su_j})] +$$

$$+ z_r[\rho_{j20} - \beta_j(t_s - 20 + (t_{ij} - t_s) e^{-\frac{x_r}{L_c} Su_j})]\}; \quad (52)$$

2. pentru fiecare pas cu care „înaintează" produsul P_k (pasul de înaintare = pasul de discretizare corespunzător) algoritmul determinării debitului prin aproximaţii suceesive se repetă;

3. după ce se determină debitul q_r^{kj} pentru pasul de discretizare de indice r, avînd şi diametrul d_{efr}, se poate determina intervalul de timp necesar pentru „schimbarea" produsului P_j cu P_k pe elementul de lungime $\Delta x_r = x_{r+1} - x_r$ din conductă, aflat la distanţa $l_x = x_r$ de capătul iniţial al conductei:

$$\Delta t_r^{kj} = \frac{\pi d_{efr}^2}{4} \cdot \frac{x_{r+1} - x_r}{q_r^{kj}}. \quad (53)$$

Timpul total de „schimbare" a perechii de produse P_j, P_k se determină apoi cu formula (28).

În ceea ce priveşte convergenţa şirului de valori obţinute pentru debitul q prin metodologia propusă ea este asigurată prin însăşi specificul sistemului în care se operează. Astfel, la determinarea iniţială a debitului se utilizează diametrul calibrat (iniţial) al conductei. „Efectul" presiunii şi al temperaturii produsului conduce la un diametru mărit $d_{ef} > d_{ic}$, iar acesta, la rîndul său, duce la o creştere oarecare a debitului Δq. Funcţionarea cu un debit mărit (fig. 3) pe porţiunea căzătoare a caracteristicii interne 1 a unei pompe duce însă la micşorarea presiunii şi deci a diametrului efectiv d_{ef} al conductei etc.

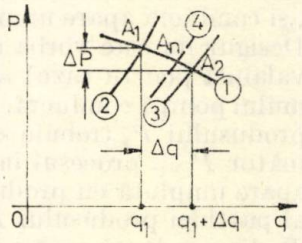


Fig. 3

4. ASUPRA UNOR ELEMENTE PRIVIND CARACTERISTICA HIDRAULICĂ (H—Q) COMUNĂ ÎN CAZUL MAI MULTOR PRODUSE AFLATE SIMULTAN PE CONDUCTĂ ÎN POMPARE SUCCESIVĂ

În cazul în care volumul partidei produsului de indice j — V_{pj} — din cadrul unui ciclu de pompare succesivă, devine mai mic decît volumul conductei V_c, atunci apare situaţia în care pe conductă se vor găsi simultan, în pompare succesivă, mai mult de două produse ($\ldots P_{j+1}, P_j, P_{j-1} \ldots$). Or asemenea situaţii sînt frecvente în cazul conductelor magistrale lungi sau a celor cu diametre mari şi ele complică într-o măsură destul de mare rezolvarea problemelor puse în cadrul paragrafelor precedente.

Într-o primă urgență, la constituirea unui nou model pentru cazul $V_{pj} < V_c$, trebuie lămurite unele aspecte mai deosebite :

a) considerînd n ($n > 2$) numărul de produse aflate simultan în pomparea succesivă pe conductă, ce trebuie să se înțeleagă prin „schimbarea produselor" ? ;

b) pentru cazul $n > 2$, care este debitul cu care trebuie să lucreze sistemul pompă-conductă, avînd în vedere că pe anumite tronsoane ale sistemului se găsesc una sau mai multe „interfețe" de produse, că diverse case de pompe „lucrează", în general, la pomparea diverselor produse cu unele proprietăți (viscozitatea cinematică, densitatea, temperatura) diferite, iar casa de pompe principală începe să lucreze la al n-lea produs ce astfel se va afla simultan cu celelalte $(n-1)$ produse pe conductă ? (prin „interfață" dintre două produse vom înțelege o anumită secțiune transversală prin zona de amestec dintre produsele respective, de exemplu, cea corespunzătoare concentrației $C = 0{,}5$).

În cazul $n = 2$ „schimbarea" produselor în timpul pompării succesive apare ca un proces evident și acesta a fost motivul pentru care nu s-a dat de la început o definiție, ea rezultînd aproape de la sine din relația de definiție (29) a timpului total de schimbare pentru un produs dat. Conform celor anterioare, prin „schimbarea" produsului P_j cu produsul P_{j+1} se înțelege înlocuirea sau evacuarea din conductă a produsului P_j cu produsul P_{j+1}, procesul încheindu-se în momentul în care P_j este complet evacuat și conducta apare umplută în întregime cu P_{j+1}.

Pe de altă parte, este știut că volumul partidei produsului P_{j+1} depinde de numărul anual de cicluri și de cantitatea anuală planificat a fi pompată și este posibil ca într-un anumit caz (ce poate apare mai ales în cazul conductelor lungi și/sau cu diametre mari) $V_{p(j+1)} < V_c$, ceea ce conduce imediat la situația $n > 2$. În acest fel, ultima parte a definiției „și conducta apare umplută în întregime cu P_{j+1}" nu mai este respectată. Desigur nu este vorba doar de modificarea definiției amintite (ea rămîne valabilă pentru cazul $n = 2$), ci de modificarea întregului model al sistemului pompă conductă. Într-adevăr, pentru cazul $n > 2$ prin „schimbarea" produsului P_j trebuie să se înțeleagă evacuarea acestui produs cu cel următor P_{j+1}, procesul încheindu-se în momentul în care întreaga conductă apare umplută cu produsul P_{j+1} (deci $V_{p(j+1)} \geqslant V_c$) sau cînd întregul volum al partidei produsului P_{j+1} a fost pompat pe conductă deși evacuarea lui P_j din conductă nu s-a încheiat (cazul $V_{p(j+1)} < V_c$).

Poate că din anumite puncte de vedere este mai comodă definirea unei noțiuni noi, similară cu noțiunea de „schimbare", cum ar fi „gestionarea în transport" a produsului P_j ca fiind un proces ce începe cînd casa principală de pompe începe să pompeze produsul P_j și se încheie cînd cantitatea de P_j pompată prin această casă de pompe devine egală cu V_{pj}.

Însă nu utilizarea unei anumite definiții de acest gen constituie aspectul principal al problemei date, ci faptul că în cazul cînd $V_{pj} > V_c$, timpul total de pompare T_j a produsului P_j prin casa principală de pompe este format din două componente temporale în care procesul de pompare diferă esențial și anume :

a) timpul $T_{j(j-1)}$ în care se face evacuarea produsului $P_{(j-1)}$ cu produsul P_j ;

b) timpul t_j în care toate casele de pompe de pe traseul conductei „lucrează" numai cu produsul P_j, astfel încît

$$T_j = t_j + T_{j(j-1)}, \tag{54}$$

unde t_j este direct proporţional cu diferenţa $V_{pj} - V_c$, coeficientul de proporţionalitate fiind $1/q_0^j$.

În cazul în care $V_{pj} \leqslant V_c$, vom avea însă

$$T_j = T_{j(j-1)}, \tag{55}$$

adică întregul timp de „gestionare" a produsului P_j se reduce la timpul $T_{j(j-1)}$ în care debitul produselor variază continuu sau discontinuu între anumite limite.

Dacă stabilirea debitului cu care trebuie să lucreze întregul sistem pompă-conductă în perioada t_j este relativ uşor de realizat şi acest debit nu se modifică, în principiu, în decursul întregii componente temporale t_j, stabilirea legii de variaţie a debitului pe perioada $T_{j(j-1)}$, în cazul $n > 2$, este mult mai complicată. Complicaţia apare atît datorită complexităţii sistemului pompă-conductă (mai multe case de pompe, lungimea diferită a tronsoanelor de conductă, profilul longitudinal al conductei, în general, neuniform), cît şi complexităţii stării sistemului (mai multe produse cu unele proprietăţi diferite, unele tronsoane de conductă cuprind, la un moment dat, una sau mai multe interfeţe de produse pe cînd alte tronsoane sînt umplute numai cu un singur tip de produs, regimul de funcţionare al unui tronson de conductă este dependent de regimurile de funcţionare ale altor tronsoane). Modelul schematic al unui astfel de sistem, aflat într-o anumită stare a sa, este reprezentat în figura 4. În această schemă, j este indicele curent al produsului pompat succesiv şi N este numărul total de produse cuprinse într-un ciclu de pompare succesivă; r este indicele curent al tronsonului de conductă şi T este numărul total de tronsoane de conductă (care rezultă din amplasarea staţiilor de pompare); se admite că la momentul considerat există $n > 2$ produse aflate simultan

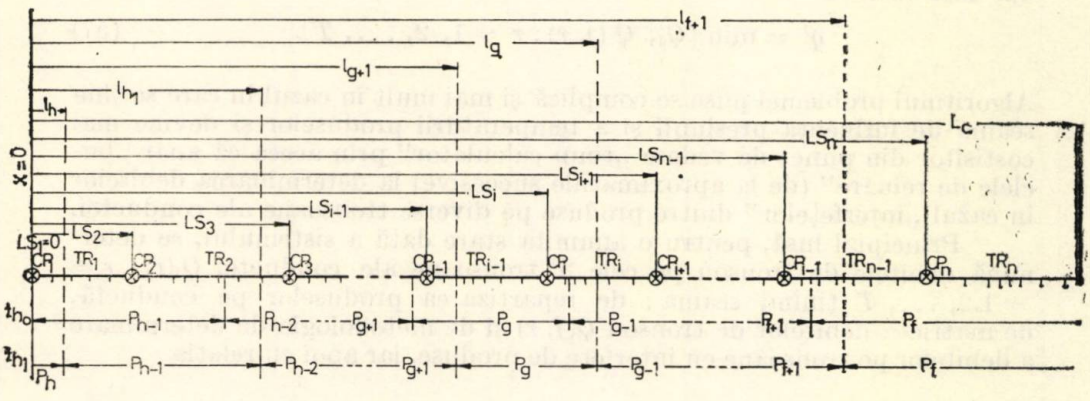


Fig. 4

pe conductă în procesul pompării succesive, iar mulţimea ordonată a indicilor acestor produse este $\{h, h-1, \ldots, g+1, g, g-1, \ldots, f+1, f\}$ ceea ce înseamnă că în acelaşi moment există $(n-1)$ interfeţe de produse pe conductă care delimitează partidele produselor respective. Se admite, de asemenea, că lungimea zonei de amestec dintre două produse este neglijabilă în raport cu lungimea partidelor acelor produse. Pentru exploatarea normală a unui astfel de sistem, ceea ce ne interesează, în mod obişnuit, indiferent dacă se pompează un singur produs P_j sau un „tren" de n produse aflate simultan pe conductă în pompare succesivă, este debitul cu care trebuie să lucreze sistemul în orice moment $(q = f(t))$ în vederea respectării unor restricţii de natură tehnologică şi/sau de exploatare. În vederea stabilirii unei relaţii funcţionale de tip $q = f(t)$ există tendinţa [11], [13], [14] de a stabili şi în acest caz o ecuaţie de bilanţ de tip (32) plecînd de la înălţimile de pompare realizate de toate casele de pompare şi determinînd pierderile hidraulice pe toată conducta cu considerarea faptului că la un moment dat există o anumită distribuţie a celor n produse pe conductă. Din această ecuaţie de bilanţ, ca şi în cazurile anterioare, se determină debitul şi în ultima instanţă funcţia $q = f(t)$.

Dar se constată efectiv, chiar în cazul în care toate casele de pompe „lucrează" cu acelaşi produs P_j (toată conducta umplută cu produs P_j), că debitele ce se pot realiza pe diverse tronsoane ale sistemului pompă-conductă, diferă întrucîtva între ele, cu atît mai mult cu cît însăşi amplasarea staţiilor de repompare nu se face exact la coordonatele reieşite din calcule, ci ţinînd seama şi de alte considerente de natură tehnico-economică. Aceasta înseamnă că, în general, vom defini o matrice a debitelor de tronson $Q(j, r)$; $j = 1,2, \ldots, N$; $r = 1, 2, \ldots, T$, iar pentru un j dat toate casele de pompe ale sistemului dat nu vor putea lucra decît la debitul

$$q^j = \min\ [Q(j, r); r = 1, 2, \ldots, T] \tag{56}$$

pentru că altfel în sistem pot apare suprapresiuni şi/sau fenomene de cavitaţie, ceea ce nu este admisibil. Evident că relaţia (56) va trebui să fie completată în cazul în care apar şi alte restricţii dictate de condiţiile tehnologice (sau şi de alte condiţii de exploatare) — de exemplu $q^j < Q_j$ din care rezultă

$$q^j = \min\ [Q'_j, Q(j, r); r = 1, 2, \ldots, T]. \tag{57}$$

Algoritmul problemei puse se complică şi mai mult în cazul în care se ţine seama de influenţa presiunii şi a temperaturii produselor şi devine mai costisitor din punct de vedere „timp calculator" prin aceea că apar „buclele de reluare" (de la aproximaţiile succesive) la determinarea debitelor în cazul „interfeţelor" dintre produse pe diverse tronsoane ale conductei.

Principial însă, pentru o anumită stare dată a sistemului, se determină debitele de tronson pe cele T tronsoane ale conductei $Q_t(r)$; $r = 1,2, \ldots, T$ ţinînd seama: de repartizarea produselor pe conductă, de matricea debitelor de tronson $Q(j, r)$ şi de metodologia de determinare a debitelor pe tronsoane cu interfeţe de produse, iar apoi cu relaţia

$$q = \min\ [Q', Q_t(r); r = 1, 2, \ldots T] \tag{58}$$

se stabilește debitul cu care trebuie să lucreze întregul sistem la starea dată. La deplasarea cu un pas a produselor pe conductă (deci la o nouă stare a sistemului) procedura se reia.

Cel mai mare consum de „timp calculator" se realizează în cadrul procedurii de determinare a debitului de tronson pe tronsonul în care există una sau mai multe „interfețe" de produse. Pentru a reduce într-o măsură oarecare consumul de „timp calculator" se poate observa că dacă o „interfață" dintre produsele P_{j+1} și P_j este situată pe tronsonul de indice s al conductei, atunci debitul de tronson $Q_t(s)$ va fi cuprins în mod obligatoriu între debitele tronsonului respectiv pentru produsele $P_{(j+1)}$ și P_j, adică

$$Q(j+1, s) \leqslant Q_t(s) \leqslant Q(j, s) \text{ sau } Q(j, s) \leqslant Q_t(s) \leqslant Q(j+1, s), \qquad (59)$$

iar dacă unul din celelalte debite de tronson $Q_t(r)$; $r = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, T$ este mai mic decît min $[Q(j+1, s), Q(j, s)]$, atunci calculul debitului de tronson $Q_t(s)$ nu este necesar etc.

O schemă logică bloc pentru calculul debitelor; a timpului de schimbare și a consumului de energie în cazul în care pe conductă se găsesc simultan $n > 2$ (după figura 4) produse aflate în pompare succesivă, este dată în figura 5.

5. CONCLUZII

Calculul debitului în problemele transportului succesiv de produse petroliere își are importanța sa deosebită, avînd în vedere că acest parametru este utilizat apoi la determinarea unor alți parametri, cum sînt: timpul de schimbare a produselor, consumul energetic într-un interval dat de timp etc.

Determinarea debitului, în cazul pompării unui singur produs, se poate face destul de simplu, rezolvînd direct, printr-o metodă iterativă corespunzătoare, ecuația de bilanț de tip (32). Această ecuație reprezintă de fapt caracteristica hidraulică $(H-Q)$ comună a sistemului dat pompă conductă și ea se obține prin metoda clasică, egalînd presiunile de pompare realizate în sistem cu pierderile de presiune totale din același sistem. Analiza se efectuează la nivelul unui tronson de conductă avînd în vedere că o conductă magistrală poate fi formată din n tronsoane legate între ele în serie, toate avînd aceleași elemente de structură cu multiparametri identici: caracteristicile pompelor, numărul de pompe legate în serie-paralel într-o casă de pompe, posibilitățile de reglare ale presiunilor, diametrul conductei tronsonului. Parametrul principal ce deosebește un tronson de altul, este lungimea tronsonului și ea depinde într-o bună măsură de încadrarea tronsonului respectiv în profilul longitudinal al conductei.

Pomparea succesivă a două produse pe un tronson al conductei aduce un element nou în cadrul ecuației de bilanț de tip (32), dar rezolvarea sa nu devine mai dificilă. Este luat în considerație însă un model discretizat al profilului longitudinal al conductei de transport cu ajutorul căruia se poate determina „timpul de schimbare" a unui produs cu altul și funcția $q = f(t)$, avînd în vedere că debitul variază, în perioada „schimbării" produselor, în limitele diferenței dintre debitele celor două produse cînd sînt pompate separat pe tronsonul de conductă. Precizia variației $q = f(t)$ depinde de pasul de discretizare a profilului longitudinal, iar mărimea

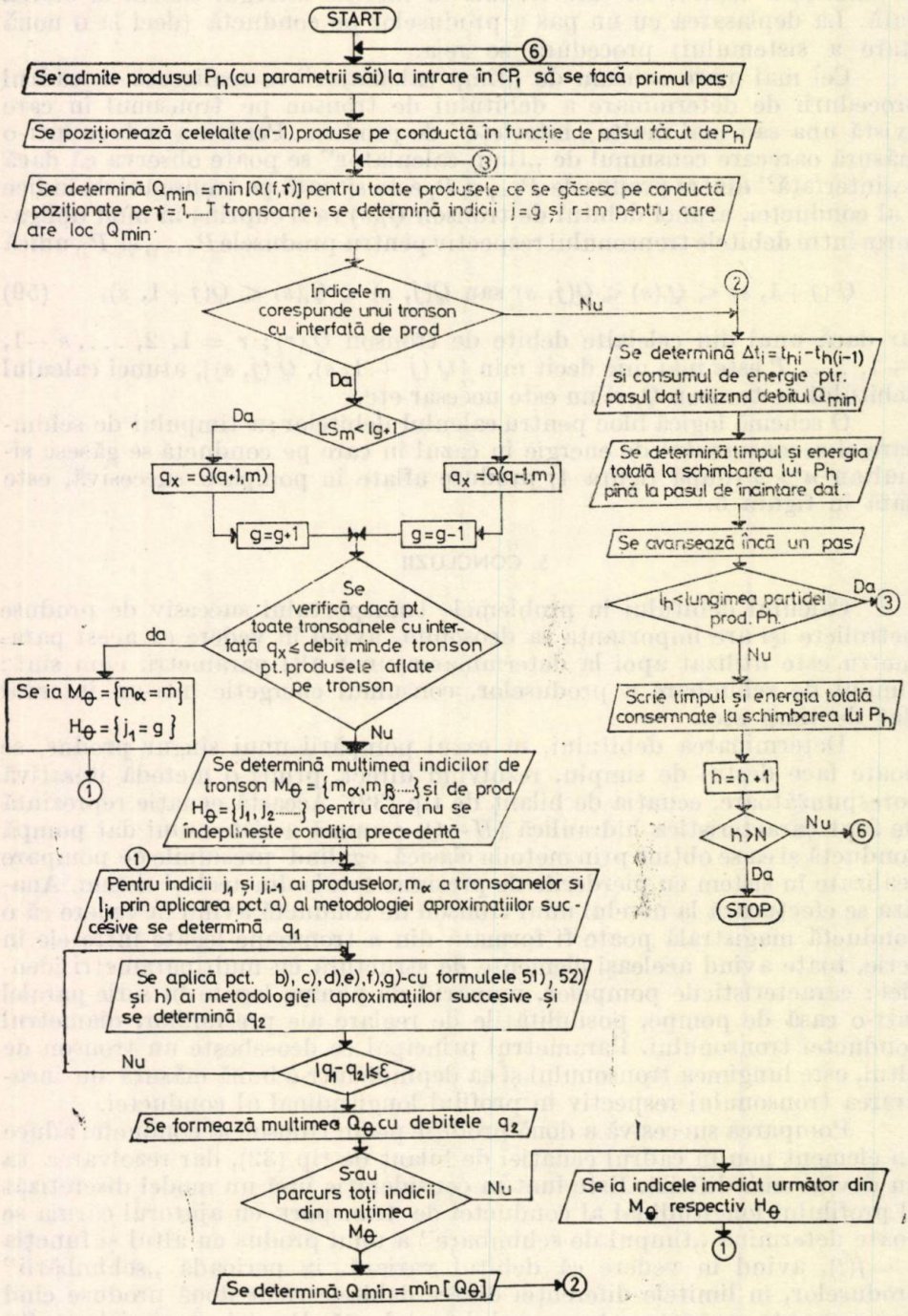

START
6
Se admite produsul P_h (cu parametrii săi) la intrare în CP_i să se facă primul pas
Se poziționează celelalte (n-1) produse pe conductă în funcție de pasul făcut de P_h
3
Se determină $Q_{min} = \min[Q(f,r)]$ pentru toate produsele ce se găsesc pe conductă poziționate pe $r = 1,\ldots,T$ tronsoane; se determină indicii $j=g$ și $r=m$ pentru care are loc Q_{min}
Indicele m corespunde unui tronson cu interfață de prod
Nu
2
Da
Se determină $\Delta t_i = t_{hi} - t_{h(i-1)}$ și consumul de energie ptr. pasul dat utilizînd debitul Q_{min}
Da
$LS_m < lg+1$
Se determină timpul și energia totală la schimbarea lui P_h pînă la pasul de înaintare dat
$q_x = Q(q+1,m)$
$q_x = Q(q-1,m)$
g=g+1
g=g-1
Se avansează încă un pas
Se verifică dacă pt. toate tronsoanele cu interfață $q_x \leq$ debit min de tronson pt. produsele aflate pe tronson
$t_h <$ lungimea partidei prod. Ph
Da
3
da
Nu
Se ia $M_\theta = \{m_\alpha = m\}$ $H_\theta = \{j_1 = g\}$
Nu
Scrie timpul și energia totală consemnate la schimbarea lui P_h
1
Se determină mulțimea indicilor de tronson $M_\theta = \{m_\alpha, m_\beta, \ldots\}$ și de prod. $H_\theta = \{j_1, j_2, \ldots\}$ pentru care nu se îndeplinește condiția precedentă
h=h+1
h>N
Nu
6
Da
STOP
1
Pentru indicii j_1 și j_{i-1} ai produselor, m_α a tronsoanelor și l_{j_1} prin aplicarea pct. a) al metodologiei aproximațiilor succesive se determină q_1
Se aplică pct. b), c), d), e), f), g)-cu formulele 51), 52) și h) ai metodologiei aproximațiilor succesive și se determină q_2
Nu
$|q_1 - q_2| \leq \varepsilon$
Se formează multimea Q_θ cu debitele q_2
S-au parcurs toți indicii din mulțimea M_θ
Nu
Se ia indicele imediat următor din M_θ respectiv H_θ
1
Se determină $Q_{min} = \min[Q_\theta]$
2

Fig. 5

acestuia se propune a fi stabilită pe baza unei discretizări corespunzătoare a domeniului de variație a debitului în cazul schimbării celor două produse.

În cazul în care sînt luate în considerație și efectele presiunilor din conductă și a temperaturii produselor, metodologia de determinare a debitului se schimbă considerabil și ea nu poate fi realizată decît prin metoda aproximațiilor succesive, stabilind totodată și o anumită precizie la care „se oprește" procedura aproximațiilor succesive.

Complexitatea problemei crește mai mult atunci cînd se ia în considerație o conductă magistrală formată din mai multe tronsoane și pe care se găsesc simultan, în procesul pompării succesive, mai mult de două produse. Se ajunge la concluzia că pentru a determina debitul cu care trebuie să lucreze întregul sistem aflat într-o anumită stare (cu o anumită repartizare a produselor pe conductă) este necesar să se determine debitele efective cu care se poate lucra pe fiecare tronson al conductei, avînd în vedere elementele specifice stării date a sistemului și apoi alegerea debitului minim din cadrul acestei mulțimi. În această idee este prezentată schema logică bloc din figura 5. Dar în perimetrul acestor concluzii pot fi ridicate și cîteva probleme de principiu care pot forma un bun suport pentru prelungirea acestui studiu.

Astfel, au fost luate în considerație o serie de elemente noi : discretizarea profilului longitudinal al conductei, influența presiunii din conductă și a temperaturii produselor, matricea debitelor de tronson $Q(j, r)$; $j = 1, 2, \ldots, N$; $r = 1, 2, \ldots, T$, ținînd seama de faptul că debitele de tronson nu sînt egale între ele nici la pomparea unui singur produs pe toată conducta și altele. Dar care este aportul acestor elemente noi la precizia soluției problemei ? Acest aspect nu a fost tratat aici (și nici nu ar mai fi avut loc în cadrul acestui studiu), dar o analiză multifactorială ar fi utilă din acest punct de vedere.

Dacă ar fi să luăm în considerație, numai pentru o scurtă analiză, elementul nou introdus al pasului de discretizare, cerut de metodologia rezolvării ecuației de bilanț de tip (32), am putea constata că determinarea lui pe baza discretizării domeniului de variație a debitului în cazul schimbării a două produse, este destul de formală pentru că :

a) la fiecare schimbare de produse ar urma să se schimbe mulțimea coordonatelor care discretizează profilul longitudinal al conductei;

b) domeniul de variație al debitului de schimbarea produselor P_j cu $P_{(j+1)}$ ar putea fi diferit de domeniul $q^j \ldots q^{(j+1)}$ în cazul în care $n > 2$;

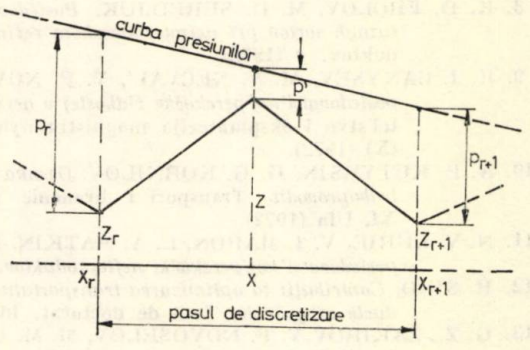


Fig. 6

c) dimensiunea pasului de discretizare poate fi stabilită și pe baza unui alt criteriu, de exemplu, acela al variației temperaturii produselor în lungul conductei (pasul de discretizare = lungimea de conductă pe care produsul își schimbă temperatura cu un grad) avînd în acest

fel rolul unui „gradient longitudinal" de temperatură și acordînd în acest fel o prioritate efectului de temperatură a produselor.

În ideea de a micșora „timpul calculator" se preconizează mărirea pasului de discretizare (mai ales în cazul conductelor de lungime mare), dar aceasta poate duce la o situație ca cea prezentată în figura 6. La calculul diametrului d_{ef_r} se va lua presiunea p_r (sau p_{r+1}) fără a ține seama că la o cotă $x_r < x < x_{r+1}$ presiunea în conductă este de fapt mult mai mică.

O analiză mai amănunțită, care să ducă la stabilirea unui criteriu mai cuprinzător după care să se stabilească dimensiunea pasului de discretizare, eventual al unui pas de discretizare optim (din punctul de vedere al criteriului dat), se impune de la sine. Considerații similare se pot referi și la alți parametri.

Primită la redacție la 27 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIA

1. M. D. AIZENSTEJN, *Centrobejnye nasosy dlja neftjanoj promyslennosti*, Gostoptehizdat, Moskva, 1957.
2. V. S. IABLONSKI, ș.s. *Proektirovanie, ekspluatacia i remont nefteproduktoprovodov*, Nedra, Moskva, 1965.
3. V. A. IUFIN, M. I. IZRAILOVICI, *Izmenenie proizvoditel'nosti maghistral'nogo produktoprovoda pri posledovatel'noj perekačke nefteproduktov s različnymi vjazkostju i plotnostju*, Transport i hranenie nefti i nefteproduktov, *11* (1969).
4. G. Z. ZAKIROV, M. M. GAREEV, *Ob opredelenii „rabocih" parametrov truboprovoda pri posledovatel'noj perekačke nefteproduktov*, Proektirovanie, stroitel'stvo i ekspluatacija maghistryl'nyh gazonefteprovodov i neftebaz, Ufa, **15** (1974).
5. Pod redacției N. N. KONSTANTINOVA i P. I. TUGUNOVA, *Transport i hranenie nefti i gaza*, „Nedra", Moskva, 1975.
6. Pod redacției L. P. GRJANKO, A. N. PAPIRA, *Lopastnye nasosy*, „Mașinostroenie", Leningrad, 1975.
7. V. A. IUFIN, *Vlijanie termodifuzii na smeseobrazovanie pri posledovatel'noj perekačke nefteproductov s razlicnoj temperaturoj*, Transport i hranenie nefti i nefteproduktov *3* (1972).
8. K. D. FROLOV, M. D. SEREDJUK, *Posledovatel'noje perekačka neftej i nefteproduktov raznyh sortov pri neizotermiceskom režime*, Transport i hranenie nefti i nefteproduktov, *9* (1972).
9. E. I. CANYSEV, M. V. NEČVAL', V. F. NOVOSELOV, *Raspredelenie concentracii pri posledovatel'noj perekačke židkostej v neizotermiceskom potoke*, Proektirovanie, stroitel'stvo i ekspluatacija maghistral'nyh gazonefteprovodov i neftebaz, Ufa, **IV (X)** (1972).
10. A. P. KUTYRSIN, G. G. KORNILOV, *Ocenka hataktera dviženikja tverdyh razdelitelej po truboprovodu*, Transport i hranenie nefti i nefteproduktov, VNIISPT, neft', **XI**, Ufa (1972).
11. N. V. LURIE, V. I. MARON, L. A. MATKIN, M. E. SVARȚ, V. A. IUFIN, *Optimizația posledovatel'noj perekački nefteproduktov*, Nedra, Moskva, 1979.
12. B. SIRO, *Contribuții la optimizarea transportului succesiv al produselor petroliere prin conducte magistrale*, Teză de doctorat, Institutul de petrol și gaze, Ploiești, 1981.
13. G. Z., ZAKIROV V. F. NOVOSELOV, M. M. GAREEV,, *Zakonomernost' izmenenija proizvoditel'nosti maghistral'nogo truboprovoda pri postedovatel'noj perekačke nefteproduktov*, Proektirovanie, stroitel'stvo i ekspluatacija maghistral'nyh gazonefteprovodov i neftebaz, Ufa, **15** (1974).
14. G. Z. ZAKIROV, V. F. NOVOSELOV, M. M. GAREEV, *Opredelenie prodolžitel'nosti perioda smeny nefteproduktov pri ih posledovatel'noj perekačke po maghistral'nym truboprovodam*, Proektirovanie, stroitel'stvo i ekspluatacija maghistral'nyh gazonefteprovodov i neftebaz, Ufa, **15** (1974).

INFLUENȚA PALETAJULUI ROTORIC ASUPRA DESPRINDERII STRATULUI LIMITĂ LA GRUPURILE BULB REVERSIBILE

de I. SETEANU *), V. DADU **), M. ERHAN *)

*) Institutul politehnic București
**) Institutul de studii și proiectări hidroenergetice București

Se determină spectrul vitezelor radiale și axiale în jurul carenelor bulb ale hidroagregatelor de joasă cădere, cu funcționare reversibilă turbină-pompă. Se analizează curgerea potențială axial-simetrică în regim de turbină, suprapunîndu-se rotația indusă de paletele rotorului hidroagregatului. Se localizează, prin studiul curgerii în stratul limită turbulent, punctele de desprindere și se definește un factor de eficiență ponderat de apreciere a performanțelor hidrodinamice ale carenelor. Se prezintă metodele numerice utilizate la elaborarea unui program în limbaj FORTRAN IV și se indică rezultatele obținute.

1. INTRODUCERE

Se studiază evoluția stratului limită turbulent, care se dezvoltă pe carenele turbinelor bulb cu funcționare reversibilă (fig. 1) în regim de turbinare și pompare, insistîndu-se asupra influenței circulației induse de către rotor, în regim de pompare, asupra desprinderii. Se analizează din punct de vedere al eficienței cinci tipuri de carenă, introducîndu-se un parametru global de apreciere cantitativă a acestei eficiențe.

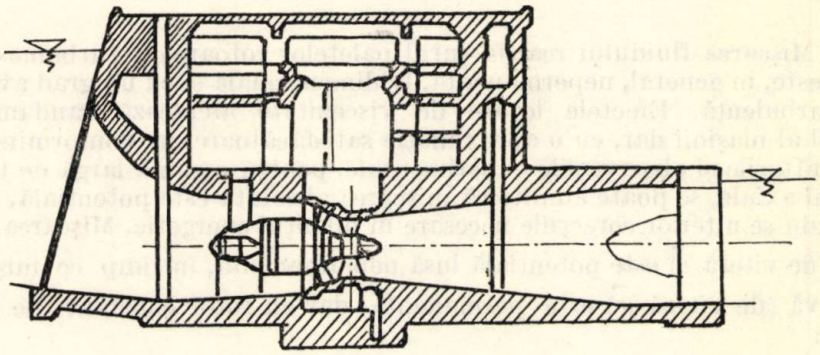


Fig. 1.

Mișcarea relativă potențială și staționară în jurul paletelor rotorice ale grupului bulb este analizată cu metoda lui Schlichting, determinîndu-se cîmpul vitezelor și al presiunii, prin suprapunerea pe coarda profilului, dintr-o rețea periodică circulară, a unei duble distribuții continue de surse și vîrtejuri de intensități, alese convenabil, pentru a se modela suprafața solidă a paletei (după un profil NACA). Se obține mărimea circulației induse de întregul paletaj. Vîrtejul indus, în regim de pompare, se suprapune peste curgerea principală, devansînd desprinderea stratului limită.

Mișcarea potențială axial-simetrică a fluidului perfect în jurul unor carene de formă apropiată de tipurile utilizate în proiectarea hidroagregatelor bulb se obține prin introducerea unor distribuții de surse punctuale, liniare și inelare, plasate pe axa carenei și în spațiul interior al acesteia, de

intensități convenabile. Se obține cîmpul vitezelor axială și radială și coeficientul adimensional de presiune.

Pentru cazul regimului de pompare se suprapune vîrtejul indus de paletajul rotoric. Liniile de curent au un traseu elicoidal.

Analiza curgerii în stratul limită turbulent este efectuată prin aplicarea procedeului predictor-corector, pentru integrarea secvențială a ecuației integrodiferențiale Kármán-Polhausen, în forma indicată de Loițianski. Se utilizează relațiile fundamentale semiempirice propuse de Kamenețkii, insistîndu-se asupra comportării soluției în vecinătatea punctului de desprindere.

S-a întocmit un program de calcul în limbaj FORTRAN IV pentru tratarea numerică a modelului utilizat. Pentru aprecierea eficienței hidrodinamice a carenelor s-a definit un factor, proporțional cu lungimea medie ponderată de parcurs în stratul limită, de la bordul de atac pînă la desprindere. Randamentul hidraulic este cu atît mai mare cu cît zona moartă ce se dezvoltă în aval de desprindere, este mai extinsă.

Rezultatele obținute, precum și procedeul utilizat pot fi folosite și la proiectarea hidrodinamică optimă a pompelor axiale de mare capacitate.

2. CÎMPUL TURBIONAR INDUS DE PALETAJUL ROTORIC

Mișcarea fluidului real în jurul paletelor rotoarelor turbomașinilor bulb este, în general, nepermanentă, tridimensională și cu un grad avansat de turbulență. Efectele legate de vîscozitate afectează randamentul global al mașinii dar, cu o aproximație satisfăcătoare, în conformitate cu măsurătorile și observațiile experimentale, pentru o gamă largă de turbomașini axiale, se poate admite că mișcarea absolută este potențială, introducîndu-se ulterior corecțiile necesare în bilanțul energetic. Mișcarea absolută (de viteză $\vec{v}$) este potențială însă nepermanentă, în timp ce mișcarea relativă (de viteză $\vec{w}$) este permanentă, dar cu rotor constant. Se poate scrie :

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \tag{1}$$

unde $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ este viteza de transport (de rotație), iar $\vec{r}$ este vectorul de poziție ($\omega = \pi n/30$, unde n, rot/min., este turația hidroagregatului). Se obține

$$\operatorname{rot} \vec{w} = -\operatorname{rot} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -2\vec{\omega} \tag{2}$$

deoarece $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$.

Pentru o rețea circulară de profile (fig. 2), între circulația vitezei absolute Γ și circulația vitezei relative pe conturul 1234, are loc relația :

$$\Gamma = \oint_{1234} \vec{v}\, d\vec{r} = \oint_{1234} \vec{w}\, d\vec{r} + \frac{2\pi\omega}{z}(r_2^2 - r_1^2), \tag{3}$$

unde z este numărul de palete. Circulaţia Γ_r a vitezei relative pe conturul unei palete este :

$$\Gamma_r = \oint_{1234} \vec{w}\, d\vec{r} + 2\omega(S_{1234} - S_p), \tag{4}$$

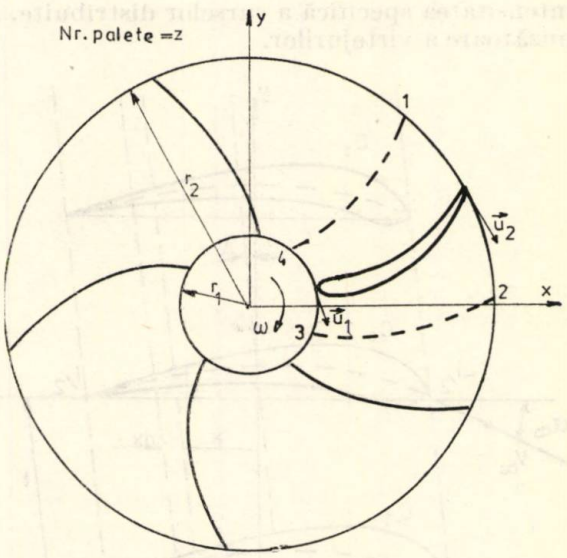


Fig. 2.

unde S_{1234} reprezintă aria mărginită de conturul 1234, iar S_p este aria secţiunii transversale a paletei. Rezultă [1, 8] :

$$\Gamma = \Gamma_r + 2\omega S_p. \tag{5}$$

Dacă secţiunea profilului se neglijează, în primă aproximaţie, circulaţia rezultantă Γ_R indusă de către rotor are expresia :

$$\Gamma_R = z\Gamma = z\Gamma_r. \tag{6}$$

Pentru a determina această circulaţie se studiază mişcarea potenţială cu rotor constant suprapus, din punct de vedere al unui observator solidar cu rotorul. S-a adoptat procedeul lui Schlichting [2], prin care, spectrul hidrodinamic real se modelează cu o distribuţie continuă de surse şi vîrtejuri virtuale plasate pe corzile profilelor unui multiplan infinit (fig. 3). Prin d se notează grosimea maximă a profilelor, iar prin f săgeata scheletului acestora. Prin suprapunerea efectelor, viteza complexă conjugată indusă de mulţimea segmentelor dx' congruente (plasate în zonele analoge ale profilelor multiplanului infinit, obţinute prin relaţia de

corespondență $x'_k = x' + kti\, e^{-i\lambda}$, $k = 1, 2, \ldots$, unde t este pasul rețelei, iar λ este unghiul dintre axa de congruență și axa y) este :

$$dw_i(x) = \frac{1}{2\pi}[q(x') + i\gamma(x')]\, dx' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - x' - ikte^{-i\lambda}}, \tag{7}$$

în care q este intensitatea specifică a surselor distribuite, iar γ este intensitatea corespunzătoare a vîrtejurilor.

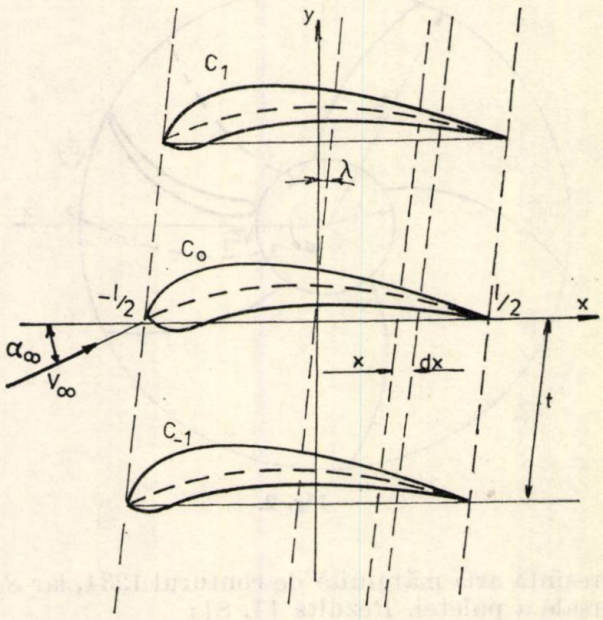


Fig. 3.

Viteza complexă conjugată, $w_i = u_i - iv_i$, indusă de către toate singularitățile plasate pe coardele profilelor multiplanului infinit se scrie, după unele transformări,

$$w_i(x) = \frac{e^{i\lambda}}{2t}\int_{-l/2}^{l/2} [q(x') + i\gamma(x')]\, \mathrm{cth}\left[\frac{\pi}{t}e^{i\lambda}(x - x')\right] dx'. \tag{8}$$

Dacă multiplanul infinit se reduce la un singur profil, formula (8) devine :

$$w_i^{(0)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2} [q(x') + i\gamma(x')]\, \frac{dx'}{x - x'}. \tag{9}$$

Cu această notație, relația (8) se poate scrie sub forma :

$$w_i(x) = w_i^{(0)}(x) + \frac{1}{2t}\int_{-l/2}^{l/2} [q(x') + i\gamma(x')][R(x, x', \lambda) + iI(x, x', \lambda)]\, dx'; \tag{10}$$

unde funcţiile R şi I reprezintă părţile reală şi imaginară ale următoarei funcţii complexe:

$$R(\xi, \lambda) + iI(\xi, \lambda) = e^{i\lambda} \operatorname{cth}(\pi e^{i\lambda}) - \frac{1}{\pi\xi}, \tag{11}$$

unde $\xi = (x-x')/t$.

După transformări algebrice simple, se obţine

$$R(\xi, \lambda) = \frac{\cos\lambda \operatorname{sh}(2\pi\xi\cos\lambda) + \sin\lambda \sin(2\pi\xi\sin\lambda)}{\operatorname{ch}(2\pi\xi\cos\lambda) - \cos(2\pi\xi\sin\lambda)} - \frac{1}{\pi\xi}, \tag{12}$$

$$I(\xi, \lambda) = \frac{\sin\lambda \operatorname{sh}(2\pi\xi\cos\lambda) - \cos\lambda \sin(2\pi\xi\sin\lambda)}{\operatorname{ch}(2\pi\xi\cos\lambda) - \cos(2\pi\xi\sin\lambda)}. \tag{13}$$

Cu aceste notaţii, relaţia (10) se separă sub forma:

$$u_i(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{q(x')}{x-x'}\,dx' + \frac{1}{2t}\int_{-l/2}^{l/2} [q(x')R - \gamma(x')I]\,dx' = u_i^{(0)} + u_i^{(1)}, \tag{14}$$

$$v_i(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\gamma(x')}{x-x'}\,dx' - \frac{1}{2t}\int_{-l/2}^{l/2} [\gamma(x')R + q(x')I]\,dx' = v_i^{(0)} + v_i^{(1)}. \tag{15}$$

Cu aceste egalităţi se determină cîmpul vitezelor induse de către un multiplan de segmente $(-l/2, l/2)$ cu pasul de congruenţă t, pe care se află repartizată o distribuţie de surse cu densitate $q(x')$ şi de vîrtejuri cu densitatea $\gamma(x')$.

Profilele multiplanului infinit sînt admise de curbură mică ($f/l \leqslant$ $\leqslant 15\%$) şi de grosime relativ redusă ($d/l \leqslant 15\%$). Datorită curburii mici a profilului se poate admite că viteza v_i din relaţia (15), calculată pe coarda profilului, nu diferă sensibil de mărimea acesteia pe schelet. Întrucît scheletul profilului este, în primă aproximaţie, o linie de curent, rezultă ecuaţia diferenţială:

$$\frac{dy_f}{dx} = \frac{v_\infty + v_i^{(0)}(x) + v_i^{(1)}(x)}{u_\infty + u_i^{(0)}(x) + u_i^{(1)}(x)}, \tag{16}$$

unde $(x, y_f(x))$ sînt coordonatele punctelor scheletului. În mod analog, ecuaţia diferenţială a grosimii $y_d(x)$ a profilului, se scrie

$$\frac{dy_d}{dx} = \frac{q(x)}{2(u_\infty + u_i^{(0)}(x) + u_i^{(1)}(x))}. \tag{17}$$

Din ecuațiile (16) și (17) se deduce forma profilului etalon din multiplanul infinit, generat de o distribuție cunoscută de surse și vîrtejuri. Se alege, pentru intensitățile corespunzătoare, expresii de forma :

$$\frac{\gamma(\theta)}{u_\infty} = A_0 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{N} A_n \sin(n\theta), \tag{18}$$

$$\frac{q(\theta)}{u_\infty} = B_0 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{N} B_n \sin(n\theta), \tag{19}$$

unde parametrul $\theta \in [0, \pi]$ se obține din egalitatea :

$$x = -\frac{l}{2}\cos\theta. \tag{20}$$

Condiția de impenetrabilitate a profilului impune ca

$$B_1 = -2B_0. \tag{21}$$

Circulația indusă este :

$$\Gamma_r = \int_{-l/2}^{l/2} \gamma(x)\,dx = \pi l u_\infty \left(\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{4}\right). \tag{22}$$

Restrîngînd analiza la $2N$ termeni, $A_0, A_1, \ldots, A_{N-1}$; $B_0, B_2, \ldots, B_N$, se obține un sistem de $2N$ ecuații cu $2N$ necunoscute, deduse prin explicitarea condițiilor cinematice (16) și (17) în N puncte echidistante, plasate pe coarda profilului etalon, de coordonate :

$$\frac{x_k}{l} = \frac{4k-1}{4N} - \frac{1}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{23}$$

Alegînd $N = 3$, relațiile (18), (19) devin :

$$\frac{\gamma(\theta)}{u_\infty} = A_0 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} + A_1 \sin\theta + A_2 \sin 2\theta, \tag{24}$$

$$\frac{q(\theta)}{u_\infty} = B_0\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} - 2\sin\theta\right) + B_2 \sin 2\theta + B_3 \sin 3\theta. \tag{25}$$

Componentele vitezei induse de către profilul de bază, respectiv de restul rețelei, sînt :

$$u_i^{(0)}(\theta) = -\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2}\cos\theta + \frac{A_2}{2}\cos 2\theta, \tag{26}$$

$$v_i^{(0)}(\theta) = \frac{B_0}{2}(1 + 2\cos\theta) - \frac{B_2}{2}\cos 2\theta - \frac{B_3}{2}\cos 3\theta, \tag{27}$$

$$u_i^{(1)} = u_i^{(1)} + u_{iq}^{(1)}, \tag{28}$$

$$v_i^{(1)} = v_i^{(1)} + v_{iq}^{(1)}, \tag{29}$$

unde

$$\frac{v_{i\gamma}^{(1)}}{u_\infty} = w_{\gamma y_0}^* \frac{A_0}{2} + w_{\gamma y_1}^* \frac{A_1}{2} + w_{\gamma y_2}^* \frac{A_2}{2}, \tag{30}$$

$$\frac{u_{i\gamma}^{(1)}}{u_\infty} = w_{\gamma x_0}^* \frac{A_0}{2} + w_{\gamma x_1}^* \frac{A_1}{2} + w_{\gamma x_2}^* \frac{A_2}{2}, \tag{31}$$

$$\frac{v_{iq}^{(1)}}{u_\infty} = w_{qy_0}^* \frac{B_0}{2} + w_{qy_2}^* \frac{B_2}{2} + w_{qy_3}^* \frac{B_3}{2}, \tag{32}$$

$$\frac{u_{iq}^{(1)}}{u_\infty} = w_{qx_0}^* \frac{B_0}{2} + w_{qx_2}^* \frac{B_2}{2} + w_{qx}^* \frac{B_3}{2}. \tag{33}$$

Coeficienţii $w_{\gamma y_0}^*, w_{\gamma y_1}^*, \ldots, w_{qx_3}^*$ sînt expresii integrale, funcţii de λ şi raportul adimensional t/l, de forma :

$$w_{\gamma y_0}^* = -\frac{l}{2t}\int_0^\pi (1 + \cos\theta')R\,d\theta', \tag{34}$$

$$w_{\gamma y_1}^* = -\frac{l}{2t}\int_0^\pi \sin^2\theta' R\,d\theta' \quad \text{etc.} \tag{35}$$

Cu expresiile determinate (funcţie de coficienţii A_i, B_j) ale vitezei induse, se pot explicita relaţiile cinematice de bază (16) şi (17) sub forma :

a)
$$\frac{A_0}{2}(-1 + w_{\gamma y_0}^* - y'_{fk} w_{\gamma x_0}^*) + \frac{A_1}{2}(\cos\theta k + w_{\gamma y_1}^* - y'_{fk} w_{\gamma x_1}^*) +$$

$$+ \frac{A_2}{2}(\cos 2\theta k + w_{\gamma y_2}^* - y'_{fk} w_{\gamma x_2}^*) + \frac{B_0}{2}[w_{qy_0}^* - y'_{fk}(1 +$$

$$+ 2\cos\theta k + w_{qx_0}^*)] + \frac{B_2}{2}[w_{qy_2}^* - y'_{fk}(-\cos 2\theta k + w_{qx_2}^*)] +$$

$$+ \frac{B_3}{2}[w_{qy_3}^* - y'_{fk}(-\cos 3\theta k + w_{qx_3}^*)] = y'_{fk} - \operatorname{tg}\alpha_\infty$$

$$(k = 1, 2, 3), \tag{36}$$

b) $$\frac{A_0}{2}(-y'_{dk}w^*_{\gamma x_0}) + \frac{A_1}{2}(-y'_{dk}w^*_{\gamma x_1}) + \frac{A_2}{2}(-y'_{dk}w^*_{\gamma x_2}) +$$

$$+ \frac{B_0}{2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\theta k}{2} - 2\sin\theta k - y'_{dk}(1 + 2\cos\theta k + w^*_{qx_0})\right] +$$

$$+ \frac{B_2}{2}[\sin 2\theta k + y'_{dk}(\cos 2\theta k - w^*_{qx_2})] + \frac{B_3}{2}[\sin 3\theta k +$$

$$+ y'_{dk}(\cos 3\theta k - w^*_{qx_3})] = y'_{dk}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{37}$$

Sistemul de ecuaţii liniare (36) — (37), rezolvat prin metoda Gauss furnizează coeficienţii A_k, B_k ($k = 1, 2, 3$), care caracterizează intensităţile surselor şi vîrtejurilor distribuite din relaţiile (24) şi (25), cîmpul vitezelor induse din relaţiile (26)—(29), precum şi circulaţia indusă de unul dintre profilele multiplanului infinit, din relaţia (22). Circulaţia indusă totală Γ_R se obţine din egalitatea (6).

3. MIŞCAREA POTENŢIALĂ AXIAL-SIMETRICĂ ÎN JURUL CARENELOR BULB

Este convenabil să se analizeze problema curgerii în jurul carenelor bulb în două faze distincte :

1) în ipoteza fluidului perfect, mişcarea este potenţială axial-simetrică cu un vîrtej suprapus, avînd intensitatea egală cu circulaţia rezultantă indusă de rotor, în regim de pompare ;

2) cu procedeele stratului limită se localizează zona de desprindere, evaluîndu-se lungimea stratului limită laminar şi turbulent de la bordul de atac în lungul carenei.

Spectrul hidrodinamic al curgerii potenţiale se obţine prin suprapunerea mişcării în curent paralel cu potenţialul rezultat prin introducerea unor surse punctuale şi liniar distribuite pe axa curgerii, împreună cu ansamblul de surse inelare [3]. Funcţia de curent ψ, definită prin relaţiile cinematice ale lui Stokes :

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{38}$$

are, pentru curentul paralel, expresia

$$\psi_p = v_\infty \frac{r^2}{2}, \tag{39}$$

unde v_∞ reprezintă viteza mişcării neperturbate.

Pentru sursele punctuale, plasate pe axa curgerii în punctele de coordonate $z_i (i = 1, \ldots, M)$ de debit Q_{spi}, funcţia de curent se scrie :

$$\psi_{sp} = \sum_{i=1}^{M} \frac{Q_{spi}}{4\pi}\left[\frac{z - z_i}{(z - z_i)^2 + r^2} + 1\right]. \tag{40}$$

Pentru sursele liniar distribuite, de debit Q_{slj} pe segmentul (z_j, z_{j+1}), $(j = 1, \ldots, N)$, se obţine :

$$\psi_{s1} = \sum_{j=1}^{N} \frac{Q_{slj}}{4\pi} \left[\frac{\sqrt{(z-z_j)^2+r^2} - \sqrt{(z-z_{j+1})+r^2}}{z_{j+1} - z_j} + 1 \right]. \tag{41}$$

Pentru sursele inelare, plasate în planul $z = z'_m$, cu centrul pe axă şi de rază r'_m, avînd debitul Q_{scm}, $(m = 1, \ldots, P)$, potenţialul lui Stokes este :

$$\psi_{sc} = \sum_{m=1}^{P} \frac{Q_{scm}}{4\pi} (r_{1m} + r_{2m})[K_k^{(m)}(\lambda_m) - E_k^{(m)}(\lambda_m)], \tag{42}$$

unde integralele eliptice complete au expresiile :

$$E_k^{(m)}(\lambda_m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k_m^2 \sin^2 \alpha}\, \mathrm{d}\alpha, \tag{43}$$

$$K_k^{(m)}(\lambda_m) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-k_m^2 \sin^2\alpha}}, \tag{44}$$

iar ceilalţi parametri sînt :

$$\lambda_m = \frac{r_{2m} - r_{1m}}{r_{2m} + r_{1m}}, \tag{45}$$

$$k_m^2 = \frac{4rr'_m}{(z - z'_m)^2 + (r + r'_m)^2}, \tag{46}$$

$$r_{1m}^2 = (z-z'_m)^2 + (r - r'_m)^2, \tag{47}$$

$$r_{2m}^2 = (z-z'_m)^2 + (r + r'_m)^2. \tag{48}$$

Condiţia de contur închis este echivalentă cu :

$$\sum_{i=1}^{M} Q_{spi} + \sum_{j=1}^{N} Q_{slj} + \sum_{m=1}^{P} Q_{scm} = 0. \tag{49}$$

În transcriere adimensională, cu :

$$q_i = \frac{Q_{spi}}{2\pi v_\infty}; \quad q_j = \frac{Q_{slj}}{2\pi v_\infty}; \quad q_m = \frac{Q_{scm}}{2\pi v_\infty} \tag{50}$$

componentele vitezei se scriu :

$$\frac{v_z}{v_\infty} = 1 + \sum_{i=1}^{M} \frac{q_i}{2} \frac{z - z_i}{[(z-z_i)^2 + r^2]^{3/2}} -$$

$$- \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{2} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(z-z_j)^2 + r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{(z-z_{j+1})^2 + r^2}}}{z_{j+1} - z_j} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{P} \frac{q_m}{2} \frac{2}{\pi} \frac{E_k^{(m)}(\lambda_m)}{1 - k_m^2} \frac{z - z'_m}{[(z-z'_m)^2 + (r+r'_m)^2]^{3/2}}, \tag{51}$$

$$\frac{v_r}{v_\infty} = \sum_{i=1}^{M} \frac{q_i}{2} \frac{r}{[(z-z_i)^2 + r^2]^{3/2}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{2} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(z-z_j)^2 + r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{(z-z_{j+1})^2 + r^2}}}{z_{j+1} - z_j} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{P} \frac{q_m}{2} \frac{1}{\pi r} \frac{K_k^{(m)}(\lambda_m) - \dfrac{(z-z'_m)^2 - (r^2 - r'^2_m)}{(z-z'_m)^2 + (r-r'_m)^2} E_k^{(m)}(\lambda_m)}{\sqrt{(z-z'_m)^2 + (r-r'_m)^2}}. \tag{52}$$

Alegînd o distribuţie convenabilă de surse cu intensităţile q_i, q_j, q_m, se modelează spectrul hidrodinamic astfel încît linia de curent corespunzătoare lui $\psi = 0$ să aibă două puncte de stagnare şi să corespundă carenelor turbinelor bulb încercate în laborator (fig. 4). Cunoscînd cîmpul vitezelor radială şi axială se determină vitezele meridiane în vecinătatea carenei. Suprapunînd componenta de rotaţie produsă de circulaţia indusă de rotor în regim de pompă se obţine viteza totală în curgerea fluidului perfect. Liniile de curent ale mişcării rezultante sînt curbe elicoidale aşezate pe suprafeţele de rotaţie a căror urmă în plane meridiane sînt liniile de curent ale mişcării potenţiale axial-simetrice. Componenta de rotaţie a vitezei este

$$v_t = \frac{\Gamma_R}{2\pi R}, \tag{53}$$

unde Γ_R se exprimă cu relaţia (6). Elementul de arc al liniei de curent elicoidale se scrie

$$\mathrm{d}s = \frac{v_s}{v_n} \mathrm{d}x, \tag{54}$$

unde

$$v_s = \sqrt{v_n^2 + v_t^2}, \tag{55}$$

$$\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2}; \tag{56}$$

în aceste relații v_n reprezintă viteza meridiană ($v_n = \sqrt{v_z^2 + v_r^2}$), iar v_s este viteza rezultantă.

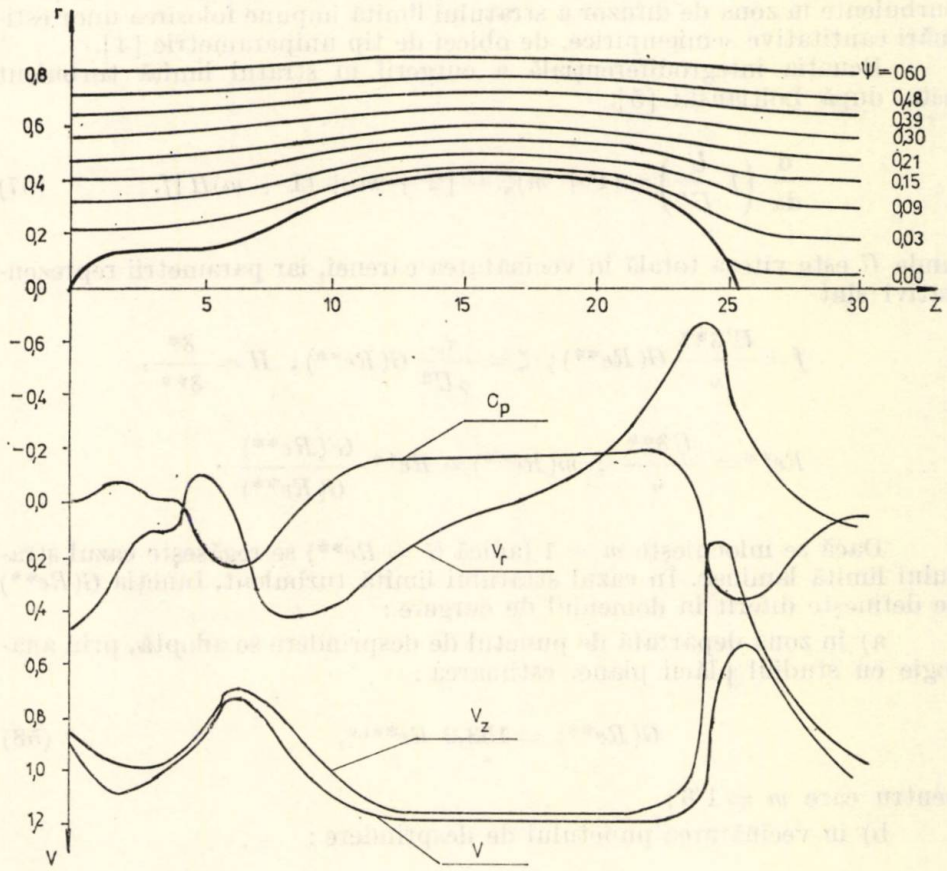


Fig. 4

4. STRATUL LIMITĂ ȘI DESPRINDEREA. FACTORUL DE EFICIENȚĂ

Studiul stratului limită se efectuează diferit în regim de turbină și pompă. În regim de turbină, cînd rotorul este situat în aval de bulb, influența circulației induse este neglijabilă. În regim de pompă, liniile de curent în stratul limită au o structură elicoidală, obținută prin suprapunerea mișcării potențiale în plane meridiane cu mișcarea de rotație indusă

de rotor. Totodată, pentru a ține seamă de influența atenuatoare a paletelor statorice, se poate introduce un factor de corecție variabil al circulației induse, în conformitate cu observațiile experimentale.

Desprinderea stratului limită în regim turbulent are loc mult mai în aval față de cazul laminar, deoarece frecările interne sînt mai importante, antrenînd straturile adiacente peretelui la curgerea externă.

Grosimea stratului limită turbulent se dezvoltă mult mai accentuat, existînd o pronunțată reacție inversă asupra curgerii externe pentru corpurile neprofilate hidrodinamic. Complexitatea mecanismului mișcării turbulente în zona de difuzor a stratului limită impune folosirea unor estimări cantitative semiempirice, de obicei de tip uniparametric [4].

Ecuația integrodiferențială a curgerii în stratul limită turbulent este, după Loițianski [5],

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f\frac{U}{U'}\right)=(1+m)\zeta-[2+m+(1+m)H]f, \tag{57}$$

unde U este viteza totală în vecinătatea carenei, iar parametrii reprezentativi sînt

$$f=\frac{U'\delta^{**}}{\nu}G(Re^{**});\ \zeta=\frac{\tau_w}{\rho U^2}G(Re^{**});\ H=\frac{\delta^*}{\delta^{**}},$$

$$Re^{**}=\frac{U\delta^{**}}{\nu}\ ;\ m(Re^{**})=Re^{**}\frac{G'(Re^{**})}{G(Re^{**})}.$$

Dacă se înlocuiește $m=1$ (adică $G=Re^{**}$) se regăsește cazul stratului limită laminar. În cazul stratului limită turbulent, funcția $G(Re^{**})$ se definește diferit în domeniul de curgere:

a) în zona depărtată de punctul de desprindere se adoptă, prin analogie cu studiul plăcii plane, estimarea:

$$G(Re^{**})=153{,}2\ Re^{**1/6}, \tag{58}$$

pentru care $m=1/6$;

b) în vecinătatea punctului de desprindere:

$$m=0,$$

obținîndu-se $G(Re^{**})=G_s=\text{const.}$

Ecuația (57) se mai poate scrie sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{U'}{U}F(f)+\frac{U''}{U'}f, \tag{59}$$

unde

$$F(f)=(1+m)\zeta-[3+m+(1+m)H]f. \tag{60}$$

Prelucrînd statistic un mare număr de observaţii experimentale, Kameneţkii [6] a propus următoarele formule empirice pentru principalele caracteristici ale stratului limită turbulent :

$$\zeta = 1+0{,}1367 f + 0{,}015 f^2 + 0{,}0033 f^3, \tag{61}$$

$$H = 1{,}35-0{,}0701 f + 0{,}02913 f^2 + 0{,}01083 f^3 + 0{,}001606 f^4, \tag{62}$$

$$F = 1{,}17-4{,}694 f + 0{,}0238 f^2 - 0{,}0246 f^3. \tag{63}$$

Condiţia de desprindere $\zeta = 0$ corespunde valorii $f_s = 6$. În vecinătatea punctului de desprindere, după Ross şi Robertson [7], $H_s = 2{,}8$, iar

$$\frac{\delta^{**}}{\delta_s^{**}} = \left(\frac{U_s}{U}\right)^{2+H_s}. \tag{64}$$

Cunoscînd rapoartele $U'/U_s^{5,8}$, $U_s/U_s^{5,8}$ şi notînd $U'/U = B$, poziţia punctului de desprindere se localizează între două noduri ale reţelei la distanţa Δx, prin relaţia de interpolare liniară :

$$\Delta\Delta x = \frac{\dfrac{B_s}{U_s^{4,8}} - \dfrac{B_1}{U_1^{4,8}}}{\dfrac{B_2}{U_2^{4,8}} - \dfrac{B_1}{U_1^{4,8}}} \Delta x, \tag{65}$$

unde $\Delta\Delta x$ se măsoară pornind din punctul 1.

O apreciere realistă a performanţelor hidrodinamice ale carenelor bulb, în condiţiile funcţionării reversibile, trebuie să ţină seamă de particularităţile procesului de desprindere a stratului limită în ambele situaţii, timpul de funcţionare în regim de turbină fiind sensibil mai mare decît în regim de pompă. Randamentul global ponderat pentru ambele regimuri poate constitui un indicator adecvat al eficienţei hidrodinamice a carenei. Întrucît lungimea efectivă a stratului limită de la punctul de atac la zona de decolare este cu atît mai mare cu cît curgerea este mai avantajoasă din punct de vedere hidrodinamic, iar extinderea zonei moarte în spatele zonei de decolare este mai redusă, pierderile de sarcină totale datorate disipărilor turbulente sînt mai mici. Determinarea teoretică a randamentului global nu este în prezent posibilă. Se poate admite în mod euristic drept factor de eficienţă hidrodinamică a carenei mărimea :

$$\eta_p = \frac{L_1 T_1 + L_2 T_2}{(T_1 + T_2) L_0}, \tag{66}$$

unde T_1, T_2 sînt timpii de funcţionare în regim de turbină, respectiv pompă, iar L_1, L_2 sînt lungimile stratului limită în cele două cazuri, L_0 reprezentînd o lungime de referinţă a carenei.

5. REZULTATE

Programul de calcul în limbaj FORTRAN este compus din următoarele părţi principale :

— blocul de introducere a datelor ;

— calculul funcţiei de curent pentru mişcarea potenţială axial simetrică în nodurile unei reţele rectangulare în plan meridian ;

— interpolarea punctelor de intersecţie dintre liniile de curent, cu valoarea funcţiei de curent impusă, cu liniile $z = \text{const.}$ ale reţelei ;

— bloc de determinare a cîmpului vitezelor radială şi axială, precum şi a coeficientului adimensional de presiune C_p, pe liniile de curent determinate anterior ;

— calculul vitezei rezultante pe carenă $U(x)$ şi al funcţiei $B = U'(x)/U(x)$: această funcţie este necesară la integrarea ecuaţiei stratului limită ;

— integrarea, prin procedeul predictor-corector, a ecuaţiei diferenţiale a stratului limită ;

— bloc de extrapolare a soluţiei în vecinătatea punctului de decolare, pentru localizarea precisă a acestuia ;

— determinarea lungimii stratului limită de la punctul de atac pînă în zona de decolare ;

— o subrutină de analiză a mişcării relative potenţiale staţionare în jurul paletelor rotorului maşinei, cu procedeul lui Schlichting. Rezultatele calculelor în acest bloc îl constituie mărimea circulaţiei induse, utilizată la analiza în stratul limită, în regim de pompare.

Datorită reversibilităţii curgerii potenţiale, în regim de pompare nu se mai refac decît calculele aferente stratului limită turbulent, după ce se obţine cîmpul vitezei în vecinătatea carenei, în mişcarea mixtă de rotaţie şi axial-simetrică (elicoidală) în plane meridiane. Este necesar să se recalculeze numai ultimele trei blocuri, după schimbarea semnului funcţiei $B = U'/U$.

S-au analizat cinci tipuri de carene diferite. Datele de intrare, de exemplu pentru prima carenă, sînt

$\Delta z = 0{,}1$; $\Delta r = 0{,}1$; $\Delta\psi = 0{,}1$; $NZ = 30$ (numărul de paşi în direcţia z) ; $NR = 10$ (numărul de paşi în direcţia radială) ; $NM = 0$ (numărul de surse punctuale) ; $NP = 10$ (numărul de surse inelare) ; $NN = 12$ (numărul de surse liniar distribuite).

Debitele surselor sînt : $QSP = 0$ (surse punctuale) ; $QSC = 0{,}0014$; $0{,}0012$; $0{,}0010$; $0{,}0008$; $0{,}0006$; $-0{,}0006$; $-0{,}0008$; $-0{,}0010$; $-0{,}0012$; $-0{,}0014$ (surse inelare) ; $QSL = 0{,}08$; $0{,}04$; $0{,}008$; $0{,}002$; $0{,}002$; $-0{,}021$; $-0{,}045$; $-0{,}045$; $-0{,}002$; $0{,}002$; $-0{,}008$; $-0{,}014$ (surse liniare).

Coordonatele surselor sînt : $ZSP = 0$; $ZSL1$ ($ZSL2$) $= 0{,}05$ (0,25) ; 0,25 (0,45) ; 0,45 (0,65) ; 0,65 (0,85) ; 0,85 (1,05) ; 1,05 (1,25) ; 1,25 (1,45) ; 1,45 (1,65) : 1,65 (1,85) ; 1,85 (2,05) ; 2,05 (2,25) ; 2,25 (2,45) — coordonatele axiale ale surselor liniare ; $RSC = 0{,}12$ (pentru toate cele 10 surse inelare) ; $ZSC = 2{,}0$; 2,01 ; 2,02 ; 2,03 ; 2,04 ; 2,06 ; 2,07 ; 2,08 ; 2,09 ; 2,10 — coordonatele axiale ale surselor inelare.

Pentru a se analiza eficiența hidrodinamică ponderată a celor cinci variante de carenă s-a calculat factorul de eficiență pentru trei regimuri de funcționare reversibilă :

A) $T_1 = 4000$ ore/an (turbinare),

$T_2 = 1000$ ore/an (pompare),

B) $T_1 = 2000$ ore/an $= T_2$,

C) $T_1 = 1000$ ore/an ;

$T_2 = 4000$ ore/an.

S-a obținut, pentru $L_0 = 2{,}5$, tabelul de mai jos :

Varianta de carenă	$SL1$	$SL2$		Regimul de funcționare					
		fără vîrtej	cu vîrtej	A		B		C	
				fv	cv	fv	cv	fv	cv
I	2,329	2,985	2,315	0,984	0,930	1,063	0,929	1,142	0,927
II	2,327	2,981	2,314	0,989	0,930	1,062	0,928	1,140	0,927
III	2,346	2,988	2,315	0,990	0,936	1,067	0,932	1,144	0,928
IV	2,351	2,867	2,306	0,982	0,937	1,044	0,931	1,106	0,926
V	2,356	2,439	2,293	0,949	0,937	0,959	0,930	0,969	0,922

Din analiza rezultatelor se constată că deși varianta III de carenă este mai avantajoasă în cazul neglijării vîrtejului indus de paletajul rotoric și în multe dintre cazurile de exploatare cu considerarea vîrtejului, totuși în regimul A de exploatare (cu vîrtej) sînt de preferat variantele IV și V. Această împrejurare dovedește importanța introducerii în analiză a efectului circulației induse, atît în studiul teoretic-numeric, cît și pentru lucrările pe model în laborator.

Primită la redacție la 22 iulie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. N. SCHOLTZ, *Aerodynamik der Schaufelgitter*, I. G. Braun Verlag, Karlsruhe (1965).
2. H. SCHLICHTING, *Boundary layer theory*, McGraw-Hill Co., New York (1960).
3. ST. ZAREA, I. JELEV, *L'utilisation de la méthode des singularités pour l'étude du mouvement potentiel autour des carènes bulbe*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **18**, 2 (1973).

4. T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Edit. Academiei R. S.România, Bucureşti, 1967.

5. L. G. LOITIANSKI, *Mehanika jidkosti i gaza*. Nauka, Moskva, 1970.

6. A. I. KAMENETKII, *Novîi empiriceskii metod rasceta turbulentnogo pogranicinogo sloia v nesjimaemoi jidkosti*, Trudî L.P.I., **31**, *3* (1970).

7. D. ROSS, I. ROBERTSON, *An empirical method for calculation of the turbulent boundary layer*, J. Aeron. Sci., **21**, *5* (1954).

8. G. ZIDARU, *Curs de reţele de profile*, (lito), I.P.B., Bucureşti (1979).

INFLUENȚA CONDIȚIILOR DE REZEMARE ASUPRA STĂRII DE EFORTURI ȘI DE DEFORMAȚII ÎNTR-O STRUCTURĂ PLANAR-PĂTRATĂ DIAGONALĂ

de MIRCEA V. SOARE
Institutul de construcții București

GH. OBLEMENCO
I.P.T.A.N.A.

Se descrie starea de eforturi și de deformații într-o structură reticulată planar pătrată diagonală cu 13×13 ochiuri, avînd opt condiții de rezemare pe contur distincte. Deosebirea dintre cazurile studiate constă în prezența unor noduri libere pe contur. Aceste cazuri pot apărea fie datorită unor rezolvări arhitectonice ale fațadelor, fie probabilității producerii unor tasări localizate în cazul fundării pe terenuri sensibile la înmuiere.

1. INTRODUCERE

Într-un studiu anterior [6] semnalam influența diferiților parametri care pot duce la optimizarea unei structuri, cu aplicare directă la structurile reticulate planare. După studierea influenței varierii înălțimii [6] și a condițiilor de montaj prin ripare [3] asupra stării de eforturi și de deformații într-o structură reticulată planară, în lucrarea de față ne propunem să examinăm influența condițiilor de rezemare.

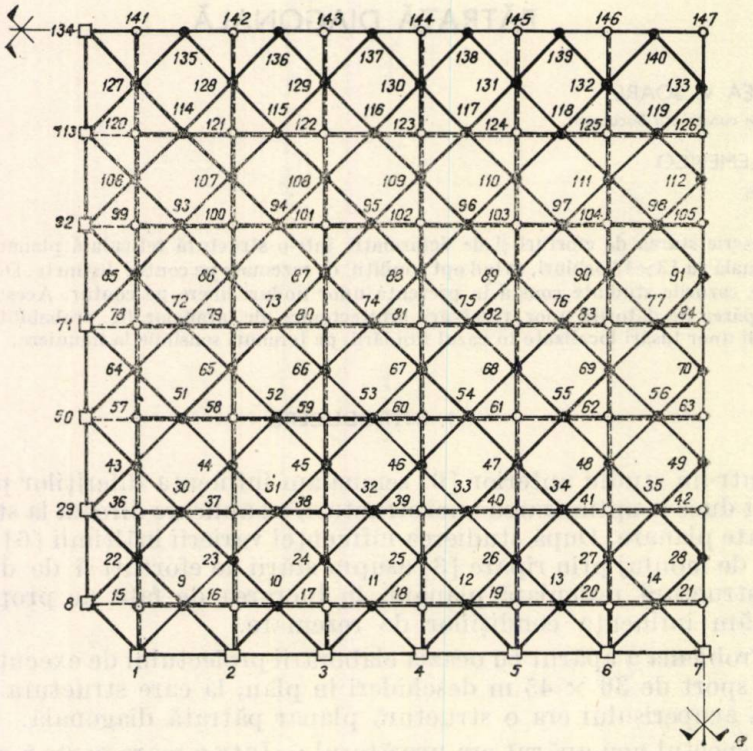
Problema a apărut cu ocazia elaborării proiectului de execuție pentru săli de sport de 36×45 m deschideri în plan, la care structura de rezistență a acoperișului era o structură planar pătrată diagonală.

Aspectul nou apărut era următorul: „Într-o mare parte a suprafeței țării, construcțiile trebuie să fie fundate pe terenuri loessoide, caracterizate prin mare sensibilitate la înmuiere și, deci, la tasări. În această situație s-a cerut să se verifice starea de eforturi și de deformații a structurii, pentru o tasare de pînă la 2 cm care s-ar putea produce în dreptul unui stîlp central sau de colț.

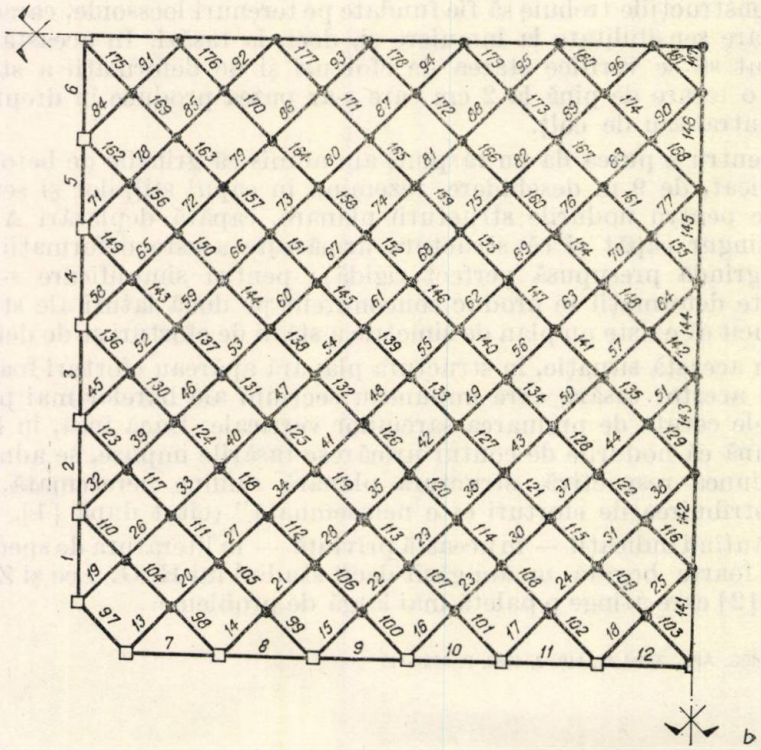
Pentru a putea da un răspuns am admis că grinzile de beton armat prefabricat, de 9 m deschidere, rezemînd în capul stîlpilor și servind ca reazeme pentru nodurile structurii planare, capătă deplasări $\Delta = 2$ cm la un singur capăt și că structura urmărește aceste deformații variind liniar (grinda presupusă perfect rigidă); pentru simplificare s-a admis că aceste deformații se produc concomitent pe două laturi ale structurii, astfel încît să existe un plan de simetrie a stării de eforturi și de deformații.

În această situație, în structura planară apăreau eforturi foarte mari în zona acestor tasări, care impuneau secțiuni ale barelor mai puternice decît cele cerute de preluarea sarcinilor verticale. Dacă însă, în loc să se presupună că nodurile de contur urmăresc tasările impuse, se admitea că, în porțiunea respectivă, structura planară rămîne nerezemată, rezulta că redistribuirea de eforturi este neînsemnată" (citat după [1], p. 110).

Căutînd indicații — în această privință — în literatura de specialitate, dealtfel foarte bogată, nu am găsit decît studiul lui H.-G. Lee și Z. S. Makowski [2] care atinge o paletă mai largă de probleme.



a



b

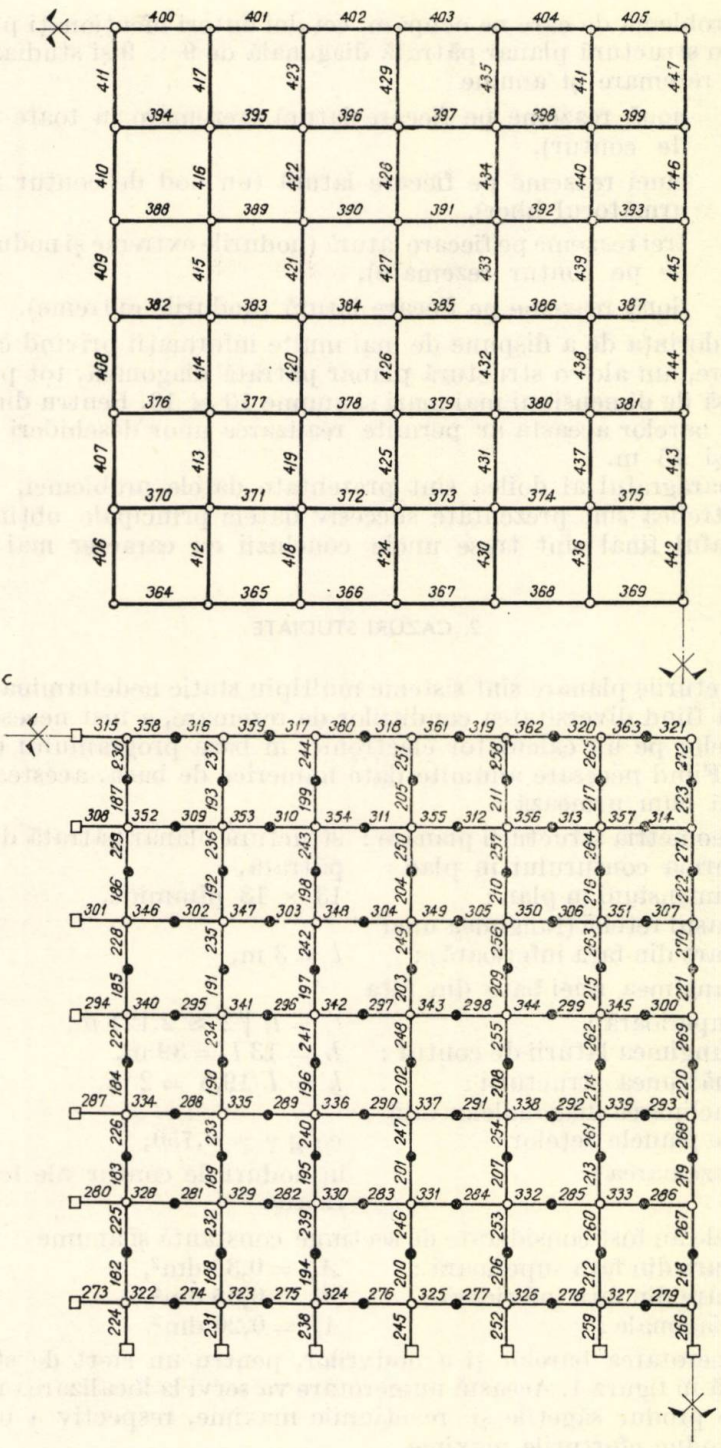


Fig. 1. — Numerotarea barelor și nodurilor la structura planar pătrată diagonală cu 13×13 piramide.

În problema de care ne ocupăm, cei doi autori menționați precedent consideră o structură planar pătrată diagonală de 9 × 9 și studiază patru cazuri de rezemare și anume

(i) nouă reazeme pe fiecare latură (rezemare în toate nodurile de contur),

(ii) cinci reazeme pe fiecare latură (un nod de contur rezemat, următorul liber),

(iii) trei reazeme pe fiecare latură (nodurile extreme și nodul central de pe contur rezemate),

(iv) două reazeme pe fiecare latură (nodurile extreme).

Din dorința de a dispune de mai multe informații privind condițiile de rezemare, am ales o structură planar pătrată diagonală, tot pe contur pătrat, însă de dimensiuni mai mari și anume 13 × 13. Pentru dimensiuni uzuale ale barelor aceasta ar permite realizarea unor deschideri cuprinse între 30 și 45 m.

În paragraful al doilea sînt prezentate datele problemei, în paragraful al treilea sînt prezentate succesiv datele principale obținute, iar în paragraful final sînt trase unele concluzii cu caracter mai general.

2. CAZURI STUDIATE

Structurile planare sînt sisteme multiplu static nedeterminate, astfel încît, dată fiind diversitatea condițiilor de rezemare, a fost necesară obținerea datelor pe un calculator electronic, în baza programului de calcul OBLEM. Fiind necesare anumite date numerice de bază, acestea au fost alese după cum urmează :

— geometria structurii planare : structură planar pătrată diagonală,
— forma conturului în plan : pătrată,
— dimensiuni în plan : 13 × 13 piramide,
— pasul rețelei (lungimea unei bare din fața inferioară) : $l = 3$ m,
— lungimea unei bare din fața superioară : $l_s = l/\sqrt{2} \approx 2{,}121$ m,
— lungimea laturii de contur : $L = 13\,l = 39$ m,
— înălțimea structurii : $h = L/19{,}5 = 2$ m,
— înclinarea diagonalelor față de planele fețelor : $\operatorname{cotg} \gamma = 0{,}750$,
— rezemarea : în noduri de contur ale feței superioare.

Barele au fost considerate de secțiune constantă și anume
— bare din fața superioară : $A_s = 0{,}35$ dm^2,
— bare din fața inferioară : $A_i = 0{,}35$ dm^2,
— diagonale : $A_d = 0{,}20$ dm^2.

Numerotarea barelor și a nodurilor, pentru un sfert de structură, este redată în figura 1. Această numerotare va servi la localizarea nodurilor în care se produc săgețile și reacțiunile maxime, respectiv a barelor în care se produc eforturile maxime.

Încărcarea este uniform distribuită pe suprafaţa acoperişului şi a fost concentrată la noduri. În calcule s-a considerat separat încărcarea cu forţe $P_s = 1000$ daN în toate nodurile din faţa superioară şi $P_i = 1000$ daN în toate nodurile din faţa inferioară. Pentru uniformitatea încărcării, nu au fost considerate sarcini P_s în nodurile de contur care nu sînt rezemate.

Cazurile de rezemare luate în considerare sînt următoarele (vezi figura 2):

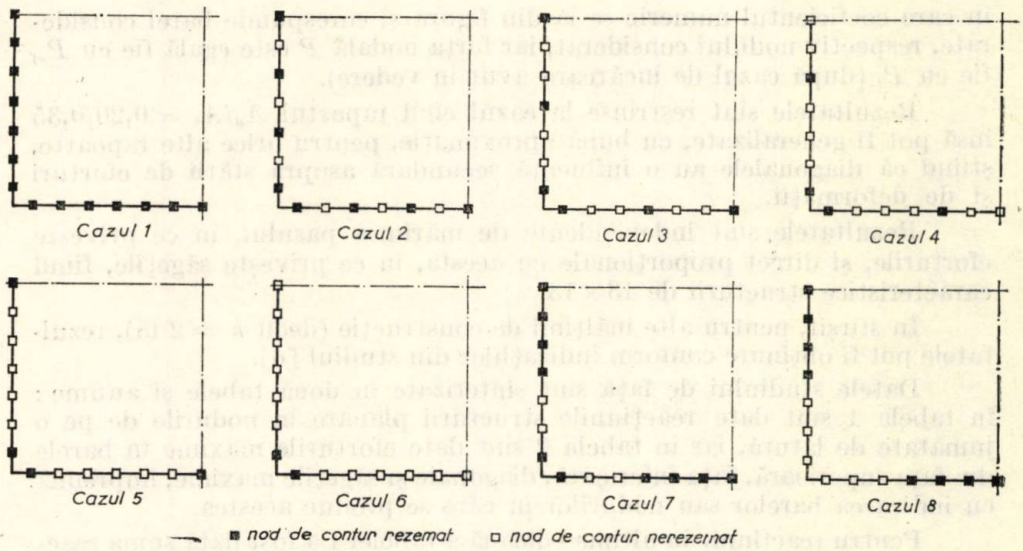


Fig. 2. — Cazurile de rezemare luate în considerare.

1° rezemare în toate nodurile de contur ale feţei superioare (în total 13 noduri rezemate pe fiecare latură);

2° rezemare alternată, adică un nod da, următorul nu (în total 7 noduri rezemate pe fiecare latură);

3° rezemare discontinuă, un nod da, două noduri nu (în total 5 noduri rezemate pe fiecare latură);

4° rezemare discontinuă, un nod da, trei noduri nu (în total 4 noduri rezemate pe fiecare latură);

5° rezemare la capetele şi la mijlocul fiecărei laturi (în total 3 noduri rezemate pe fiecare latură);

6° rezemare doar la capetele fiecărei laturi (practic reprezintă rezemarea la colţuri a structurii);

7° rezemare cu discontinuitate lîngă colţuri (în total 9 noduri rezemate pe fiecare latură);

8° rezemare în zona centrală a fiecărei laturi (în total 7 noduri rezemate, dispuse simetric faţă de mijlocul fiecărei laturi).

Dintre cazurile studiate, primul caz este considerat de referinţă, deoarece este raţional să stea la baza proiectării unei asemenea structuri. Celelalte cazuri pot da indicaţii asupra variaţiei eforturilor în bare, reacţiunilor şi săgeţilor în cazul cînd considerente arhitectonice sau cînd prin producerea unor tasări localizate, unele noduri de contur rămîn nerezemate.

Datorită volumului mare de rezultate numerice nu am putut reda exemplificativ decît un caz (în speță 8°), cînd încărcările sînt aplicate în fața superioară.

Rezultatele sînt prezentate sub forma

— efort în bară $S, T, D = (\text{coeficient}) \times P,$
— reacțiune $V = (\text{coeficient} \times P,$
— săgeată $w = (\text{coeficient}) \times$

în care coeficientul numeric se ia din figură și corespunde barei considerate, respectiv nodului considerat, iar forța nodală P este egală fie cu P_s, fie cu P_i (după cazul de încărcare avut în vedere).

Rezultatele sînt restrînse la cazul cînd raportul $A_d/A_i = 0{,}20/0{,}35$ însă pot fi generalizate, cu bună aproximație, pentru orice alte rapoarte, știind că diagonalele au o influență secundară asupra stării de eforturi și de deformații.

Rezultatele sînt independente de mărimea pasului, în ce privește eforturile, și direct proporționale cu acesta, în ce privește săgețile, fiind caracteristice structurii de 13×13.

În sfîrșit, pentru alte înălțimi de construcție (decît $h = 2$ m), rezultatele pot fi obținute conform indicațiilor din studiul [6].

Datele studiului de față sînt sintetizate în două tabele și anume: în tabela 1 sînt date reacțiunile structurii planare în nodurile de pe o jumătate de latură, iar în tabela 2 sînt date eforturile maxime în barele din fața superioară, fața inferioară, diagonale și săgețile maxime, împreună cu indicarea barelor sau nodurilor în care se produc acestea.

Pentru reacțiuni, în ultima coloană a tabelei 1 a fost dată suma reacțiunilor pe o latură ($2\Sigma V$), comparativ cu ecuația de control

$$2\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \frac{1}{2} V_7\right) = 78 P_s$$

(fața superioară încărcată),

$$2\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + \frac{1}{2} V_7\right) = 42{,}25 P_i$$

(fața inferioară încărcată).

Relativ la tabela 2, pentru diagonale au fost date valorile maxime ale eforturilor atît de întindere, cît și de compresiune. În ce privește eforturile S_{max}, în cazul 6° au rezultat valori importante de ambele semne, pentru a fi trecute în tabela 2.

3. REZULTATE OBȚINUTE

3.1. CAZUL DE REZEMARE 1°

Acest caz, în care structura planară este rezemată în toate nodurile de contur, este considerat cazul etalon. Reacțiunile V prezintă o variație normală, crescînd dinspre colțuri spre mijlocul laturii. Valoarea maximă este de $9{,}6672 P_s$, respectiv $5{,}0896 P_i$ (după poziția încărcării).

Tabela 1

Reacțiunile V_i pe jumătatea laturii)*

Cazul de rezemare	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	$12\ V_7$	$2\Sigma V$**)
1°	0,1760 0,3288	3,1360 1,8128	5,4856 2,9920	7,3232 3,9144	8,6313 4,5696	9,4096 4,9600	4,8336 2,5448	77,9904 42,2448
2°	1,3448 1,0216	— —	11,2400 6,1232	— —	16,9368 8,9824	— —	9,4736 4,9944	77,9904 42,2432
3°	3,3400 2,1224	— —	— —	22,0088 11,7920	— —	— —	13,6456 7,2080	77,9888 42,2448
4°	5,7696 3,4344	— —	— —	— —	33,2240 17,6872	— —	— —	77,9872 42,2432
5°	11,3384 6,4072	— —	— —	— —	— —	— —	27,6536 14,7128	77,9840 42,2400
6°	38,9648 21,1064	— —	— —	— —	— —	— —	— —	77,9296 42,2128
7°	3,7040 2,3152	— —	— —	11,2360 6,0792	9,3872 4,9904	9,8552 5,2048	4,8120 2,5328	77,9888 42,2448
8°	— —	— —	— —	15,9552 9,0288	9,3624 4,9744	9,3272 4,8752	4,3496 2,2440	77,9888 42,2448

*) Sarcini $P_s = 1$ în fața superioară (deasupra)
Sarcini $P_i = 1$ în fața inferioară (dedesubt)
**) Valori de control 78, respectiv 42, 25.

Tabela 2

Sarcini $P_s = 1000$ daN în fața superioară (deasupra)
Sarcini $P_i = 1000$ daN în fața inferioară (dedesubt)

Cazul de rezemare	S_{max} (tf)	în barele	T_{max} (tf)	în barele	D_{max} (tf)	în barele	w_{max} (dm)	în nodul
1°	−21,256	153	+40,256	405 și 447	−10,218 +12,084	218 și 358 266 și 315	0,7180	147
	−10,754		+20,132		− 4,800 +6,362	218 și 358 266 și 315	0,3609	
2°	−22,148	139	+40,606	405 și 447	−12,838 +23,684	218 și 358 266 și 315	0,7492	147
	−11,263		+20,330		− 6,176 +12,486	218 și 358 266 și 315	0,3775	
3°	−31,247	127 și 151	+41,568	405 și 447	−14,742 +34,114	218 și 358 266 și 315	0,8022	147
	−16,165		+20,852		− 7,198 +18,020	218 și 358 266 și 315	0,4057	
4°	−37,848	113 și 137	+43,738	390 și 432	−15,146 +41,530	186 și 326 252 și 301	0,8479	147
	−19,940		+22,436		− 7,659 +22,109	186 și 326 252 și 301	0,4302	
5°	−54,216	115 și 163	+56,482	404 și 446 —	−26,180 +69,134	230 și 279 266 și 315	1,0396	147
	−28,617		+33,168	401 și 443	−13,623 +36,782	230 și 279 266 și 252	0,5329	
6°	−72,771 +34,005	181 104	+153,828	369 și 411	−48,705 +48,706	182 și 322 224 și 273	3,2026	147
	−38,224 +18,872	181 104	+81,849		−25,758 +26,383	182 și 322 224 și 273	1,6837	
7°	−21,431	153	+41,258	405 și 447	− 9,856 +14,045	212 și 352 245 și 294	0,7260	147
	−10,849		+20,687		− 4,613 + 7,599	212 și 352 245 și 294	0,3653	
8°	−24,280	112 și 124	+40,926	405 și 447	−11,098 +19,944	227 și 276 245 și 294	0,7211	147
	−13,442		+20,478		− 5,964 +11,286	227 și 276 245 și 294	0,3623	

Eforturile maxime în fața inferioară sînt de întindere și apar în barele adiacente centrului, fie 405 și 447 (pentru jumătate de rețea), independent de poziția încărcării.

Eforturile maxime în fața superioară sînt de compresiune și *nu se produc la centrul structurii*, ci în bara 153, aproximativ la treimea diagonalei. Și în acest caz poziția barei de efort maxim este independentă de poziția încărcării.

Pentru diagonale, în tabela 2 am indicat valorile maxime pozitive și negative, precum și barele corespunzătoare.

Diagonalele întinse (266 și 315) corespund nodurilor 7 și 134 unde apar reacțiunile maxime. Între valorile corespunzătoare subsistă relația generală

$$V = D_+ \sin \gamma \ (= 0{,}8\ D). \tag{1}$$

Diagonalele comprimate (218 și 358) sînt situate în planele mediatoare ale structurii și concură la aceleași noduri inferioare cu diagonalele întinse cele mai solicitate.

În sfîrșit, săgeata maximă se produce în nodul central (147) al feței inferioare, independent de poziția încărcării.

Se va observa că aria aferentă unui nod inferior este l^2, în timp ce aceea aferentă unui nod superior este $(l/\sqrt{2})^2 = 0{,}5\ l^2$, ceea ce justifică valorile aproximativ pe jumătate ale eforturilor în bare cînd este încărcată fața inferioară, în comparație cu eforturile în bare cînd este încărcată fața superioară.

3.2. CAZUL DE REZEMARE 2°

Acest caz poate corespunde fie unei rezemări imperfecte a nodurilor de contur pe grinzile din capul stîlpilor, fie unei rezemări adecvate astfel încît să permită crearea unor goluri pentru uși de acces în sala acoperită de structură.

În privința reacțiunilor se constată o redistribuire a acestora, crescînd reacțiunile V_1, V_2, V_5 și V_7 (ultima fiind maximă); ele reprezintă, orientativ, o dublare a reacțiunilor din cazul precedent.

Efortul maxim în fața superioară (S_{max}) crește de la $-21{,}256P_s$ la $-22{,}148P_s$, respectiv de la $-10{,}754P_i$ la $-11{,}263P_i$, adică cu 4,2—4,7%; bara cea mai încărcată se deplasează de la treimea (153) la sfertul diagonalei (139).

Efortul maxim în fața inferioară (T_{max}) crește insensibil (sub 1%) și se produce tot în barele adiacente centrului (405 și 447) ca și în cazul precedent.

Pentru diagonalele întinse este valabilă discuția pentru reacțiuni datorită relației simple (1); pentru diagonalele comprimate eforturile maxime se produc în aceleași bare 218 și 358, ca și în cazul 1°.

Săgeata maximă se produce tot în nodul inferior central (147) și prezintă o creștere neînsemnată de la $0{,}7180P_s$ la $0{,}7492P_s$, respectiv de la $0{,}3609P_i$ la $0{,}3775\ P_i$, adică de numai 4,6—4,3%.

3.3. CAZUL DE REZEMARE 3°

Acest caz prezintă similitudine de realizare cu cazul de rezemare 2°; datorită reducerii numărului reazemelor, el este evident mai defavorabil.

Reacțiunea maximă V_7 crește la $27{,}2912P_s$, respectiv $14{,}4160P_t$, adică de 5,66 ori.

Efortul maxim în fața superioară (S_{max}) crește la $-31{,}247P_s$, respectiv $-16{,}165P_t$, adică cu 47 — 50% față de cazul etalon și se produce în barele 127 și 151 simetrice față de diagonala principală.

Efortul maxim în fața inferioară (T_{max}) crește foarte puțin (cu 3,3—3,5%) față de cazul etalon; el se produce tot în barele adiacente nodului inferior central.

Diagonalele întinse (266 și 315) sînt situate în planele mediatoare ale structurii și corespund reacțiunilor maxime. Diagonalele comprimate (218 și 358) concură la același nod ca și diagonalele întinse.

Săgeata maximă (în nodul inferior central 147) prezintă o creștere de 11,7—12,4% față de cazul de rezemare 1°.

3.4. CAZUL DE REZEMARE 4°

În condițiile de rezemare indicate în figura 2 — cazul 4° — structura începe să capete rezemări punctuale (izolate).

Reacțiunea maximă se produce în nodul 5 (care este cel mai apropiat de mijlocul laturii) și este mai mare decît V_7 din cazul de rezemare precedent.

Efortul maxim din fața superioară (S_{max}) crește încă destul de substanțial (la $-37{,}848P_s$, respectiv $-19{,}940P_t$) în barele 113 și 137 situate pe linia nodurilor de reazem 5—92.

Eforturile maxime din fața inferioară (T_{max}) sînt puțin influențate de modificarea condițiilor de rezemare. Ele cresc cu 8,6—11,4% față de cazul 1° și cu 5,2—7,6% față de cazul precedent 3°.

Diagonalele cu efortul maxim de întindere sînt decalate față de cazurile precedente, pentru a corespunde nodurilor rezemate 5 și 92 (barele 252 și 301); diagonalele cu efortul maxim de compresiune sînt 186 și 326 și concură în nodurile 19, respectiv 99 împreună cu diagonalele cele mai întinse. Valorile lor, spre deosebire de cazurile precedente, sînt mult diferite.

Săgeata maximă se produce tot în nodul inferior central (147) și prezintă o creștere de 18,1—19,2% față de cazul 1°, respectiv 5,7—6,0% față de cazul 3°.

3.5. CAZUL DE REZEMARE 5°

Avem a face cu un caz limită, cînd sînt rezemate doar extremitățile și mijlocul fiecărei laturi.

Reacțiunile cresc puternic (vezi valorile înscrise în tabela 1).

Efortul maxim din fața superioară (S_{max}) este mai mult decît dublul efortului maxim din cazul etalon, iar barele cele mai solicitate (115 și 163)

sînt situate pe linia care unește reazemele centrale 7 și 134, în vecinătatea acestora.

Efortul maxim din fața inferioară (T_{max}) este influențat considerabil și el, însă în mai mică măsură decît eforturile S. Ca ordin de mărime, el crește cu 40,3—64,8% față de cazul 1°, respectiv cu 29,1—47,8% față de cazul 4°. Spre deosebire de cazurile precedente, barele cele mai solicitate sînt 404 și 446 (în vecinătatea centrului) cînd este încărcată fața superioară, respectiv 401 și 443 (în vecinătatea marginilor) cînd este încărcată fața inferioară.

Diagonalele cu efort maxim de întindere sînt 266 și 315, iar cele cu efort maxim de compresiune sînt 230 și 279, în vecinătatea reazemelor centrale, corespunzător condițiilor de rezemare.

Săgeata maximă se produce tot în nodul inferior central (147) și prezintă o tendință de creștere rapidă, odată cu reducerea numărului de reazeme.

3.6. CAZUL DE REZEMARE 6°

Acesta este un caz extrem, cu caracter teoretic, cînd structura este rezemată doar la colțuri.

Reacțiunile sînt static determinate, datorită simetriei de încărcare și rezemare, și egale cu un sfert din încărcarea totală.

Datorită conformării geometrice complexe (cele două fețe avînd orientări diferite ale barelor), în fața superioară apar atît eforturi de compresiune, cît și de întindere considerabile (spre deosebire de cazurile precedente cînd eforturile de întindere sînt foarte reduse). Explicația este că, datorită rezemării doar la colțuri, structura reticulată se comportă ca o rețea de grinzi oblice, de secțiuni practic constante, însă de rigidități variabile, datorită lungimii lor diferite [5].

Eforturile maxime în fața superioară (S_{max}) se produc în bara 181 (din vecinătatea centrului) pentru cele de compresiune și în bara 104 (din vecinătatea colțului) pentru cele de întindere; pentru valorile numerice corespunzătoare vezi tabela 2.

Eforturile maxime în fața inferioară (T_{max}) sînt numai de întindere; ele denotă de asemenea o creștere valorică puternică și se produc în barele 369 și 411, la mijlocul laturilor marginale, independent de fața încărcată.

Diagonalele cu efort maxim de întindere sînt 224 și 273, iar cele cu efort maxim de compresiune 182 și 322, toate în vecinătatea punctelor de rezemare (colțuri).

Săgeata maximă se produce tot la centru (nodul inferior 147) însă are valori foarte mari.

Se constată astfel o concentrare puternică de eforturi și, de aceea, așa cum se întîmplă în practică, este recomandabilă o rezemare locală care să antreneze mai multe noduri vecine.

3.7. CAZUL DE REZEMARE 7°

Acest caz corespunde unor eventuale tasări în vecinătatea colțurilor. Din punctul de vedere al stării de eforturi și de deformații, el se apropie de cazurile 1°, 2°, 3° așa cum indică și valorile numerice înscrise în tabela 2.

3.8. CAZUL DE REZEMARE 8°

Acest caz corespunde unor eventuale tasări ale colțurilor, cînd structura rămîne rezemată doar în zona centrală a fiecărei laturi. Se mai poate ajunge la aceeași situație și în cazul în care, din punct de vedere arhitectonic, se prevăd intrări pe la colțuri (partiul are colțurile teșite), iar structura reticulată are colțurile în consolă.

Starea de eforturi și de deformații se apropie de aceea din cazurile 1°, 2°, 3°.

Eforturile maxime de compresiune — din fața superioară — (S_{max}) se produc în barele 112 și 124, situate pe linia care unește nodurile 4 și 71. Această linie are o comportare similară cu aceea a unei laturi libere (vezi discuția din [3]).

În privința eforturilor T_{max}, D_{+max}, D_{-max} și a săgeților w_{max} nu este nimic special de relevat, valorile corespunzătoare fiind date în tabela 2.

Pentru ilustrarea rezultatelor numerice obținute, în figurile 3—6 sînt redate valorile eforturilor S, T și D, precum și ale săgeților w pentru cazul cînd fața superioară este încărcată cu sarcini nodale egale P_s.

4. CONCLUZII

În studiul de față ne-am propus să examinăm influența condițiilor de rezemare ale unei structuri reticulate planar pătrate diagonale pe contur pătrat. Pentru un număr de 13 × 13 piramide au fost studiate opt cazuri de rezemare distincte corespunzătoare fie unor cerințe arhitectonice, fie unor condiții de tasări diferențiate ale stîlpilor pe care reazemă grinzile marginale, în condițiile de fundare pe terenuri sensibile la înmuiere.

Rezemarea structurii planare a fost considerată în fața superioară, iar sarcini nodale egale au fost aplicate fie în fața superioară (P_s), fie în fața inferioară (P_i).

Interpretarea rezultatelor obținute permite unele extinderi, corelat cu concluziile studiilor [3], [6].

Din interpretarea rezultatelor prezentate în tabelele 1 și 2, precum și în paragraful 3 pot fi desprinse unele observații și concluzii cu caracter mai general și anume :

a) Mărimea eforturilor și a săgeților celor două fețe crește odată cu descreșterea numărului de reazeme.

b) Săgețile maxime se produc, în toate cazurile, în nodul inferior central 147.

c) Eforturile maxime în fața inferioară sînt de întindere și se produc, de regulă, în barele adiacente nodului central. Pentru condițiile de rezemare 4°, 5° și 6° eforturile maxime se produc în bare mai depărtate de centru, funcție de poziția reazemelor.

d) Eforturile maxime se produc în aceleași bare, fie că încărcările sînt aplicate în fața superioară sau inferioară. Face excepție cazul 5° relativ la eforturile din fața inferioară.

e) Eforturile în fața superioară sînt dominant de compresiune. În particular, în cazul 6°, starea de eforturi se modifică, fiind caracterizată

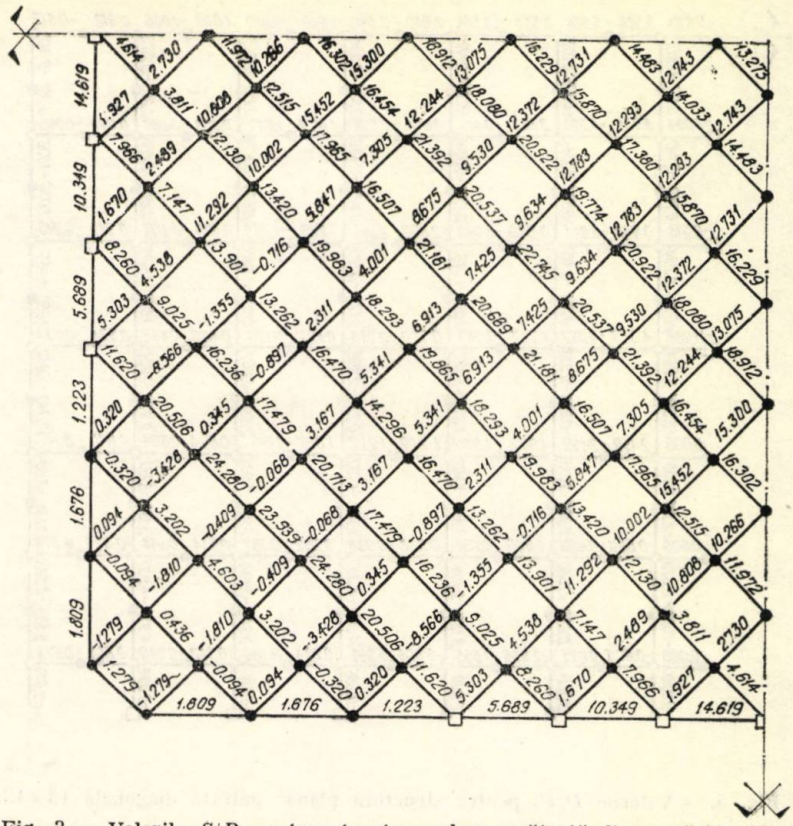


Fig. 3. — Valorile S/P_s pentru structura planar pătrată diagonală 13×13.

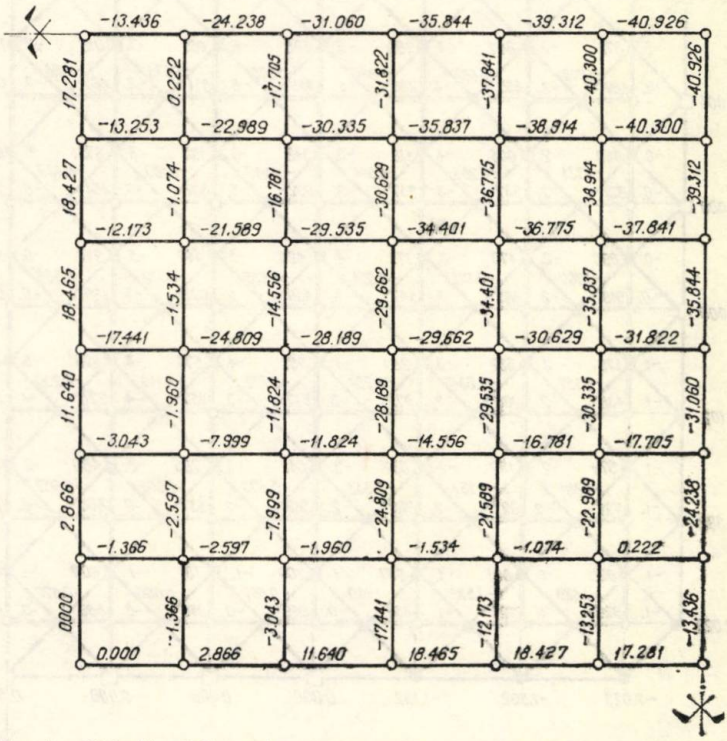


Fig. 4. — Valorile T/P_s pentru structura planar pătrată diagonală 13×13.

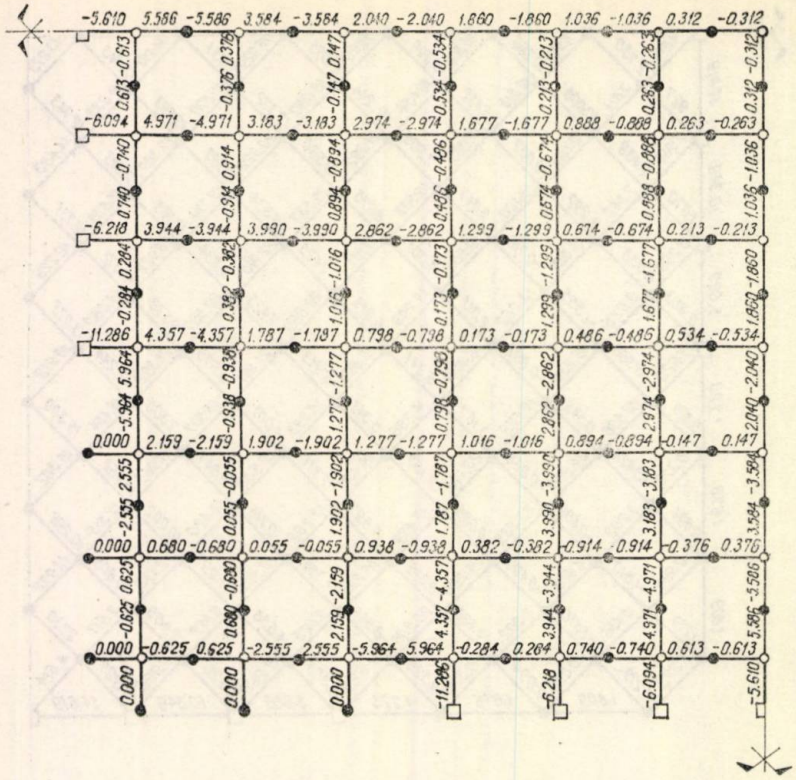


Fig. 5. — Valorile D/P_s pentru structura planar pătrată diagonală 13×13.

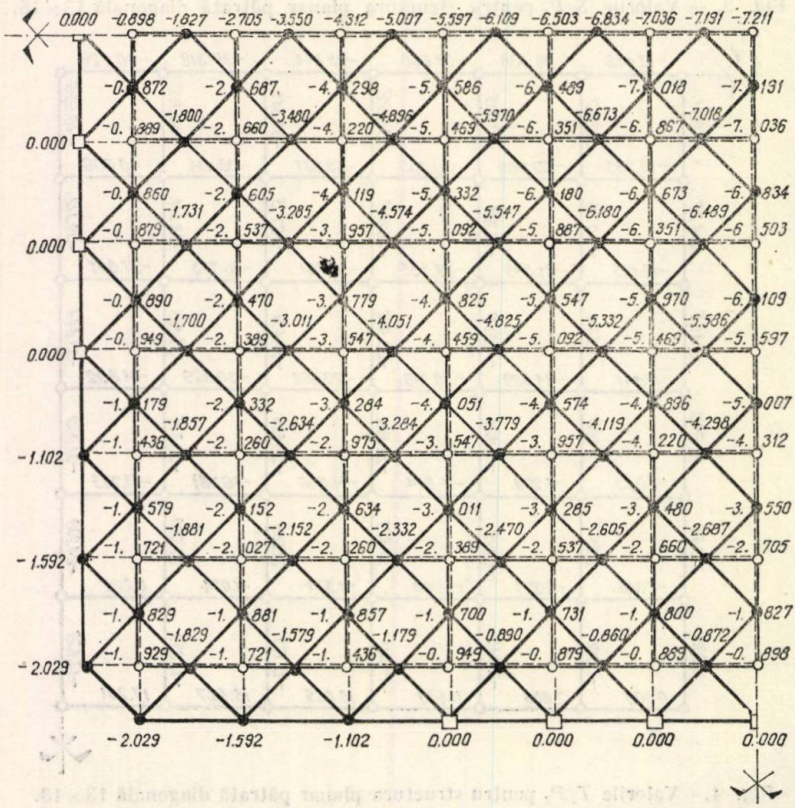


Fig. 6. — Valorile săgeţilor w (în cm) pentru structura planar pătrată diagonală 13×13.

și de prezența unor eforturi de întindere a căror mărime este aproximativ jumătate din efortul maxim de compresiune.

f) Eforturile în diagonale au semne alternate. Diferențele maxime, în valoare absolută, se realizează în cazul 4°, cînd eforturile de întindere sînt de 2,9—2,7 ori mai mari decît cele de compresiune.

★

Concluziile prezentului studiu concordă, în linii mari, cu acelea prezentate în studiul menționat al lui Lee și Makowski [2] cu diferența că am studiat un număr mai mare de cazuri de rezemare, pe o structură mai mare și ținînd seama totodată, că condițiile de conformare și de rezemare pe contur sînt diferite. Totodată dorim să menționăm că, în studiul [2] sînt examinate distinct și următoarele cazuri legate de condițiile de rezemare : influența barelor de contur (care asigură indeformabilitatea geometrică a structurii), influența rigidității nodurilor.

Datele numerice au fost obținute în baza programului de calcul OBLEM elaborat de al doilea dintre autori. La prelucrarea importantului volum de date numerice obținute am avut un larg și neprecupețit concurs din partea ing. Nguyen Ba Phuong, doctorand la Institutul de construcții București. Pentru aceasta autorii doresc să-i adreseze și pe această cale viile lor mulțumiri.

Primită la redacție la 28 august 1981

BIBLIOGRAFIE

1. V. BUTA, FR. LISSAI, A. PÂRVU, M. V. SOARE, *Realizări recente în proiectarea și construcția structurilor spațiale planare*. Bul. științ. al Institutului de construcții București, **XX**, *3—4*, 87—123 (1977).
2. HUNG-GUM LEE, Z. S. MAKOWSKI, *Study of Factors Affecting Stress Distribution in Double-Layer Grids of the Square-and-Diagonal Type*, Architectural Science Review, **20**, *3—4*, 90—102 (1977).
3. NGUYEN BA PHUONG, M. V. SOARE, *Probleme de montaj la proiectarea structurilor reticulate planare*, St. cerc. mec. apl., **41**, *2*, 293—316 (1982).
4. M. V. SOARE, *Statica și dinamica rețelelor spațiale planar pătrate simple prin aplicarea metodei mediului continuu echivalent*, St. cerc. mec. apl., **31**, *3*, 673—702 (1972).
5. M. V. SOARE, *On the Statics and Dynamics of Double-Layer Oblique Square Mesh Grids*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae, **79**, *3—4*, 335—350 (1974).
6. M. V. SOARE, GH. OBLEMENCO, *Structuri reticulate planare. Influența înălțimii structurii asupra stării de eforturi și de deformații*, St. cerc. mec. apl., **40**, *3*, 337—361 (1981).

CONSIDERAREA EFECTULUI HIDRODINAMIC ÎN OPTIMIZAREA FUNCȚIONALĂ A LAGĂRELOR HIDROSTATICE

de M. A. DUMBRAVĂ
Institutul politehnic București

În lucrare sînt dezvoltate unele rezultate obținute de autor în lucrări anterioare, privind optimizarea funcțională a lagărelor hidrostatice de mare viteză. Pe baza unor modele de calcul sînt explicate elementele de bază ale optimizării lagărului sub forma unui automat finit, pornind de la coeficientul genului curgerii ξ_t, propus de autor.

1. INTRODUCERE

Problema optimizării lagărelor hidrostatice este o problemă foarte importantă atît sub aspectul său tehnico-științific, cît și sub aspect economic. Una din direcțiile de interes economic o reprezintă posibilitatea de a reduce consumul de energie al mașinilor echipate cu asemenea lagăre. În contextul expansiunii continue a lagărelor hidrostatice în numeroase domenii de prim rang ale industriei constructoare de mașini, cum sînt: mașinile-unelte de mare precizie, mașinile-unelte grele, turbomașini etc., această posibilitate reprezintă un scop prioritar în proiectarea acestor lagăre.

Autorul consideră că problema optimizării lagărelor hidrostatice poate fi concepută ca avînd două laturi: una constructivă și cealaltă funcțională.

În ceea ce privește problema optimizării constructive, atît pentru lagărele radiale, cît și pentru cele axiale, ea a fost dezbătută pe larg în literatură în ultimii 15 ani. Este vorba de optimizarea dimensională geometrică, de alegerea optimă a sistemului de alimentare și a restrictorilor recomandați, de alegerea optimă a unor mărimi funcționale cum ar fi grosimea filmului de lubrifiant etc. Sub aspectul optimizării funcționale se pune problema alegerii regimului propriu-zis de lucru: turație, sarcină, presiune de alimentare, excentricitatea fusului, lubrifiant optim în condițiile impuse prin tema de proiectare.

Numărul mare de parametri, constructivi și funcționali, care intervin în acest calcul fac problema foarte dificilă, în special în privința alegerii criteriului de optimizare cel mai indicat. În lucrarea [1] este redată o metodologie modernă pentru optimizarea unui număr mare de parametri, prin metoda căutării unidimensionale, funcția obiectiv fiind puterea totală pierdută în sistemul pompă-lagăr. Metoda de calcul propusă în lucrările [4] și [5] permite de asemenea optimizarea parțială a unui lagăr hidrostatic radial.

Autorul abordează următorul punct de vedere asupra optimizării lagărelor hidrostatice, pornind de la o serie de constatări care apar la studierea literaturii de specialitate. În primul rînd niciuna dintre metodele propuse nu reprezintă o metodă generală, fie prin abordarea unilaterală a problemei, fie din cauza ipotezelor formulate în cadrul metodei.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 3, 1982, P. 418—426

În al doilea rînd, o metodică generală este mult prea complexă, necesită timp mare de calculator și este dificil de mînuit de proiectant. La aceasta se adaugă un element foarte important, anume tendința generală în industria mondială a trecerii la o producție tipizată, chiar standardizată de lagăre hidrostatice, ceea ce face ca problema optimizării constructive să nu mai aibă obiect, ea fiind impusă de către constructor.

În cazul lagărelor tipizate, pe primul plan trece alegerea corectă a parametrilor funcționali, în condițiile unor restricții date. Deoarece în general se dau prin tema de proiectare cel puțin următoarele valori : capacitatea portantă minimă, rigiditatea statică minimă, turația (turațiile) de lucru, excentricitatea admisibilă (în special la mașini-unelte), ca parametri independenți rămîn foarte puține mărimi : presiunea de alimentare, viscozitatea lubrifiantului, caracteristica restrictorului (dacă acesta din urmă este reglabil). În lucrările [2] și [3] s-a expus pe larg metoda de optimizare a lagărelor hidrostatice de mare viteză. În condițiile acestor lagăre, se propune ca parametru independent presiunea de alimentare p_a, în așa fel încît să se obțină o exploatare eficientă a efectului hidrodinamic ce apare în asemenea lagăre.

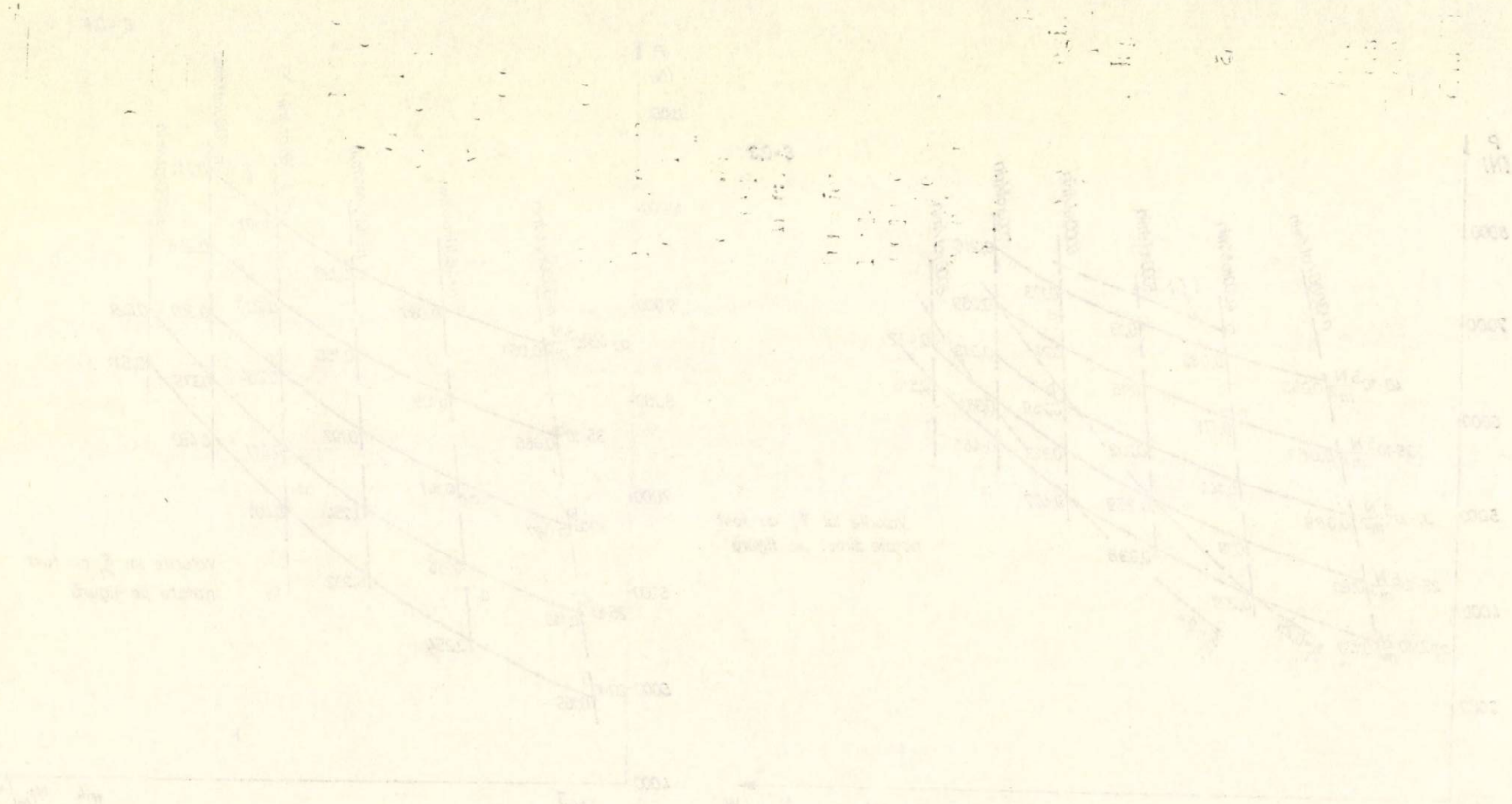
Măsurarea acestui efect se face cu ajutorul coeficientului genului curgerii ξ_t, definit astfel :

$$\xi_t = \frac{P_t - P_{t0}}{P_t},$$

unde P_t este portanța totală a lagărului în condițiile reale de funcționare, iar P_{t0} este portanța aceluiași lagăr la $n = 0$. În felul acesta se ia în considerație efectul comparativ al portanței de tip hidrodinamic față de cea de tip hidrostatic pur, evitînd parametri de lucru gen cifră de portanță [5], [6], care nu pot reda această comparație. Interpretarea matematică a coeficientului de hidrodinamicitate a fost făcută în [2], iar metodologia de aplicare pe baza noțiunii de automat finit s-a dat în lucrarea [5]. În continuare se vor aprofunda unele aspecte noi, inedite ale metodei de optimizare funcțională propusă în lucrarea menționată.

2. METODOLOGIA DE OPTIMIZARE FUNCȚIONALĂ APLICATĂ ÎN CAZUL LAGĂRELOR HIDROSTATICE RADIALE DE MARE VITEZĂ

Să considerăm un lagăr hidrostatic radial cu 6 degajări, cu $D = 100$ mm, $k = 1$, $k_1 = 0{,}8$, $k_b = 0{,}6$, $\Delta r = 30$ μm, viscozitatea uleiului impusă $\left(\mu = 0{,}45 \cdot 10^{-3} \frac{\text{daN}}{\text{m}^2}\text{s}\right)$ restrictor capilar ($d_c = 0{,}586$ mm, $l_c = 23{,}44$ mm) asemănător unui lagăr standardizat SKF tip BHR 100/Cl ([7]). Se urmărește optimizarea sa funcțională prin modelarea unui automat finit care să permită reglajul presiunii de alimentare, astfel ca efectul hidrodinamic din lagăr să fie bine utilizat. În lucrarea [3] s-a presupus că lagărul are următorul regim de lucru : $\varepsilon = 0{,}3$; $(C_{st})_{min} = 6{,}5 \cdot 10^8$ N/m,



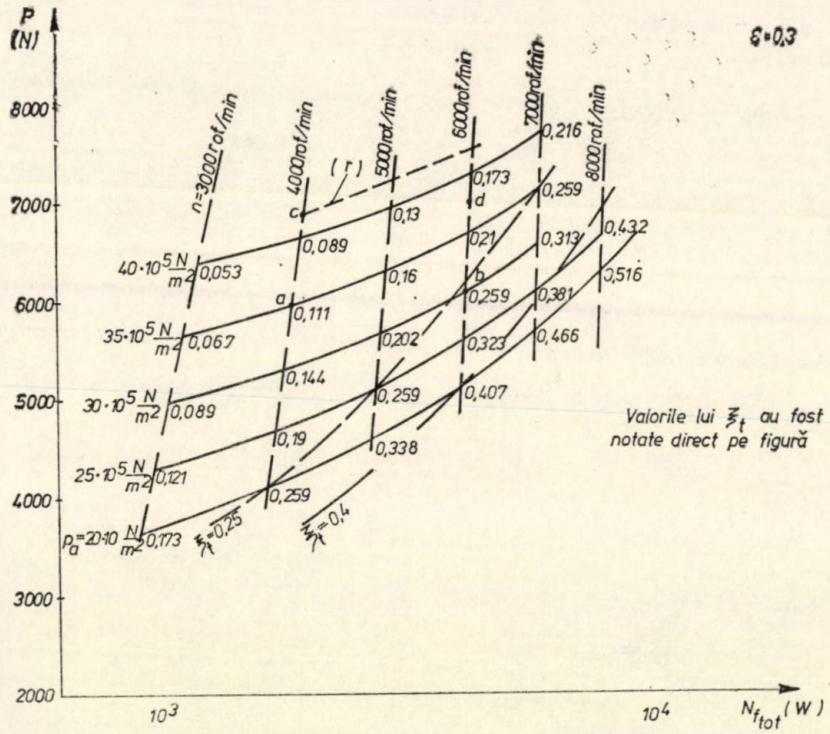


Fig. 2. — Variația capacității portante și a puterii totale pierdute în sistemul pompă-lagăr cu turația și presiunea de alimentare ($\varepsilon = 0{,}3$).

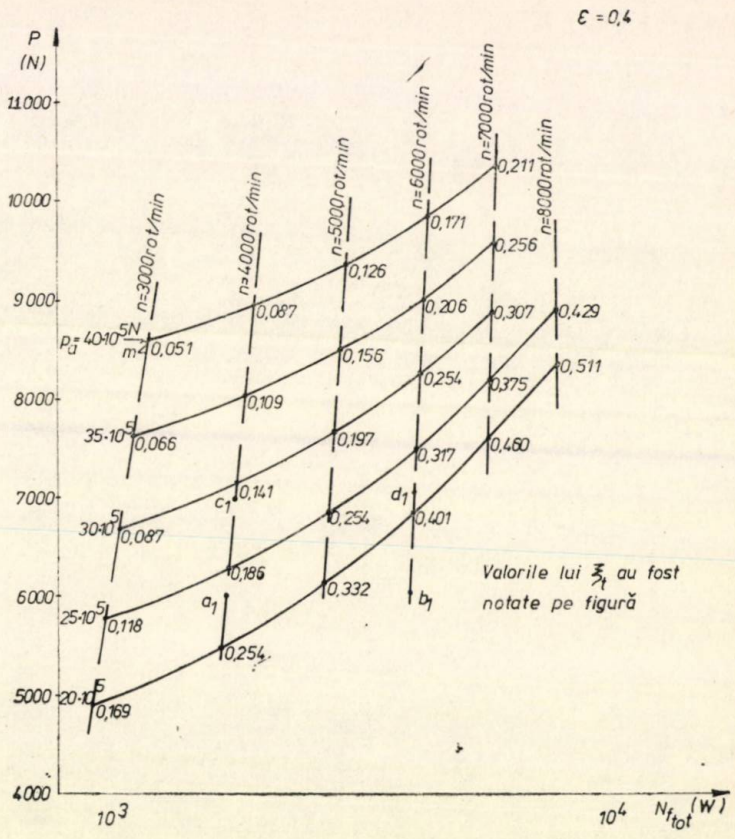


Fig. 3. — Variația capacității portante și a puterii totale pierdute în sistemul pompă-lagăr cu turația și presiunea de alimentare ($\varepsilon = 0{,}4$).

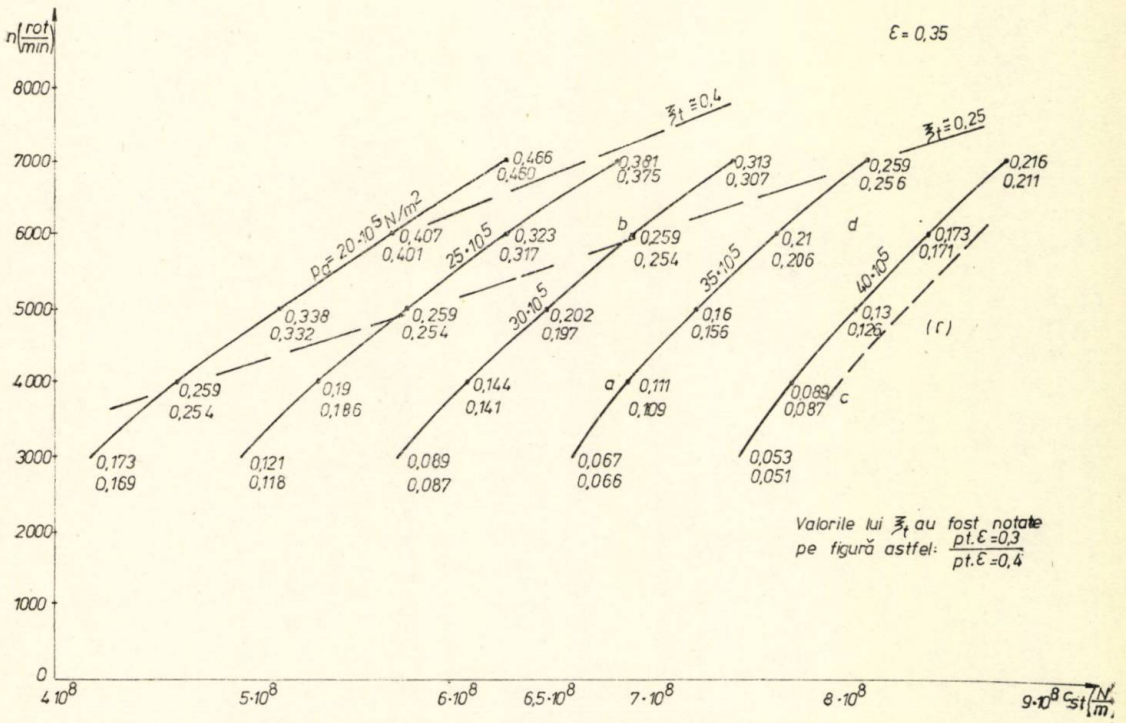


Fig. 4. — Variația rigidității statice cu turația și presiunea de alimentare ($\varepsilon \cong 0{,}35$).

Punctele corespunzătoare (α_i), $i = 1{,}6$ au fost indicate în figurile 5—7 și trecute și în figura 1. Se constată că alegerea unor regimuri mai complicate necesită elaborarea ambelor categorii de diagrame. În cazul pe care-l studiem am impus doar excentricitatea, fără a preciza valori pentru rigiditate. Scopul principal îl constituie scoaterea în evidență a economiei de energie, în care scop s-a trasat în tabel și partea corespunzătoare cazului de alimentare sub presiune constantă. Se constată o economie de aproximativ 1205 W, care, sub aspect energetic, poate fi și mai mare în măsura în care timpul de lucru în stările s_2, s_5, s_6 este predominant.

În figura 8 a fost trasat sub formă de graf automatul finit corespunzător programului propus. Mulțimea stărilor $S = (s_i)_{i=1,6}$ a fost dată în tabel, iar mulțimile intrărilor $X = (X_i)_{i=1,5}$ și cea a ieșirilor $Y = (Y_i)_{i=0,4}$ sînt tabelate mai jos :

Intrări	ΔP (N)	n(rot/min)
x_1	−3000	+2000
x_2	+1500	−1000
x_3	−1000	+1000
x_4	−3000	0
x_5	+5000	−2000

Ieșiri	Δp_a(N/m²)
Y_0	0
Y_1	$-20 \cdot 10^5$
Y_2	$-10 \cdot 10^5$
Y_3	$+10 \cdot 10^5$
Y_4	$+20 \cdot 10^5$

Vor rezulta funcţiile de tranziţie δ, respectiv de ieşiri λ astfel :

s/x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	δ
s_1	s_2	s_1	s_4	s_1	s_1
s_2	s_2	s_3	s_2	s_2	s_2
s_3	s_3	s_1	s_3	s_3	s_3
s_4	s_4	s_4	s_5	s_4	s_4
s_5	s_5	s_5	s_5	s_6	s_5
s_6	s_6	s_6	s_6	s_6	s_1

$s/$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	λ
s_1	Y_1	Y_0	Y_2	Y_0	Y_0	
s_2	Y_0	Y_3	Y_0	Y_0	Y_0	
s_3	Y_0	Y_3	Y_0	Y_0	Y_0	
s_4	Y_0	Y_0	Y_2	Y_0	Y_0	
s_5	Y_0	Y_0	Y_0	Y_0	Y_0	
s_6	Y_0	Y_0	Y_0	Y_0	Y_0	

În felul acesta se stabileşte o modalitate de reglare automată a presiunii de alimentare care permite exploatarea eficientă a efectului hidrodinamic care apare într-un lagăr hidrostatic de mare viteză.

CONCLUZII

Aşa cum s-a constatat din analiza exemplelor arătate în lucrare metoda de optimizare funcţională propusă de autor are în vedere exploatarea cît mai eficientă a efectului hidrodinamic care apare în lagărele hidrostatice cu $V \neq 0$. Este evident că acest efect creşte pe măsură ce se măreşte turaţia, simultan cu posibilitatea obţinerii unor regimuri nelaminare de curgere în lagăr.

Metodica de calcul utilizată rezolvă problema în orice condiţii privind caracterul curgerii în lagăr. Efectul hidrodinamic din lagăr este controlat prin valoarea coeficientului genului curgerii ξ_t. Practic, pe baza diargamelor elaborate cu ajutorul programului de calcul, se determină situaţiile de funcţionare optime, care apoi servesc la definirea unui automat finit, care să permită reglajul corespunzător al presiunii de alimentare. Principalele avantaje sînt : reducerea consumului de energie, reducerea consumului de lubrifiant, reducerea presiunii maxime de pompare, reducere temperaturii de funcţionare a lagărului.

Primită la redacţie la 29 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. R. BUENO, J. M. SANSINENEA, *Lubricacion hidrostatica. Diseno I optimizacion de cojinetes hidrostaticos radiales*, San Sebastian Lub. Hidrostatica, III, E.T.S.I.I., 1972.
2. M. A. DUMBRAVĂ, *Interpretarea matematică a efectului hidrodinamic dintr-un lagăr hidrostatic*. Lucr. Conf. Tribotehnica, 1978, Galaţi.
3. M. A. DUMBRAVĂ, *Optimizarea funcţională a lagărelor hidrostatice de mare viteză*, Lucr. Conf. a III-a de Maş. Unelte, 1979, Bucureşti.
4. D. HANCU, M. A. DUMBRAVĂ, D. ATANASIU, *Criterii de calcul şi de optimizare a reazemelor hidrostatice ale arborilor principali de la maşini-unelte*, Constr. de Maşini, **27**, *8* (1975).
5. GH. MANEA, D. HÂNCU, V. SIMIONESCU, M. A. DUMBRAVĂ, D. ATANASIU, *Aspecte teoretice caracteristice şi metoda de calcul pentru lagărele radiale hidrostatice fără canale longitudinale, unse cu lichide*, St. Cerc. mec. apl., **32**, *1* (1973).
6. J. P. O'DONOGHUE, W. B. ROWE, C. HOOKE, *Design of hydrostatic bearings using an operating parameter*, Wear, **14**, *5* (1969).
7. S. K. F., *S.K.F. hydrostatic bearings units series B.H.R., B.H.T. and B.H.C., S.K.F.* Tech. inf. 7314, 1973.

INSTALAȚIE PENTRU OXIDAREA PULBERII DE WOLFRAM

de LUCIAN CĂPITANU
Institutul de fizica și tehnologia materialelor București

În lucrare este prezentat unul din utilajele rezultate ca urmare a cercetărilor întreprinse pentru transpunerea la nivel de stație pilot, a tehnologiei de laborator pentru obținerea oxidului de wolfram. Oxidarea pulberii de wolfram, reacție puternic exotermă, constituie una dintre fazele procesului tehnologic de obținere a oxidului de wolfram, avînd rolul de a elimina conținutul de carbon și sulf din pulberea de wolfram obținută în fazele tehnologice anterioare.
În scopul realizării la nivel de pilot a parametrilor tehnologici stabiliți în urma cercetărilor de laborator, a fost necesară realizarea unei instalații specializate, cu productivitate ridicată, care să asigure reglarea largă a valorilor critice ale parametrilor procesului tehnologic. Instalația constituie o realizare ce depășește prin performanțe, instalațiile similare produse pînă în prezent.

I. INTRODUCERE

Operația de oxidare a pulberii de wolfram are loc la o temperatură de 950°C, în utilaje de tipul cuptoarelor cu tambur rotativ.

În conformitate cu concepția stației pilot, oxidarea trebuie realizată în flux discontinuu, pe șarje de greutate relativ mică, în circuit natural de aer atmosferic. Față de aceste cerințe, s-a adoptat ca soluție generală, realizarea unui utilaj rotativ, încălzit electric, cu acționare mecanică. Din considerente de protecție a muncii, utilajul și fazele sale de funcționare au fost complet automatizate.

II. CARACTERISTICI TEHNICE

— Puterea instalată a sistemului mecanic : . . . . . 1,5 kW.
— Puterea instalată totală, maximă : . . . . . 17,5 kW.
— Tipul utilajului : . . . rotativ, basculant și modular
— Încărcarea și descărcarea : . . . . prin basculare mecanică.
— Temperatura maximă de lucru : . . . . . 1000°C.
— Reglarea temperaturii : . . . . . automată.
— Greutatea utilajului : . . . . . 480 kg.
— Gabarit : . . . . . 1200 × 1000 × 750 mm

III. DESCRIEREA INSTALAȚIEI

O vedere de ansamblu a instalației este redată în figura 1, iar în figura 2 este prezentată schema de principiu.

Instalația, construită în soluție modulară pentru a permite demontarea și depanarea lesnicioasă, este compusă din următoarele părți componente :

a. Cuptorul de oxidare *1*, confecționat din tablă de oțel refractar, este un tambur de formă cilindrică, cu capete deschise, de formă tronconică și cu reducții cilindrice. În interiorul tamburului, pe întreaga lungime a generatoarei, sînt montate opt nervuri care au scopul de a asigura o încălzire uniformă a șarjei.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 3, 1982, P. 427–429

VALERIU BĂNUȚ, Calculul neliniar al structurilor. Edit. tehnică, Bucureș ti, 1981, 270 pag. 110 fig., 13 tabele.

Calculul liniar al structurilor a constituit vreme de decenii unica alternativă de calcul al structurilor și este încă și astăzi un element de bază în proiectarea construcțiilor. De altă parte însă, calculul neliniar este aproape tot atît de vechi ca și calculul liniar, fiind însă limitat — în trecut — doar la problemele de instabilitate elastică, unde s-a dovedit indispensabil pentru elucidarea comportării unor elemente de construcții zvelte, sub acțiunea forțelor de compresiune.

Progresele moderne în privința materialelor cu proprietăți fizico-mecanice superioare, noi sisteme constructive, rafinarea aparatului matematic și — nu pe ultimul loc — apariția și difuzarea tot mai largă a calculatoarelor electronice, împreună cu necesitatea imperioasă a economiilor de material au dus fie la sisteme constructive noi, fie la exploatarea intensivă a capacității de rezistență a secțiunilor și a elementelor de structură.

Toate acestea au făcut ca neliniaritatea să reprezinte un impact în calculul construcțiilor. Calculul neliniar este tot mai frecvent întîlnit în literatura de specialitate, fără a cunoaște multe lucrări de sinteză pe plan internațional și chiar fără a exista un consens în privința părerilor de principiu (neliniaritate, teorii de diferite ordine ș.a.).

Este meritul autorului, dr. ing. Valeriu Bănuț, de a fi realizat o asemenea monografie pentru structurile din bare. Vom menționa în cele ce urmează, cele opt capitole ale cărții și anume :

1. Problemele generale ale calculului structurilor de rezistență.
2. Principii energetice.
3. Elemente specifice calculului structurilor prin metode matriceale.
4. Calculul de ordinul I, liniar elastic.
5. Calculul de ordinul II, geometric neliniar.
6. Stabilitatea structurilor elastice.
7. Calculul neliniar elastic.
8. Calculul neliniar elasto-plastic.

Lucrarea a fost publicată de Editura tehnică în inspirata colecție „Calculul și alcătuirea construcțiilor", în care autorul a mai publicat, în colaborare cu prof. dr. ing. R Agent, și cartea „Calculul structurilor din beton armat cu stîlpi zvelți" (1979).

Deși de nivel superior, prin redactarea clară și sistematizată, prin numeroasele exemple numerice (16) din text, cartea va putea fi utilizată direct de studenții din anii mari ai facultăților de construcții, de cadrele tehnice din cercetare și proiectare, constituind nu numai un prețios îndreptar, dar și o bază pentru studii ulterioare.

În încheiere, putem afirma că sîntem în prezența unei veritabile premiere editoriale.

Mircea V. Soare

KOLLBRUNNER - HAJDIN Dünwandige Stäbe. Bd. 2 Stäbe mit deformierbaren Querschnitten. Nicht elastisches Verhalten dünwandiger Stäbe (Bare cu pereți subțiri. Vol. 2 Bare cu secțiune deformabilă. Comportarea inelastică a barelor cu pereți subțiri) Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975 127 fig., 285 pag.

Lucrarea Bare cu pereți subțiri a fost concepută de către cei doi autori în trei părți, în două volume. Prima parte, apărută în primul volum și tratînd despre Bare cu secțiune indeformabilă a apărut anterior și trata următoarele subiecte :

I Torsiunea barelor cu pereți subțiri după Saint Venant,
II Bare cu pereți subțiri cu profil deschis și axă dreaptă,
III Bare cu pereți subțiri cu profil închis și axă dreaptă,
IV Bare cu pereți subțiri cu axă curbă.

Volumul al doilea, de care ne ocupăm, conține părțile a doua și a treia ale lucrării. Cu numerotarea capitolelor în continuare, ele cuprind barele cu secțiuni deformabile (cap. V și VI), respectiv comportarea inelastică a barelor cu pereți subțiri (cap. VII și VIII).

Este cunoscut că barele cu secțiune deformabilă reprezintă o trecere de la barele obișnuite la plăcile subțiri prismatice sau pleoștite. Ele își găsesc o aplicare tot mai largă în construcțiile metalice, ca și în construcțiile de beton armat și beton precomprimat, unde pereții sînt subțiri, iar rigidizările fie că lipsesc, fie că sînt foarte rare.

Întrucît punerea în problemă este mult mai dificilă decît în primul caz și ar necesita, cu mijloacele tradiționale de rezolvare, un timp foarte îndelungat, a apărut necesară formularea matriceală pentru programarea la calculatorul electronic.

Această a doua parte se bazează pe publicații anterioare ale autorilor și are, după cum singuri menționează în introducere, un caracter monografic.

În partea a treia sînt tratate construcțiile mixte din beton și oțel, cu considerarea proprietăților reologice și apoi comportarea în domeniul plastic.

Teoria este ilustrată prin numeroase exemple de calcul și completată cu două anexe cu tabele.

Redactarea are aceeași claritate proprie și altor lucrări ale autorilor. Cartea, pe lîngă un caracter monografic și de sinteză, face un pas înainte față de lucrările înaintașilor St. P. Timoshenko și V. Z. Vlasov, aducînd contribuții noi pe care le-am semnalat precedent.

Ținînd seama că barelor cu pereți subțiri le-au fost dedicate puține lucrări cu caracter monografic, pe plan mondial, apariția celui de-al doilea volum al cărții lui Kollbrunner și Hajdin trebuie să fie salutată din multiple aspecte : claritate, concizie și totodată amploare a tematicii abordate, apropierea de practica prezentului.

Cartea va putea fi consultată cu deosebit interes de inginerii din proiectare și cercetare, din domeniul construcțiior civile și industriale, hidrotehnice, poduri și construcții mecanice.

Mircea V. Soare

H.-J. THOMAS, THERMISCHE KRAFTANLAGEN (Instalații termice de forță), Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975, 386 p,. 218 il., 278 ref. bibl.

Lucrarea de față se prezintă, așa cum o arată și seria editurii Springer în care apare, ca un curs pentru studenții specialităților termoenergetică și mecanică, profilul mașini termice. Structura cărții este astfel încît să fie acoperite principalele probleme teoretice și aplicative ale domeniului. După un prim capitol istoric urmează două capitole de fundamente. Se dau aici noțiuni elementare despre ciclul Carnot, transmisia căldurii, conversia energiei termice în energie mecanică, criterii de similitudine, materiale utilizate în termoenergetică. Sînt analizate ciclurile clasice de tip Clausius-Rankine (cu sublinierea rolului preîncălzirii regenerative în creșterea randamentului termic), cicluri de turbine cu gaze și cicluri combinate abur-gaze.

În continuarea lucrării se trece la prezentarea principiilor realizării și funcționării echipamentelor de bază din centralele termoelectrice. Generatoarele de abur cu combustibil fosil sînt privite sub două aspecte : procesul de ardere a combustibilului și generarea de căldură și procesul de transmitere a căldurii. Constructiv, aceasta revine la cele două circuite de bază : circuitul combustibil-aer și circuitul abur-apă. Pentru ambele aspecte sînt prezentate problemele funcționale și constructive, inclusiv bazele reglării automate a generatoarelor de abur.

Un capitol aparte este rezervat reactoarelor nucleare ca sursă de energie în centralele electrice. O extindere mai mare se acordă aici fizicii (cineticii) reactoarelor și reglării automate a acestora. În schimb, partea de transmisie a căldurii este mai restrînsă, lipsind aspectele constructive ale generatoarelor de abur din centralele nucleare.

Un al șaselea capitol privește mașinile termice rotative. Se dau noțiuni privind ciclurile și aerodinamica proceselor, insistîndu-se asupra turbinelor cu abur și cu gaze. Un paragraf special este dedicat problemelor actuale de rezistență și vibrații.

Lucrarea se încheie cu un capitol privind tendințele actuale (în 1975 n.n.) în construcția de termocentrale, precum și cu o serie de anexe cuprinzînd simboluri și unități de măsură caracteristice domeniului.

În general cartea se prezintă ca echilibrată, scrisă clar, avînd un rol de inițiere în multe probleme. Pentru aprofundare sînt necesare lucrări specializate pe domenii (existente și în limba română).

Vl. Răsvan

Acad. ELIE CARAFOLI, V. N. CONSTANTINESCU, Dinamica fluidelor incompresibile, Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1981, 638 pag., 347 fig.

Literatura de specialitate în limba română s-a îmbogățit cu o lucrare de mari proporții, care reprezintă însă numai prima parte a unui tratat de dimensiuni considerabile și cu tendințe exhaustive. Această apariție este deosebit de bine venită mai ales dacă ținem seama de experiența autorilor și de lipsa unei astfel de lucrări în țara noastră. Mai mult încă, la volumul la care se anunță, tratatul își va găsi cu greu echivalentul în literatura de specialitate din întreaga lume.

În douăzeci și șase de capitole sînt tratate problemele legate de mișcarea fluidelor perfecte incompresibile, inclusiv hidro-aerostatica.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 41, nr. 4 iulie—august 1982

SUMAR

STUDII

D. LARIONESCU, Rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare ce intervin în probleme de proiectare a mecanismelor plane cu cuple inferioare 435

MIHAIL POPESCU, Rezultate experimentale în studiul mişcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune. I 443

G. ONU, Includerea efectului forţei tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă 459

ŞERBAN VASILESCU, Influenţa forţei tăietoare asupra deformatelor statice ale barelor drepte 470

GHEORGHE AMZA, NICOLAE CONSTANTIN, Cercetări privind influenţa energiei ultrasonore asupra rezistenţei la oboseală a pieselor prelucrate prin deformare plastică a stratului superficial în cîmp ultrasonor 490

DAN-MIHAI ŞTEFĂNESCU, Instalaţie pentru măsurarea mobilităţii şi impedanţei mecanice 501

L. CĂPITANU, Instalaţie de granulare pentru oxid de wolfram 514

RECENZII 518

REZOLVAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII NELINIARE CE INTERVIN ÎN PROBLEME DE PROIECTARE A MECANISMELOR PLANE CU CUPLE INFERIOARE

de D. LARIONESCU
Institutul politehnic București

Se prezintă acea etapă a problemei proiectării mecanismelor plane cu cuple inferioare ce privește aproximarea legii de mișcare impusă. Se fac aprecieri asupra sistemelor de ecuații neliniare la care se ajunge în cursul rezolvărilor problemelor de proiectare, asupra existenței soluției în cazul utilizării metodei iterative. Se prezintă un algoritm de calcul pentru rezolvarea acestor sisteme. Se dau indicații privind alegerea nodurilor de interpolare asemănător amplasării punctelor abaterilor limtă ale polinoamelor lui Cebîșev.

Teoretic, reproducerea exactă a unei legi de mișcare dată (dependență unghiulară sau traiectorie) cu ajutorul mecanismelor plane cu cuple inferioare este posibilă numai în anumite cazuri particulare.

În majoritatea cazurilor proiectarea mecanismelor, se reduce la găsirea acelor dimensiuni cinematice ale elementelor care asigură numai o reproducere aproximativă a dependenței date. Datorită erorilor inevitabile de execuție a mecanismului, elasticității elementelor lui și jocurilor din cuplele cinematice precum și altor cauze, dependența reală reprodusă de mecanism va fi întotdeauna diferită de cea calculată, teoretic, de aceea la proiectarea mecanismelor nu are sens să se caute reproducerea dependenței date cu un grad de precizie mai mare decît cel admisibil.

Rezolvarea problemei proiectării reprezintă în esență o problemă de aproximare a funcțiilor. Dependența dată care trebuie să fie reprodusă de mecanism o presupunem sub forma funcției

$$y = f(x). \tag{1}$$

De multe ori, această funcție are semnificația dependenței unghiulare între mișcarea elementului condus al mecanismului, în raport cu mișcarea elementului conducător. În problemele reproducerii unei traiectorii date această funcție reprezintă dependența dată între puncte situate pe traiectoria impusă de tema de proiectare și punctele corespunzătoare pe tariectoria ce poate fi realizată cu un anumit tip de mecanism. În cazul general, mecanismul proiectat va reproduce această dependență doar aproximativ. Fie

$$y = F(x) \tag{2}$$

legea de mișcare ce poate fi realizată de mecanismul ce urmează a fi calculat. Forma acestei funcții depinde de schema cinematică a mecanismului și de dimensiunile elementelor lui. Evident, dimensiunile cinematice ale elementelor mecanismului trebuie astfel alese încît funcția $y = F(x)$ să difere cît mai puțin posibil de funcția $y = f(x)$. Trebuie deci rezolvată problema aproximării funcției f prin F. Succesul rezolvării problemei depinde în mare măsură de o alegere reușită a funcției ce caracterizează

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 4, 1982, P. 435–442

abaterea de la dependența dată. Această funcție trebuie să fie cît mai simplă și în același timp să exprime suficient de exact abaterea de la dependența dată.

Prin abaterea $\Delta(x) = F(x) - f(x)$ (3)

se poate înțelege nu numai diferența ordonatelor Δy dar și diferența absciselor Δx; în general distanța Δ între diagramele funcțiilor măsurate după o anumită direcție, de obicei direcția normală. Abaterea Δn măsurată pe direcția normalei va exprima de obicei mai exact abaterea de la funcția dată. În afară de aceasta, alegerea direcției după care trebuie să se măsoare abaterea $\Delta(x)$ în unele cazuri este determinată de condițiile de lucru ale mecanismelor. Expresia analitică a abaterii în problemele reproducerii unei legi de mișcare dată sau a unei traiectorii este complicată chiar pentru patrulaterul cel mai simplu. De aceea se folosește la rezolvarea acestor probleme numai în unele cazuri particulare, de exemplu la rezolvarea problemei aproximării curbei de bielă a mecanismului simetric cu o dreaptă. În majoritatea cazurilor se folosește o abatere ponderată

$$\Delta_p(x) = p(x)\,\Delta(x), \tag{4}$$

unde ponderea $p(x)$ este o funcție continuă arbitrară ce nu se anulează pe intervalul considerat de variația variabilei x. Funcția pondere trebuie să satisfacă inegalitățile

$$0 < m \leqslant p(x) \leqslant M$$

sau (5)

$$0 > m \geqslant p(x) \geqslant M.$$

Dacă limitele m și M sînt suficient de apropiate între ele, adică ponderea $p(x)$ diferă foarte puțin de o mărime constantă, atunci abaterea ponderată $\Delta_p(x)$ poate caracteriza variația abaterii de la dependența dată. Caracterul arbitral al alegerii ponderii $p(x)$ (cu condițiile restrictive indicate) permite să se schimbe mult forma funcției $\Delta(x)$ astfel încît prin alegerea corespunzătoare a ponderii $p(x)$ în multe cazuri se poate simplifica atît de mult expresia funcției ce caracterizează abaterea de la dependența dată, încît rezolvarea problemei de aproximare devine posibilă cu ajutorul metodelor elementare.

De exemplu, să presupunem că dependența dată este reprezentată de o dreaptă paralelă cu axa Ox, de ecuația $y = k$,
iar funcția ce poate fi reprodusă de mecanism are expresia

$$y = \sqrt{p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3},$$

unde p_0, p_1, p_2 și p_3 sînt coeficienți ce depind de dimensiunile cinematice ale mecanismului. Abaterea de la dependența dată va fi funcția

$$\Delta(x) = k - \sqrt{p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3}$$

puţin comodă pentru calcularea coeficienţilor necunoscuţi p_0, p_1, p_2 şi p_3.

Pentru simplificarea problemei de aproximare se poate alege ponderea

$$p(x) = k + \sqrt{p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3}.$$

Prin alegerea convenabilă a coeficienţilor necunoscuţi p_0, p_1, p_2 şi p_3 valorile funcţiei $y = k$ diferă puţin de valorile $y = \sqrt{p_0x^3+p_1x^2+p_2x+p_3}$ pe intervalul considerat de variaţia argumentului x. De aici rezultă că ponderea $p(x)$ diferă puţin de o mărime constantă, egală cu $2k$. Diferenţa ponderată în acest caz are forma

$$\Delta_p(x) = p(x)\ \Delta(x) = k^2 - p_0x^3 - p_1x^2 - p_2x - p_3,$$

adică un polinom de gradul doi. Determinarea valorilor coeficienţilor p_0, p_1, p_2 şi p_3 pentru care abaterea ponderată $\Delta_p(x)$ va diferi puţin de 0 pe intervalul considerat, va fi mai simplă decît în cazul abaterii $\Delta(x)$. Se înlocuieşte deci problema de aproximare cu o problemă de aproximare ponderată. Cel mai simplu criteriu de aproximare îl constituie interpolarea, adică coincidenţa funcţiei $\Delta_p(x)$ cu 0 în k puncte ale intervalului de variaţie a lui x. Această cerinţă conduce la următorul sistem de ecuaţie

$$\Delta_p(x_i) = F(x_i) - f(x_i) = 0,\ i = 1,\ 2,\ldots k. \tag{6}$$

Interpolarea devine mai simplă dacă funcţia $F(x)$ a fost adusă la forma unui polinom generalizat

$$F(x) = p_0\varphi_0(x) + p_1\ \varphi_1(x) + \ldots + p_n\varphi_n(x),$$

unde p_0, p_1, $\ldots p_n$ sînt coeficienţi numerici, iar sistemul de funcţii $\{\varphi_k^{(x)}\}$ este liniar independent format din funcţii continue.

Rezultă că sistemul (6) se mai poate scrie în acest caz

$$\begin{aligned}
&a_{00}p_0 + a_{01}p_1 + \ldots + a_{0n}p_n = b_0,\\
&a_{10}p_0 + a_{11}p_1 + \ldots + a_{1n}p_n = b_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{k0}p_0 + a_{ki}p_1 + \ldots + a_{kn}p_n = b_k,
\end{aligned} \tag{7}$$

unde

$$a_{ij} = \varphi_j(x_i);\quad i = 0,\ 1,\ldots k,\quad j = 0,\quad 1,\ldots n,$$

$$b_i = f(x_i);\ i = 0,\ 1,\ldots k.$$

De obicei se ia numărul nodurilor de interpolare k egal cu numărul parametrilor necunoscuţi ai sistemului, în orice caz $k \leqslant n + 1$. De cele mai multe ori chiar în cazul problemelor simple de proiectare a mecanismelor la sistemul (7) se adaugă ecuaţii neliniare, formate cu parametri p_i. De exem-

plu, în cazul mecanismului patrulater articulat și al temei de proiectare ce constă în reproducerea unei mișcări date pentru elementul condus, abaterea ponderată $\Delta_p(x)$ este de forma [1]:

$$\Delta_p(x) = 2[p_0 f_0(x) + p_1 f_1(x) + \ldots + p_6 f_6(x)],$$

unde

$$p_5 = -(p_0 p_2 + p_1 p_3),$$

$$p_6 = p_1 p_2 - p_0 p_3.$$

Rezultă că în majoritatea cazurilor, sistemul ce reprezintă problema de proiectare este un sistem de ecuații neliniare scris în cazul general astfel:

$$f_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{8}$$

Acest sistem poate fi scris vectorial sub forma

$$F(\bar{x}) = 0, \tag{9}$$

unde $F : R^n \to R$ este o aplicație vectorială ale cărei componente sînt f_k, adică

$$F(\bar{x}) = [f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \ldots f_n(\bar{x})]^T. \tag{10}$$

Sistemul (8) poate fi scris astfel

$$\bar{x} = g(\bar{x}). \tag{11}$$

Soluția (sau rădăcina) unui astfel de sistem este un vector

$$\bar{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n]^T, \tag{12}$$

care este un punct din spațiul R^n.
Folosind un vector de start

$$\bar{x}_0 = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}]^T, \tag{13}$$

se poate forma un algoritm de calcul ce conduce prin iterații succesive la vectorul $\bar{\alpha}$

$$\bar{x}^{(k+1)} = g(\bar{x}^{(k)}). \tag{14}$$

Fie $\bar{x} = g(\bar{x})$ ecuația vectorială care are soluția $\bar{x} = \bar{\alpha}$, iar componentele $g_i(\bar{x})$ ale vectorului g au derivate de ordinul întîi, îndeplinind condiția

$$\left| \frac{\partial g_k(\bar{x})}{\partial x_k} \right| \leqslant \frac{\lambda}{n}, \quad \lambda < 1, \tag{15}$$

pentru toţi vectorii $\bar{x}$ care satisfac relaţia

$$||\bar{x} - \bar{\alpha}|| < d \tag{16}$$

considerînd o normă în R^n. Atunci se poate afirma :

Pentru orice vector iniţial $\bar{x}_0$ ce verifică relaţia (16), vectorii $x_0^{(k)}$ obţinuţi din procesul iterativ (14), satisfac de asemenea relaţia (16) şi converg către rădăcina $\bar{\alpha}$ a sistemului (11) care este unică.

Într-adevăr, pentru doi vectori $\bar{x}$, $\bar{y}$ ce satisfac relaţia (16) se poate scrie formula lui Lagrange,

$$g_i(\bar{x}) - g_i(\bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\bar{\alpha}^{(i)})}{\partial x_j} (x_j - y_j); \qquad i = 1, 2, \ldots n, \tag{17}$$

unde $\bar{\alpha}^{(i)}$ este un punct ce se află pe segmentul ce uneşte punctele corespunzătoare vectorilor $\bar{x}$ şi $\bar{y}$. Utilizînd proprietatea (15) se obţine

$$|g_i(\bar{x}) - g_i(\bar{y})| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i(\bar{\alpha}^{(i)})}{\partial x_j} \right| |x_j - y_j| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial g_i(\bar{\alpha}^{(i)})}{\partial x_j} \right| ||\bar{x} - \bar{y}|| \leqslant \lambda |\bar{x} - \bar{y}||. \tag{18}$$

Deoarece inegalitatea are loc pentru orice i, rezultă

$$||g(\bar{x}) - g(\bar{y})|| \leqslant \lambda ||\bar{x} - \bar{y}||. \tag{19}$$

Pentru orice $\bar{x}^{(0)}$ ce satisface (16), avem

$$||\bar{x}^{(1)} - \bar{\alpha}|| = ||g(\bar{x}^{(0)}) - g(\bar{\alpha})|| \leqslant \lambda ||x^{(0)} - \bar{\alpha}|| < \lambda d$$

şi astfel rezultă că şi vectorul $\bar{x}^{(1)}$ satisface relaţia (16).
Analog,

$$||\bar{x}^{(k)} - \bar{\alpha}|| = ||g(\bar{x}^{(k-1)} - g(\bar{\alpha})|| \leqslant \lambda ||\bar{x}^{(k-1)} - \alpha|| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda ||g(\bar{x}^{(k-2)}) - g(\bar{\alpha})|| \leqslant \lambda^2 ||\bar{x}^{(k-2)} - \bar{\alpha}|| \leqslant \ldots \leqslant \lambda^k d.$$

Rezultă deci că toţi vectorii $x^{(k)}$ satisfac relaţia (16).
Convergenţa şirului de vectori obţinuţi cu ajutorul relaţiei iterative (14) rezultă din condiţia $\lambda < 1$, deci

$$\lim_{k \to \infty} \bar{x}^{(k)} = \bar{\alpha}. \tag{20}$$

Metoda iterativă ce foloseşte algoritmul de calcul dat prin relaţiile (14) poate fi îmbunătăţită. Într-adevăr, fie un sistem de două ecuaţii neliniare cu două necunoscute

$$\begin{aligned} F(x,\ y) &= 0, \\ G(x,\ y) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

şi $x_0,\ y_0$ o soluţie iniţială.
Se dezvoltă $F(x, y)$ şi $G(x,\ y)$ în serie Taylor şi se neglijează toţi termenii cu excepţia celor liniari în x şi y.

$$F(x,\ y) = F(x_0,\ y_0) + (x - x_0)\frac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial y}, \tag{22}$$

$$G(x,\ y) = G(x_0,\ y_0) + (x - x_0)\frac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial y}.$$

Introducînd pe $F(x,\ y)$ şi $G(x,\ y)$ date de relaţiile (21) în sistemul (21) şi rearanjînd termenii se obţine

$$\begin{aligned} x\frac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial x} + y\frac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial y} &= -F(x_0,\ y_0) + \\ + x_0\frac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial x} + y_0\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}&, \\ x\frac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial x} + y\frac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial y} &= \\ = -G(x_0,\ y_0) + x_0\frac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial x} + y_0\frac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial y}&. \end{aligned} \tag{23}$$

Sistemul (23) este format din două ecuaţii liniare avînd determinantul egal cu jacobianul $J(x_0,\ y_0)$

$$J(x_0,\ y_0) = \frac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial x}\frac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial y} - \frac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial y}\frac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial x}, \tag{24}$$

Cu condiţia $J \neq 0$, se poate rezolva sistemul, obţinînd:

$$x = x_0 - \frac{F(x_0, y_0)\dfrac{\partial G(x_0,\ y_0)}{\partial y} - G(x_0,\ y_0)\dfrac{\partial F(x_0,\ y_0)}{\partial y}}{J(x_0,\ y_0)}, \tag{25}$$

$$y = y_0 + \frac{F(x_0,y_0)\dfrac{\partial G(x_0, y_0)}{\partial x} - G(x_0, y_0)\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}}{J(x_0, y_0)}.$$

Valorile lui x, y calculate din relaţiile (25) constituie valorile x_1, y_1 din procesul iterativ dat de formulele:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F\dfrac{\partial G}{\partial y} - G\dfrac{\partial F}{\partial y}}{J}, \qquad (26)$$

$$y_n = y_{n-1} + \frac{F\dfrac{\partial G}{\partial x} - G\dfrac{\partial F}{\partial x}}{J},$$

unde

$$J = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}.$$

În formulele de mai sus funcţiile F şi G precum şi derivatele lor parţiale sînt evaluate pentru $x = x_{n-1}$ şi $y = y_{n-1}$.

Extinderea acestei tehnici de rezolvare a sistemelor de ecuaţii neliniare poate fi extinsă uşor şi pentru sisteme de trei sau mai multe ecuaţii şi un număr egal de necunoscute.

Convergenţa metodei depinde evident de alegerea bună a soluţiei iniţiale. În proiectarea mecanismelor se recomandă o soluţie de start calculată grafic. În ceea ce priveşte nodurile de interpolare x_i din formula (6) se recomandă amplasarea punctelor x_i la fel ca a punctelor abaterilor limită ale polinoamelor lui Cebîşev.

Presupunînd că abaterea $\Delta_p(x)$ a fost înlocuită printr-un polinom Cebîşev

$$T_k(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_k,$$

atunci valorile aproximative ale absciselor punctelor abaterilor limită $x^{(1)}$ se calculează astfel:

$$x_i^{(1)} = \frac{x_0 + x_m}{2} + \frac{x_0 - x_m}{2}\cos\frac{i\pi}{k} \qquad i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (27)$$

unde x_0 şi x_n sînt valorile argumentului x la capetele intervalului considerat.

Dar abaterea $\Delta_p^{(x)}$ poate fi de asemenea înlocuită prin polinomul lui Cebîşev

$$T_k(y) = y^k + p_1 y^{k-1} + \ldots + p_k,$$

unde $y = f(x)$ este funcţia dată. Introducînd notaţia $x = f_1(y)$ vom obţine că valorile aproximative ale absciselor punctelor abaterilor limită $x_i^{(2)}$ se pot calcula astfel:

$$x_i^{(2)} = f_1(y_i^{(2)}), \tag{28}$$

unde

$$y_i^{(2)} = \frac{y_0 + y_m}{2} + \frac{y_0 - y_m}{2} \cos \frac{i\pi}{k} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

y_0 şi y_m sînt valorile funcţiei date la captele intervalului considerat. Valorile lui $x_i^{(1)}$ şi $x_i^{(2)}$ nu coincid, cu excepţia cazului relaţiei liniare între x şi y. La rezolvarea problemelor de proiectare a mecanismelor în multe cazuri este greu de a stabili dacă abscisele punctelor abaterilor limită vor fi mai apropiate de valorile lui $x_i^{(1)}$ sau $x_i^{(2)}$. De aceea de obicei se vor lua drept valori aproximative ale absciselor punctelor abaterilor limită, media aritmetică a celor 2 valori

$$x_i = \frac{x_i^{(1)} + x_i^{(2)}}{2}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{29}$$

Se obţin astfel abscisele nodurilor de interpolare.

Se poate de asemenea alege amplasarea centrelor de interpolare pe baza formulelor (29), unde $x_i^{(1)}$, respectiv $x_i^{(2)}$, sînt:

$$x_i^{(1)} = x_0 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2i-1}{2k}\pi\right) (x_m - x_0),$$

$$x_i^{(2)} = f_1(y_i^{(2)}); \quad y_i^{(2)} = y_0 + \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{2i-1}{2k}\pi\right)(y_m - y_0),$$

$$i = 1, 2, \ldots k. \tag{30}$$

Primită la redacţie la 30 noiembrie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. BOGDAN, D. LARIONESCU S. CONONOVICI, *Sinteza mecanismelor plane articulate*, Edit. Academiei R. S. România, 1977.
2. GH. DODESCU, *Metode numerice în algebră*, Edit. tehnică, 1977.
3. W. S. DORN, D. D. Mc CRACKEN, *Metode numerice cu program în fortran 1*., Edit. tehnică, Bucureşti.
4. N. I. LEVITSKI, *Proiectirovanie ploskih mehanizmov s nazişimi parami.*, Edit. Academiei de ştiinţe a U. R. S. S., Moscova, 1950.

REZULTATE EXPERIMENTALE ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR NEPERMANENTE DIN SISTEMELE HIDRAULICE SUB PRESIUNE. I

de MIHAIL POPESCU
Institutul de cercetări hidrotehnice, București

În lucrare se prezintă într-o formă prescurtată rezultatele unui amplu studiu experimental asupra principalelor tipuri de mișcări nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune, întîlnite în practica hidrotehnică. Studiul s-a efectuat pe o instalație experimentală de laborator, cu caracteristici tehnico-funcționale deosebite și dispunînd de aparatură electronică modernă de măsură, instalație concepută și realizată în cadrul Institutului de cercetări hidrotehnice din București. Lucrarea este alcătuită din două părți. În prima parte se prezintă instalația experimentală, aparatura de măsură și rezultatele experimentale obținute privind studiul mișcărilor rapid variabile din sistemele hidraulice sub presiune, iar partea a doua cuprinde rezultatele experimentale privind studiul mișcărilor lent variabile precum și al mișcărilor din domeniul de trecere între mișcările rapid și lent variabile.

1. INTRODUCERE

Studiul funcționării sistemelor hidraulice sub presiune (uzine hidroelectrice, stații de pompare, instalații hidraulice industriale ș.a.) la regimuri tranzitorii prezintă interes deosebit atît teoretic, cît și practic, ceea ce explică numărul mare de publicații consacrate acestui subiect.

În general, în sistemele hidraulice sub presiune, mișcarea lichidelor are un caracter permanent, dar există și situații în care mișcarea este nepermanentă datorită perturbațiilor produse în exploatare de modificarea debitelor de consum, de manevrarea vanelor sau datorită unor accidente.

În consecință, mișcările nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune sînt provocate de trecerea de la un regim de funcționare la altul, fiind denumite și *regimuri hidraulice tranzitorii*.

Într-un regim hidraulic tranzitoriu mișcarea lichidului poate fi lent sau rapid variabilă, în funcție de caracterul perturbației și de condițiile inițiale, de caracteristicile de elasticitate ale lichidului și ale sistemului hidraulic respectiv, precum și de instalațiile și dispozitivele de protecție.

Mișcarea rapid variabilă se caracterizează prin amplitudini și frecvențe mari ale oscilațiilor de presiune, a căror desfășurare este influențată puternic de compresibilitatea lichidului și de elasticitatea materialului din care este confecționată conducta. Transportul de masă în mișcarea rapid variabilă este neglijabil. În mod obișnuit, mișcarea rapid variabilă a lichidelor în conducte sub presiune se numește *lovitură de berbec* sau *șoc hidraulic* sau *mișcare ondulatorie*.

Mișcarea lent variabilă a lichidelor în sisteme hidraulice sub presiune este mișcarea cu amplitudini și frecvențe mici ale oscilațiilor de presiune, însă cu transport de masă important în sistem. Compresibilitatea lichidului și elasticitatea materialului din care este confecționată conducta pot fi neglijate în calculul variațiilor de debit și de presiune. Mișcarea lent variabilă în sisteme hidraulice sub presiune se mai numește și *mișcare oscilatorie*.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 4, 1982, P. 443–458

Oscilația în masă a fluidului într-un sistem hidraulic sub presiune este o mișcare lent variabilă în care transformarea de energie se face prin transportul în masă al fluidului respectiv, efectele elastice fiind neglijabile.

În cazul în care oscilațiile presiunii la lovitura de berbec în sistemele hidraulice depășesc în amplitudine valorile extreme admisibile (presiuni maxime mai mari decît presiunea admisibilă sau presiuni minime apropiate de presiunea de cavitație), sistemele hidraulice sub presiune se echipează cu mijloace de protecție (diferite dispozitive sau instalații de protecție).

Mijloacele de protecție atenuează sau chiar elimină fenomentul lovitură de berbec fie în întreg sistemul hidraulic, fie numai în zonele în care securitatea sistemului este periclitată.

În funcție de natura lor, mijloacele de protecție, de exemplu cele de tip castel de echilibru sau rezervor cu pernă de aer, pot să schimbe complet caracterul mișcării nepermanente a lichidului în sistemul hidraulic sub presiune respectiv, în sensul transformării mișcării ondulatorii în mișcare oscilatorie.

Uzinele hidroelectrice cu derivație sînt prevăzute, în mod obișnuit, cu castele de echilibru ca mijloc de protecție.

Stațiile de pompare se pot echipa în schimb cu mai multe tipuri de mijloace de protecție, care pot fi clasificate în două grupe mari :

1. Mijloace de protecție care micșorează sau limitează amplitudinea oscilațiilor de presiune din conducte, păstrînd caracterul de mișcare rapid variabilă a lichidului (lovitura de berbec).

2. Mijloace de protecție care transformă mișcarea rapid variabilă a lichidului în mișcare lent variabilă (oscilație în masă) în întreg sistemul hidraulic sau cel puțin într-o anumită parte a sistemului.

Din *grupa 1* fac parte vanele cu închidere programată, supapele de suprapresiune, dispozitivele de aerisire, conductele de ocolire a stației de pompare, volanturile cu inerție suplimentară ș.a.

Din *grupa a 2-a* fac parte în principal castelele de echilibru și rezervoarele cu pernă de aer sub presiune.

În practică, aceste mijloace se folosesc la stațiile de pompare, singure sau în combinație. Aplicabilitate largă au căpătat rezervorul cu pernă de aer sub presiune și castelul de echilibru. Rezervorul cu pernă de aer sub presiune poate fi utilizat practic în orice condiții de presiuni și debite la care funcționează instalația de pompare. Castelul de echilibru, din motive economice, se aplică în acele secțiuni ale conductelor de refulare în care presiunile sînt limitate la valori de ordinul a 20—25 m coloană de apă.

În general, studiul mișcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune, cu aplicație la studiul funcționării la regimuri hidraulice tranzitorii a uzinelor hidroelectrice și stațiilor de pompare, se efectuează fie prin metode de calcul analitice sau numerice, fie prin metode experimentale pe instalații de laborator sau pe sisteme hidrotehnice în funcțiune.

Astfel, pentru studiul *mișcărilor rapid variabile* (*lovitura de berbec*), din literatura de specialitate se menționează : metodele analitice [7], [8], [27]; metodele numerice [1]—[4], [6], [22], [28]; metodele experimentale [9], [12]—[14], [24], [29].

Pentru studiul *mișcărilor lent variabile* (*oscilația în masă*), la uzine hidroelectrice și stații de pompare prevăzute cu castele de echilibru sau rezervoare de aer, se menționează : metodele analitice [5], [8], [15], [19];

metodele numerice [2], [4], [6], [16]—[18], [20]—[22], [25], [26], [30]; metodele experimentale [10], [13], [14].

În lucrările noastre anterioare din acest domeniu am dezvoltat în special metodele de calcul numeric și analitic [6], [16] —[22], [30].

În lucrarea de față vom prezenta într-o formă prescurtată rezultatele unui amplu studiu experimental asupra principalelor tipuri de mișcări nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune, întîlnite în practica hidrotehnică.

Studiul s-a efectuat pe o instalație experimentală de laborator, de dimensiuni relativ mari, concepută și realizată în cadrul Institutului de cercetări hidrotehnice din București (fig. 1).

În prima parte a lucrării se prezintă instalația experimentală, aparatura de măsură și rezultatele obținute privind studiul mișcărilor rapid variabile din sistemele hidraulice sub presiune, iar partea a doua cuprinde rezultatele experimentale privind studiul mișcărilor lent variabile precum și al mișcărilor din domeniul de trecere între mișcările rapid și lent variabile.

2. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ

Instalația experimentală, de dimensiuni relativ mari, pentru studiul mișcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune, concepută și realizată în cadrul Institutului de cercetări hidrotehnice din București, are caracteristici tehnico-funcționale deosebite permițînd reproducerea și studierea în condiții de laborator, practic a tuturor tipurilor de mișcări nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune întîlnite în domeniul hidrotehnic.

Din acest punct de vedere instalația apare ca remarcabilă față de celelalte instalații de laborator similare, cunoscute sau menționate în literatura de specialitate [9], [12], [29].

Instalația poate funcționa în două variante principale :

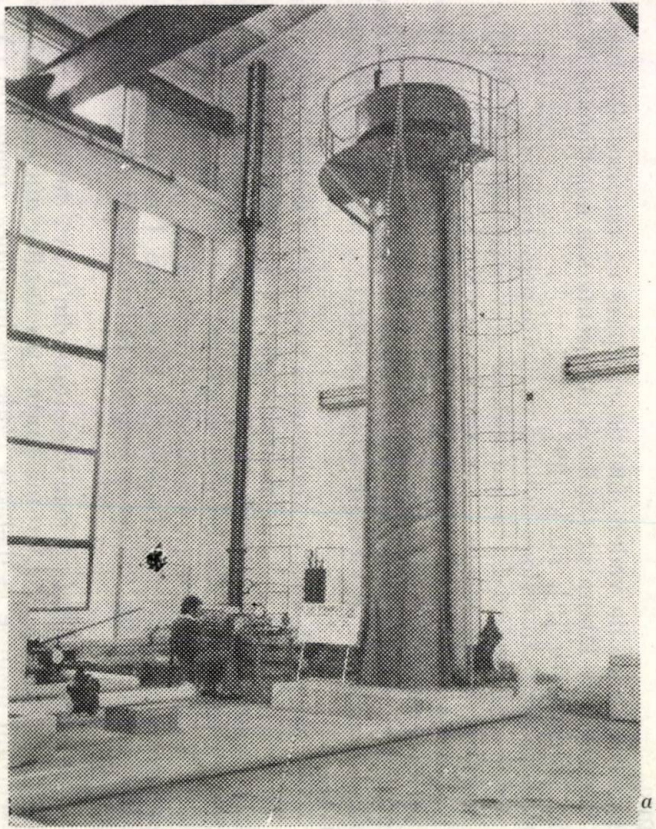
— *Schema hidraulică I* (cu alimentare gravitațională — turbinare) : rezervor de alimentare — conductă — vană (fig. 1, 2 și 3) ;

— *Schema hidraulică II* (cu pompare) : pompă — conductă — bazin de refulare (fig. 1, 4 și 5).

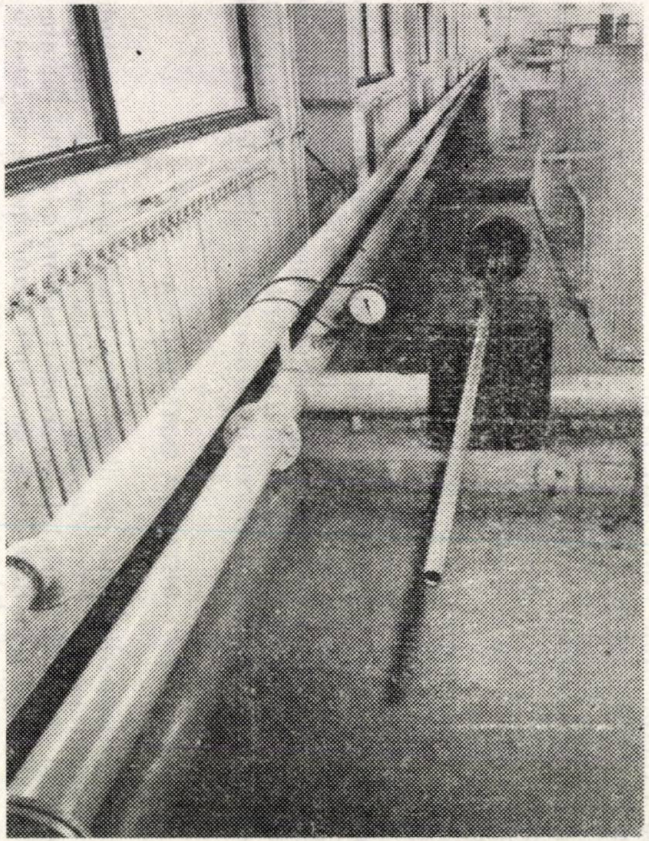
Pentru descrierea instalației, în continuare se prezintă pe scurt cîteva date tehnico-funcționale privind principalele părți ce alcătuiesc instalația (fig. 2 și 4).

A — *Rezervorul de apă*, de construcție metalică, este de formă cilindrică cu $H = 7{,}75$ m, $D = 1$ m, și are la partea superioară un preaplin prevăzut cu un deversor de măsură și două conducte de evacuare Ø 200 mm. Alimentarea cu apă a rezervorului este asigurată de la rețeaua sub presiune a halei de hidraulică în care este amplasată instalația, printr-o conductă Ø 200 mm prevăzută cu vană. În schema hidraulică I rezervorul are rol de bazin de alimentare (fig. 2), iar în schema hidraulică II are rol de bazin de refulare (fig. 4).

B — *Conducta de presiune* este executată din țeavă de oțel Ø 125 mm cu lungimea $L = 161$ m. Pentru măsurarea presiunilor din conductă s-au ales opt secțiuni dispuse la distanțe egale pe lungimea conductei ($\Delta x = 20$ m), în care s-au montat ștuțuri care permit racordarea traductorilor



a)



b)

Fig. 1. — Instalaţie experimentală de laborator pentru studiul mişcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune — vedere de ansamblu : *a* — rezervor de alimentare, sisteme de protecţie ; *b* — conductă sub presiune, rezervor de măsură.

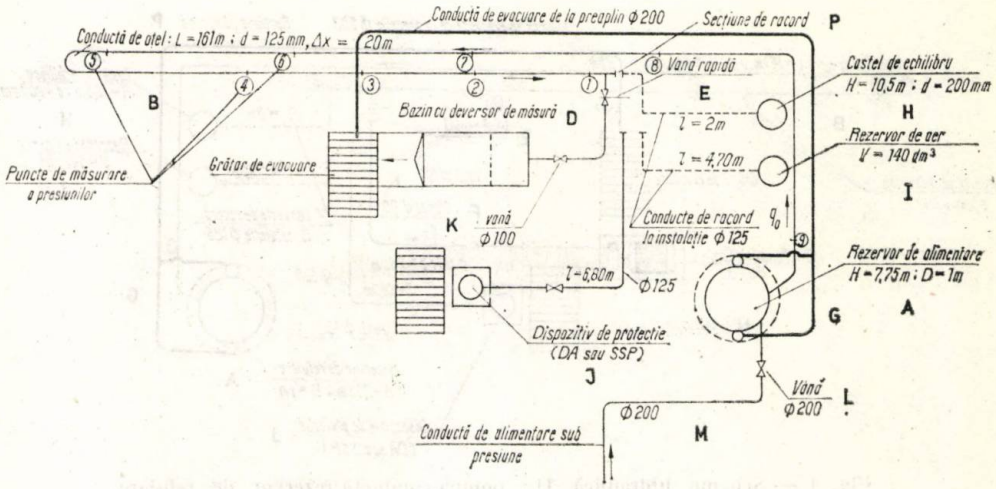


Fig. 2. — Schema hidraulică I: rezervor de alimentare — conductă — vană.

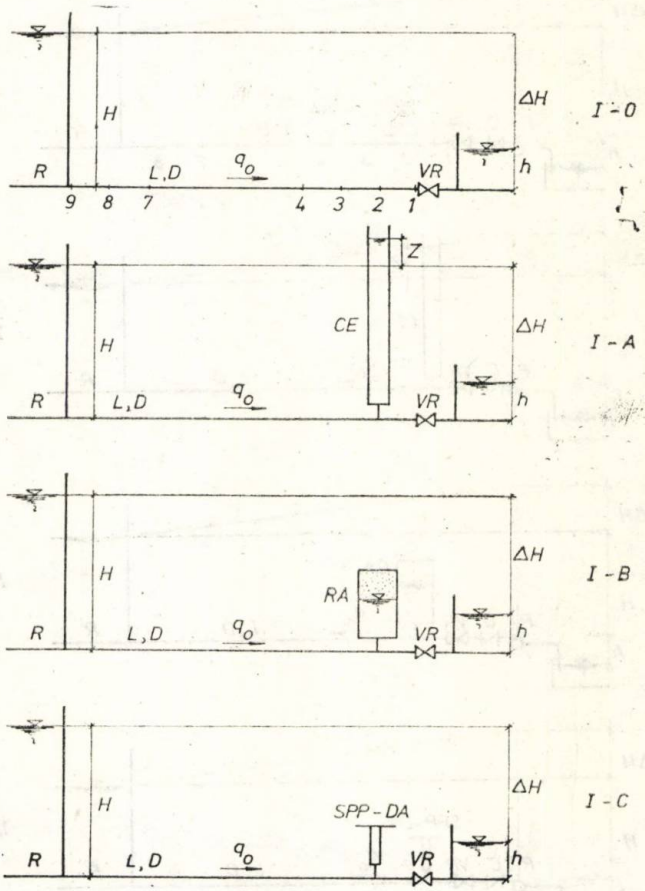


Fig. 3. — Schema hidraulică I — profil longitudinal, în variantele cu și fără mijloace de protecție.

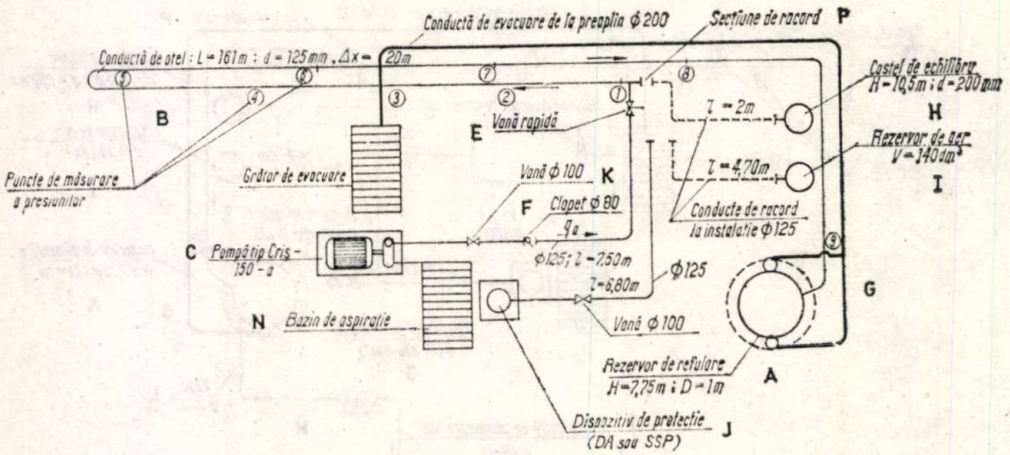


Fig. 4. — Schema hidraulică II: pompă-conductă-rezervor de refulare.

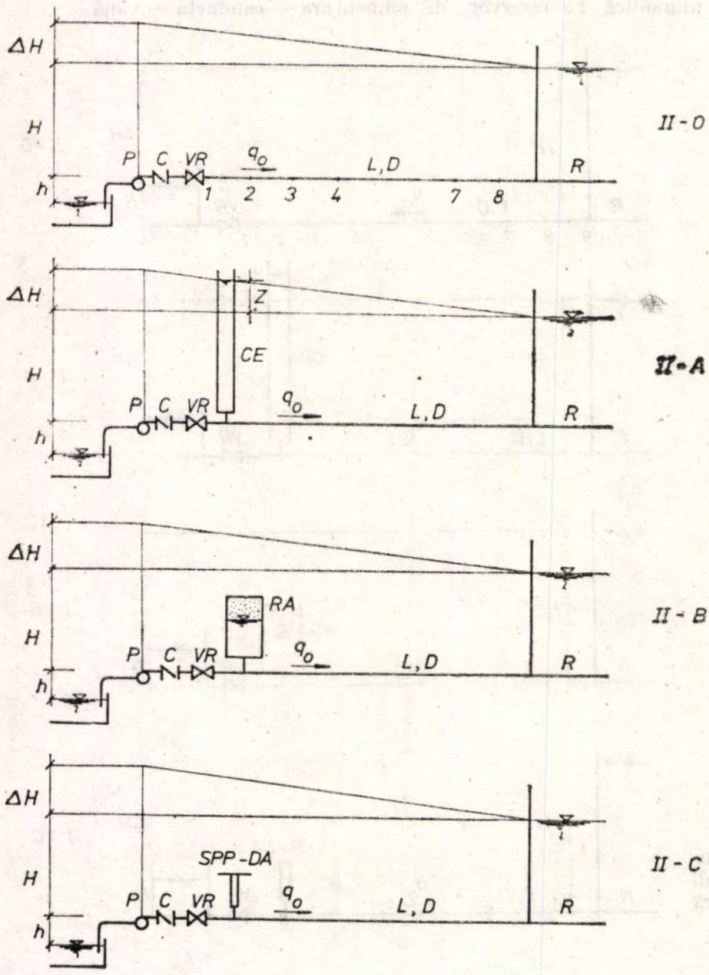


Fig. 5. — Schema hidraulică II — profil longitudinal, în variantele cu și fără mijloace de protecție.

de presiune la conductă. Punctele de măsurare a presiunilor s-au notat cu cifre de la 1 la 8 (fig. 2 și 4).

C — *Pompa tip Criș — 150-a* este o pompă de tip centrifugă monoetajată, avînd puterea electromotorului $N = 13$ kW, turația $n = 1\,500$ rot/min și caracteristicile de regim $H_0 = 20$ m și $Q_0 = 50$ l/s. Pe conducta de refulare lîngă pompă este montată o vană Ø 100 mm pentru reglajul debitului pompei și un clapet de reținere la curgerea inversă Ø 80 mm.

D — *Bazin de capăt cu deversor de măsură*, care asigură în schema hidraulică I măsurarea debitelor de regim cu ajutorul unui deversor triunghiular.

E — *Vană cu închidere rapidă (Ø 125 mm)*, permite închiderea bruscă a conductei, realizînd timpi de închidere (t_i) sub 0,1 s.

F — *Clapet de reținere la curgerea inversă (Ø 80 mm)*, asigură închiderea circuitului conductă-bazin de refulare, după oprirea pompei.

G — *Conductă de scurgere (Ø 200 mm)*, asigură evacuarea debitului de la preaplinul rezervorului de apă, în ambele scheme de funcționare a instalației.

H — *Castel de echilibru*, cu înălțimea $H = 10{,}50$ m și diametrul $D = 200$ mm, poate fi racordat la instalație în ambele scheme de funcționare.

I — *Rezervor de aer*, cu volum total de 140 dm^3 și cu posibilitatea de asigurare a unei perne controlate de aer de volum 10—70 dm^3, poate fi racordat la instalație în ambele scheme de funcționare.

J — *Dispozitiv de protecție antișoc*. S-au experimentat următoarele tipuri de dispozitive :

— supapă de suprapresiune (SSP), Ø 80 mm ;
— dispozitiv de aerisire (DA), Ø 150 mm ;
— dispozitiv de aerisire-dezaerisire (DAD), Ø 100 mm.

K — *Vană de reglaj (Ø 100 mm)*, permite reglajul debitului de regim pe schema instalației hidraulice I (fig. 2), sau pe schema instalației hidraulice II (fig. 4).

L — *Vană de reglaj (Ø 200 mm)*, permite reglajul debitului de alimentare a rezervorului de nivel constant în cadrul schemei hidraulice I.

M — *Conductă de alimentare (Ø 200 mm)* a rezervorului de nivel constant în cadrul schemei hidraulice I (care funcționează în circuit deschis).

N — *Bazin de aspirație al pompei*, la care este racordată conducta de scurgere de la preaplinul bazinului de refulare. În felul acesta schema hidraulică II funcționează în circuit închis.

P — *Secțiune de racord la instalație în ambele scheme hidraulice*, pentru mijloacele de protecție experimentate : castel de echilibru, rezervor de aer, dispozitiv antișoc.

Instalația poate funcționa la regimuri hidraulice permanente cu debite $q_0 = 5—25$ l/s, la care corespund viteze în conductă $v_0 = 0{,}4—2$ m/s.

După cum se poate observa (fig. 2 și 4), sistemele și dispozitivele de protecție la lovitura de berbec au fost dispuse în plan astfel încît s-au putut racorda la instalația experimentală în secțiunea 1, cu ajutorul unor conducte de lungimi relativ mici.

3. APARATAURA DE MĂSURĂ

Pentru măsurarea și înregistrarea continuă a presiunilor variabile din conductă s-au folosit traductori de presiune, concepuți și realizați în institutul nostru, care au fost conectați la aparatura convențională existentă în dotare. Traductorii de presiune utilizați sînt de tip rezistiv cu mărci tensometrice și fac parte din clasa traductorilor cu membrană elastică plană. Dintre performanțele tehnice ale traductorilor se menționează faptul că acoperă un domeniu de presiuni cuprins între —1 și 30 atmosfere cu o sensibilitate de $\pm$ 1,5%.

Instalația electronică folosită oferă posibilitatea măsurării simultane a presiunilor în 5 puncte cu ajutorul unui înregistrator oscilografic de tip Visicorder — 1706 cu șase canale, care la rîndul său permite conectarea la canalele punții tensometrice. Înregistratorul folosit este de tipul oscilografului cu lumină ultravioletă, cu înregistrare pe hîrtie sensibilă și developare la lumina naturală. Conectarea traductorilor la puntea de măsură se face cu ajutorul unor piese speciale și a unor cabluri tensometrice bifilare.

Eroarea de măsurare a întregului lanț de măsură este de aproximativ 1,5%.

4. REZULTATE EXPERIMENTALE ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR RAPID VARIABILE (LOVITURA DE BERBEC)

S-au efectuat experimentări cu debite de regim $q_0 = 5-25$ l/s, care corespund la următoarele valori de pierderi de sarcină în regim permanent pe conductă :

$$\Delta H = 0{,}5\,;\ 1\,;\ 1{,}5\,;\ 2\,;\ \ldots\ ;\ 6 \text{ m}.$$

S-a reprodus pe cale experimentală și s-a măsurat fenomenul lovitură de berbec pe schemele hidraulice fundamentale I și II în variantele fără protecție și în variantele prevăzute cu dispozitive antișoc care atenuează fenomenul lovitură de berbec, păstrînd neschimbat caracterul mișcării rapid variabilă.

4.1. SCHEMA HIDRAULICĂ I, FĂRĂ PROTECȚIE (I—O)

Instalația experimentală care reproduce schema hidraulică fundamentală I — fără protecție, este formată din următoarele părți principale : rezervor de alimentare cu nivel constant, conducta de presiune, vană cu închidere rapidă, bazin de capăt cu deversor de măsură (fig. 2 și 3). Pe această schemă s-a efectuat un număr mare de experiențe cu mai multe debite de regim și cu înregistrări de presiune în mai multe puncte de pe conductă.

Pe baza rezultatelor măsurătorilor s-a putut face o analiză amănunțită a fenomenului lovitură de berbec pentru cazul apariției în sistem a unor zone cu cavitație puternică. Refacerea coloanei de apă din conductă în ultima fază a fenomenului de cavitație s-a manifestat prin producerea unor zgomote puternice asemănătoare unor „lovituri de ciocan în conduc-

tă". Aceste zgomote au avut un caracter ritmic urmărind fazele de desfășurare a fenomenului de cavitație.

Pentru exemplificarea rezultatelor experimentale obținute se prezintă o diagramă de presiuni măsurate simultan în punctele 1 și 7, la un debit inițial de regim $q_0 = 16{,}5$ l/s după închiderea rapidă a vanei într-un interval de timp $t_i < 0{,}1$ s (fig. 6). Se remarcă apariția în punctul 1 a

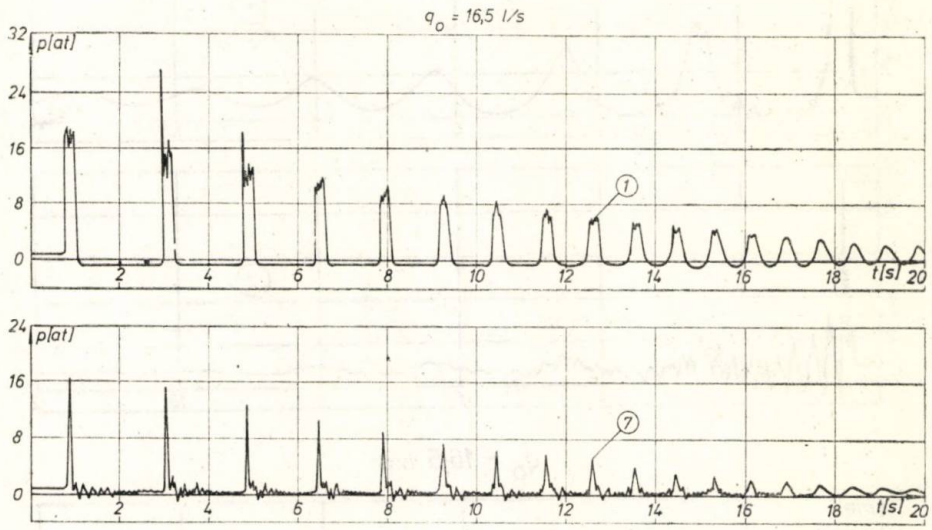


Fig. 6. — Schema I—O : măsurători de presiune, simultan în punctele 1 și 7 de pe conductă.

unor vîrfuri instantanee de presiune care succed imediat fenomenului de cavitație și care se suprapun peste amplitudinile maxime ale fenomenului de lovitură de berbec.

Avînd în vedere importanța teoretică și practică a acestui rezultat experimental, se preconizează analizarea lui în mod special într-o lucrare separată.

4.2. SCHEMA HIDRAULICĂ I, CU DISPOZITIVE ANTIȘOC (I—C)

S-au efectuat experimentări pe schema hidraulică I prevăzută cu următoarele tipuri de dispozitive antișoc : supapă de suprapresiune (SSP), Ø 80 mm ; dispozitiv de aerisire (DA), Ø = 150 mm ; dispozitiv de aerisire-dezaerisire (DAD), Ø 100 mm.

Efectul supapei de suprapresiune asupra desfășurării fenomenului lovitură de berbec din conductă este ilustrat cu cîteva rezultate experimentale în figurile 7 și 8. Deși caracteristica supapei (presiunea de descărcare) este de 10,5 atm, se constată apariția unor vîrfuri de presiune peste această limită, care se pot explica dacă se are în vedere timpul de răspuns al supapei la solicitări dinamice. De asemenea, se constată eliminarea

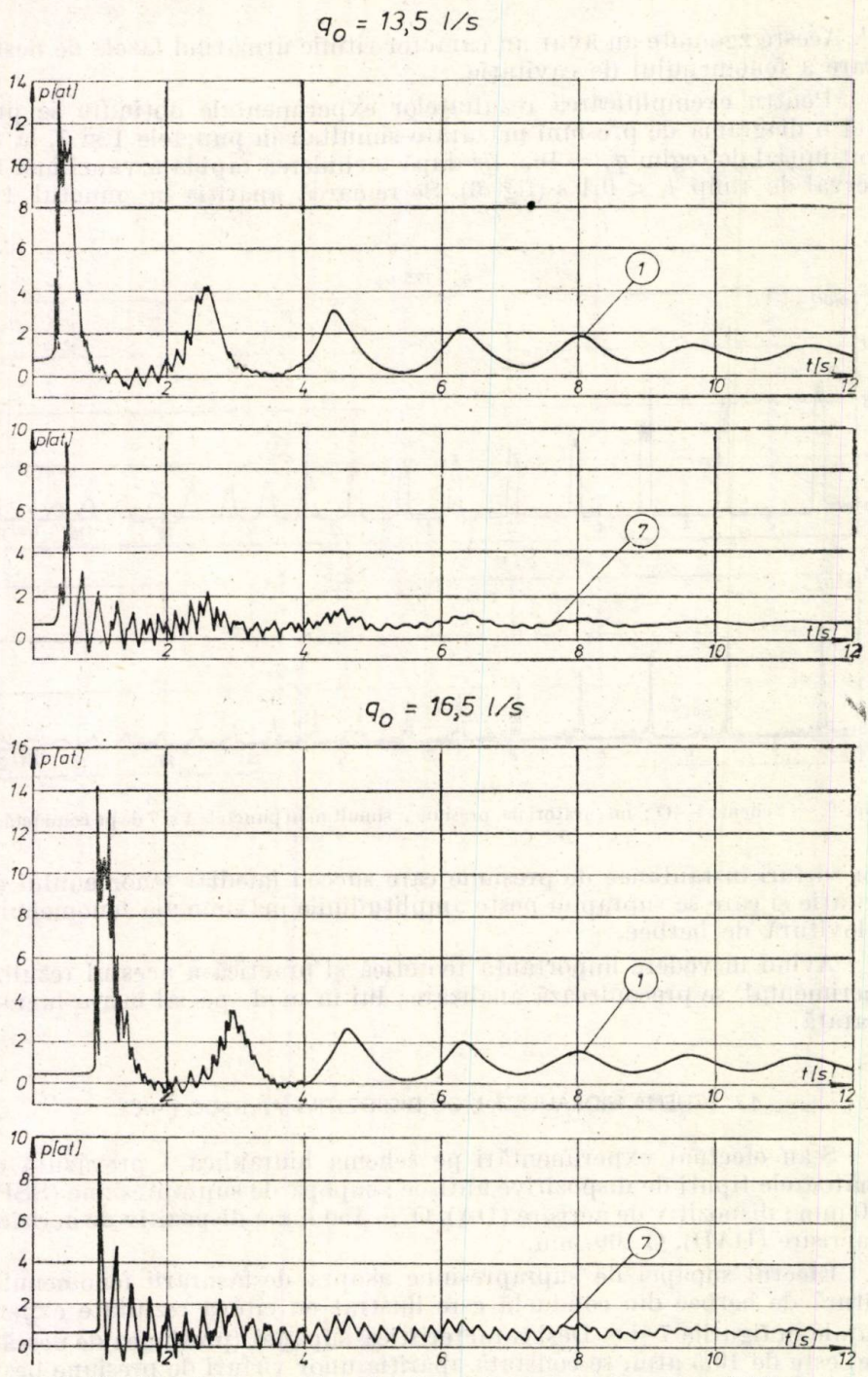


Fig. 7. — Schema I—C prevăzută cu supapă de suprapresiune (SSP): măsurători de presiune, simultan în punctele 1 și 7 de pe conductă, pentru două debite de regim.

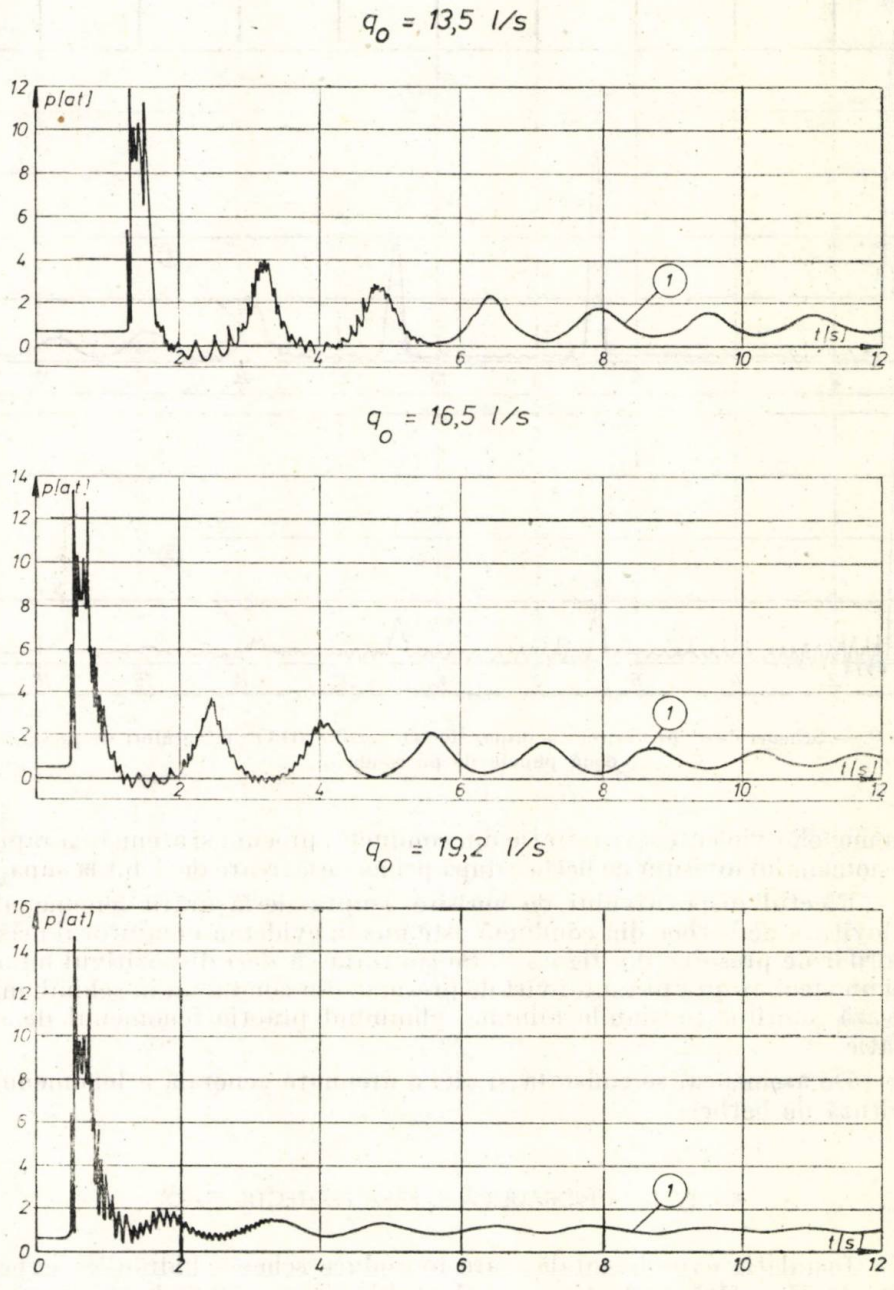


Fig. 8. — Schema I—C prevăzută cu supapă de suprapresiune (SSP): măsurători de presiune într-un punct, pentru mai multe debite de regim.

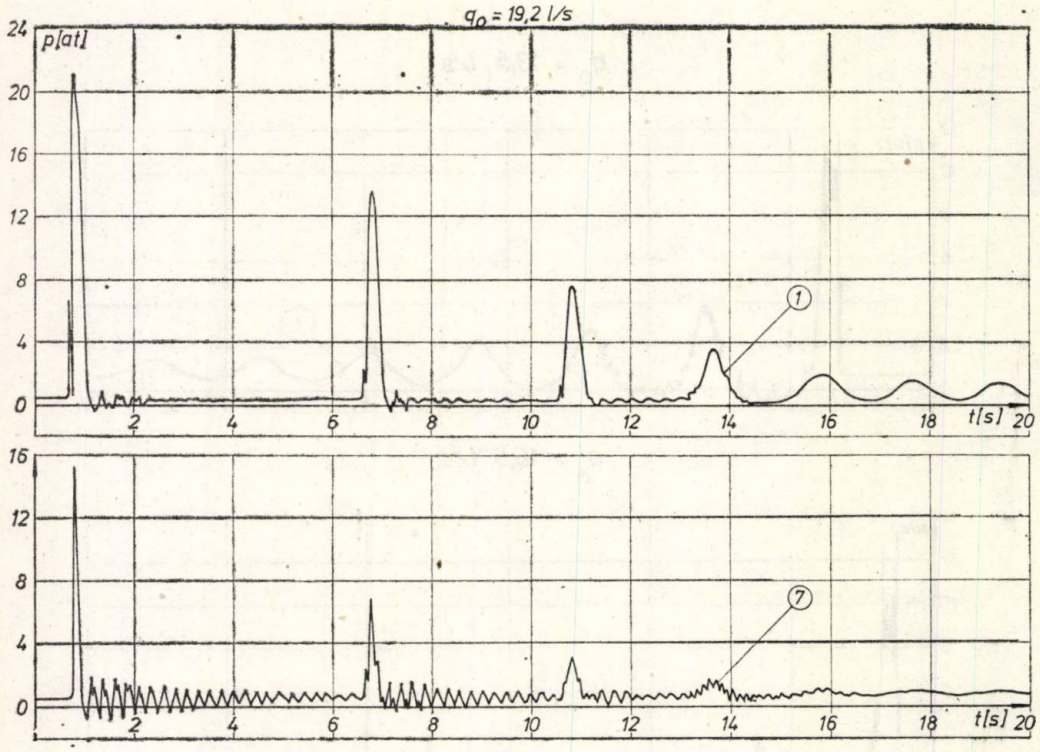


Fig. 9. — Schema I—C prevăzută cu dispozitiv de aerisire (DA): măsurători de presiune în două puncte de pe conductă.

fenomenelor violente de cavitaţie din conductă, precum şi atenuarea rapidă a fenomenului lovitură de berbec după prima descărcare de debit la supapă.

Efectul dispozitivului de aerisire asupra desfăşurării fenomenului de lovitură de berbec din conductă este pus în evidenţă cu ajutorul măsurătorilor de presiune din figura 9. Se constată că deşi dispozitivul nu are nici un efect asupra primului vîrf de presiune din conductă, în schimb micşorează simţitor presiunile minime, eliminînd practic fenomenul de cavitaţie.

De asemenea, se constată şi aici o atenuare generală a fenomenului lovitură de berbec.

4.3. SCHEMA HIDRAULICĂ II, FĂRĂ PROTECŢIE (II—O)

Instalaţia experimentală, care reproduce schema hidraulică experimentală II — fără protecţie, este alcătuită din următoarele părţi principale: pompă, vană cu închidere rapidă, conductă de presiune, bazin de refulare cu nivel constant — prevăzut la partea superioară cu deversor de măsură (fig. 4 şi 5).

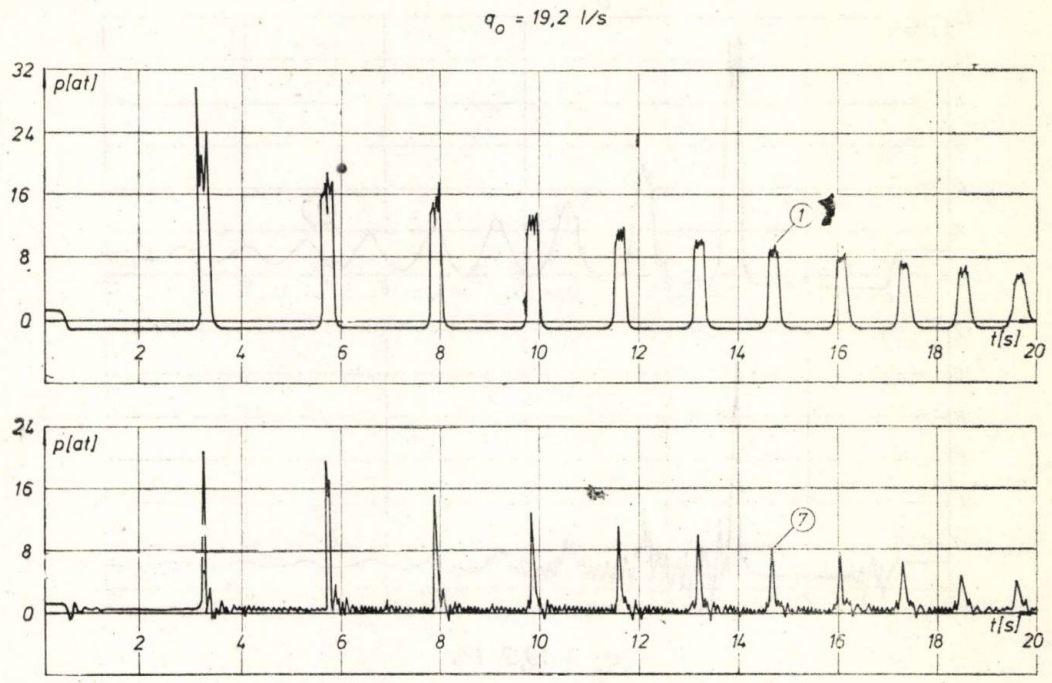


Fig. 10. — Schema II—O : măsurători de presiune, simultan în punctele 1 și 7 de pe conductă.

Pentru ilustrarea fenomenului lovitură de berbec ce apare în conductă în acest caz, se prezintă o diagramă de presiuni măsurate simultan în punctele 1 și 7, la un debit inițial de regim $q_0 = 19{,}2$ l/s, după închiderea rapidă a vanei într-un interval de timp $t_i < 0{,}1$ (fig. 10).

Se constată apariția în conductă a unui fenomen de lovitură de berbec foarte violent, asemănător celui întîlnit în cazul schemei hidraulice I—O, care se manifestă prin vîrfuri mari de presiune și zone de cavitație intensă.

De asemenea, și în acest caz fenomenul este însoțit de vîrfuri instantanee suplimentare de presiune și zgomote ritmice puternice în conductă.

4.4. SCHEMA HIDRAULICĂ II, CU DISPOZITIVE ANTIȘOC (II—C)

S-au efectuat experimentări cu cele trei tipuri de dispozitive antișoc menționate anterior.

În general, efectul acestor dispozitive asupra atenuării fenomenului lovitură de berbec din conductă este asemănător celui întîlnit în cazul schemei hidraulice I și este ilustrat aici cu măsurătorile prezentate în figurile 11 și 12, respectiv pentru supapa de suprapresiune (SSP) și dispozitivul de aerisire (DA).

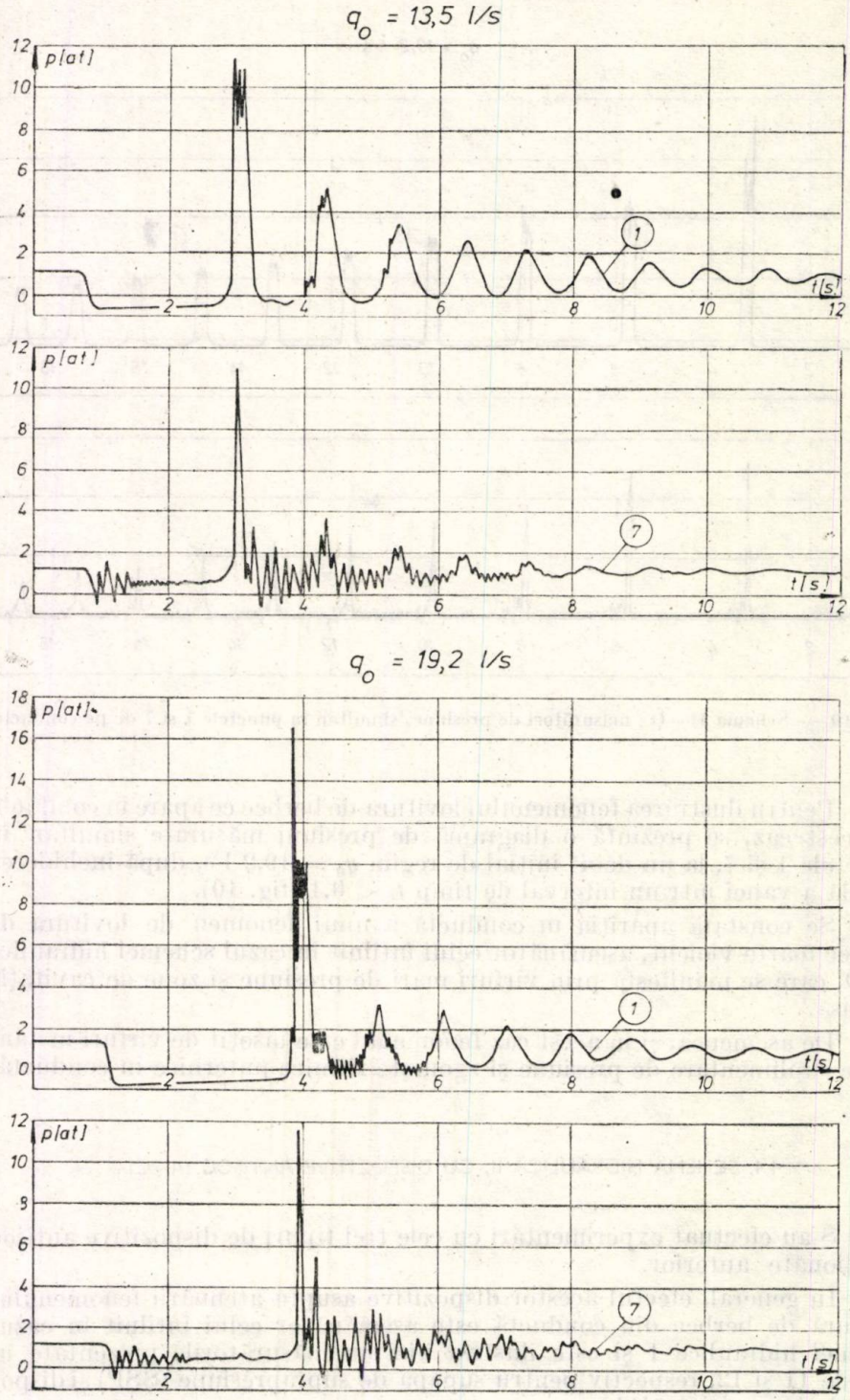


Fig. 11. — Schema II—C prevăzută cu supapă de suprapresiune (SSP): măsurători de presiune, simultan în punctele 1 și 7 de pe conductă, pentru două debite de regim.

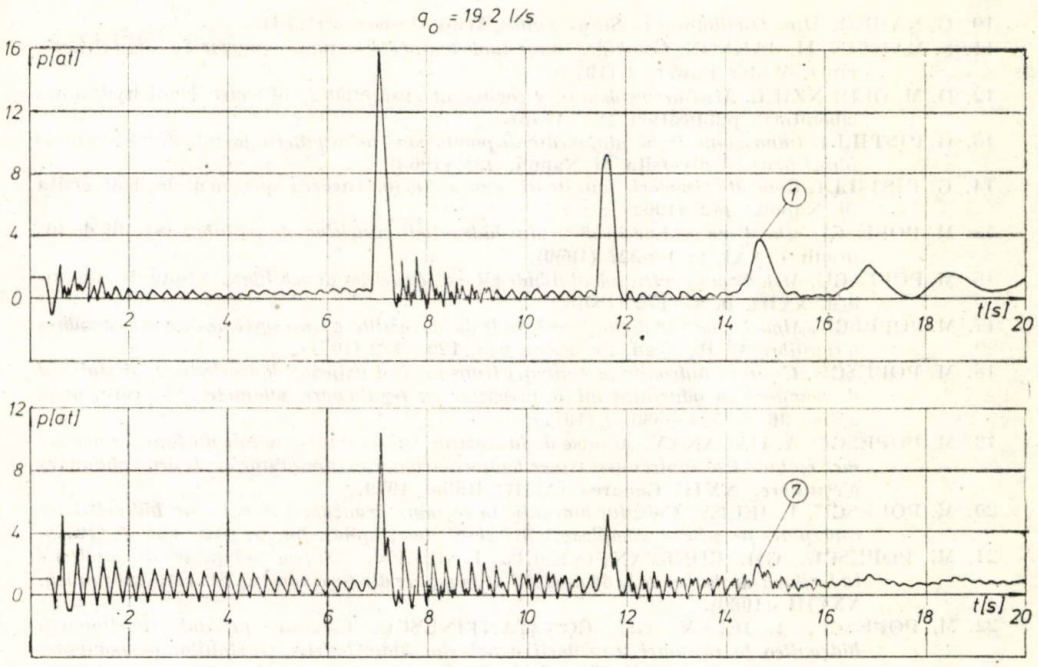


Fig. 12. — Schema II—C prevăzută cu dispozitiv de aerisire (DA): măsurători de presiune în două puncte de pe conductă.

De menționat faptul că studiile experimentale întreprinse de noi în această problemă sînt primele la noi în țară care au căutat să descifreze pe cale experimentală comportarea dispozitivelor antișoc în regim dinamic de funcționare, precum și efectul lor asupra atenuării fenomenului lovitură de berbec din sistemele hidraulice sub presiune.

Primită la redacție la 28 octombrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. R. CHAPPEY, *Calcul des coups de bélier et des phénomènes transitoires par calculateurs électronique*, La Houille Blanche, 2 (1967).
2. D. CIOC, *Contribuții la calculul mișcărilor nepermanente în conducte și la teoria sonicității cu aplicare la pompajul sonic*, St. hidr., **XVIII** (1968).
3. D. CIOC, *Hidraulica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.
4. G. EVANGELISTI, *Teorie generale del colpo d'ariete col metodo della caractteristiche*, L'Energia Elettrica, 2—3 (1965).
5. K. HAINDL, *Air chamber and its modifications as anti-water hammer device*, Praga, 1968.
6. S HÂNCU, M. POPESCU, I. JELEV, GH. CONSTANTINESCU, *Unele aspecte privind calculul loviturii de berbec din instalațiile de pompare*, Hidrotehnica, 2 (1978).
7. Ch. JAEGER, *Théorie générale du coup de bélier*, Dunod, Paris, 1933.
8. Ch. JAEGER, *Hydraulique technique*, Dunod, Paris, 1954.
9. J. KALKWIJK, C. KRANENBURG, C. VREUGDENHIL, A. DE VRIES, *Investigation into cavitation in long horizontal pipelines caused by water-hammer*, Delft hydraulics laboratory, publication 115 (1974).

10. G. NABER, *Mass Oscillations in Surge Tanks*, Water Power, *6* (1964).
11. S. MARTIN, H. JAKSON, *Combined surge tank and waterhammer analysis by digital Computer*, Water Power, *4* (1972).
12. D. M. OLDENZIEL, *Measurements on the cavitation susceptibility of water*, Delft hydraulics laboratory, publication *153* (1975).
13. G. PISTILLI, *Immissione di portata, mediante pompaggio, nella galleria forzata di un impianto idroelettrico*, Universita di Napoli, *159* (1963).
14. G. PISTILLI, *Condotte elevatorie munite di camere d'aria*. Ricerca sperimentale, Universita di Napoli, *162* (1962).
15. M. POPESCU, *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică, **XXI**, p. 1—227 (1969).
16. M. POPESCU, *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică, **XXIII**, p. 1—172 (1970).
17. M. POPESCU, *Modèle mathématique pour l'étude de la stabilité d'une système de deux chambres d'équilibre*, C. R. Acad. Sc. Paris, *273*, 129—132 (1971).
18. M. POPESCU, *Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice și stațiilor de pompare cu aducțiuni mixte prevăzute cu regulatoare automate*, St. cerc. mec. aplic., **36**, p. 521—530, *4* (1977).
19. M. POPESCU, A. HALANAY, *Analise de la stabilité hydraulique générale du fonctionnement aux regimes transitoires des usines hydroélectriques munies d'une ou de deux chambres d'équilibre*, XVIII Congres IAHR, Italia, 1979.
20. M. POPESCU, I. JELEV, *Calculul hidraulic la regimuri tranzitorii al uzinelor hidroelectrice concepute pe scheme complexe*, St. cerc. mec. aplic., **36**, p. 819—836, *6* (1977).
21. M. POPESCU, GH. CONSTANTINESCU, I. JELEV, *Asupra soluțiilor de protecție la lovitura de berbec de la 30 de stații de pompare din țara noastră*, St. cerc. hidraulică, **XXVIII** (1980).
22. M. POPESCU, I. JELEV, GH. CONSTANTINESCU, *Cercetări privind funcționarea hidraulică la regimuri tranzitorii a uzinelor hidroelectrice și stațiilor de pompare*, Sesiune științifică jubiliară, I.C.H., 1977.
23. M. POPESCU, GH. CONSTANTINESCU, P. VLASE, I. JELEV, *Modul de rezistență hidraulică și baterie din elemente fixe modulare*, Invenție R.S.R., Brevet OSIM nr. 71286 (1979).
24. R. PREVOST, G. TISON, *Coups de bélier dans les conduits de refoulement*, Revue C — Tijdschrift, **IV**, *2—3* (1966).
25. H. SATTLER, F. STROHMER, *Computer solutions to waterhammer problems using the method of characteristics*, Water Power, **10** (1974).
26. A. SCHLAG, *Méthode approchée de calcul d'une cloche à air pour une installation de pompage*, Centre Belge d'Etude et de Documentation des Eaux, **228** (1962).
27. A. SCHLAG, *Sur l'apparition de la cavitation provoquée par le coup de bélier*, L'Energia Elettrica, **6** (1961).
28. V. STREETER, B. WYLIE, *Hydraulic transients*, New York, 1967.
29. A. H. DE VRIES, *Research on Cavitation Due to Water Hammer in the Netherlands*, L'Energia Elettrica, **9** (1975).
30. ȘT. ZAREA, M. POPESCU, I. JELEV, *Calculul rezervoarelor de aer din sistemele hidraulice sub presiune, în ipoteza mișcării lent variabile*, St. cerc. mec. aplic., **36**, *4* (1977).
31. ȘT. ZAREA, M. POPESCU, *Asupra semnificației și folosirii unor termeni tehnici privind instalațiile de compensare a debitului și de protecție la lovitura de berbec*, Hidrotehnica, **4** (1973).

INCLUDEREA EFECTULUI FORȚEI TĂIETOARE ÎN MATRICELE ELEMENTULUI DE GRINDĂ DREAPTĂ

de G. ONU

Institutul de proiectări transporturi auto, navale și aeriene

Pentru un element de grindă rectangulară, cu patru grade de libertate, element considerat model-deplasare, se prezintă modul în care se poate determina matricea de rigiditate, matricea maselor echivalente și matricea de rigiditate a eforturilor inițiale, luînd în considerație și contribuția forței tăietoare. Pentru aceasta, se utilizează un procedeu de cuplare a funcției de interpolare a deplasărilor transversale produse atît de momentul încovoietor, cît și de forța tăietoare, cu funcția de interpolare a rotirilor provocate numai de forța tăietoare.

1. INTRODUCERE

Efectul acțiunii forței tăietoare asupra deformațiilor grinzii încovoiate se manifestă prin distorsionarea secțiunilor transversale. O secțiune transversală oarecare, inițial plană și perpendiculară pe axa grinzii, nu rămîne nici plană nici normală la fibra medie deformată, după aplicarea încărcării exterioare (fig. 1). Dacă raportul L/h, dintre lungimea și înăl-

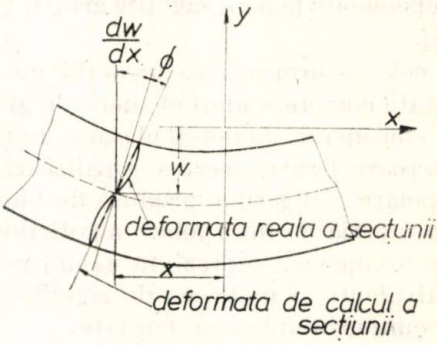


Fig. 1. — Deformația secțiunii transversale a grinzii.

țimea grinzii, este relativ redus, acest efect capătă importanță astfel încît rezultatele obținute în virtutea ipotezelor rezistenței materialelor devin nesatisfăcătoare. În plus, în cazul grinzilor încărcate cu forțe de inerție, la modurile înalte de vibrație, efectul acțiunii forței tăietoare este important chiar atunci cînd raportul L/h este mare. Dacă se ia în considerație și faptul că deformata grinzilor înalte este influențată, de asemenea, de modul în care sînt puse condițiile de capăt, apare necesitatea de a se apela la teoria elasticității, pentru a obține o soluție riguroasă [10]. Rămînînd însă în limitele ipotezelor rezistenței materialelor, care facilitează efectuarea calculelor pe schema redusă la axele barelor, se poate obține o soluție acceptabilă renunțînd la una din restricțiile impuse prin ipoteza lui Bernouli. Pentru aceasta, se admite că orice secțiune transversală inițial plană, rămîne plană după deformarea grinzii, dar se renunță la cerința ca raza de curbură a liniei elastice să fie conținută în planul secțiunii transversale. Unghiul Φ din figura 1, care marchează poziția rotită a secțiunii

transversale față de direcția normalei la linia elastică, evidențiază efectul forței tăietoare atunci cînd se ia în considerație ipoteza modificată.

Se cunosc mai multe căi prin care se poate obține matricea de rigiditate a unui element de grindă, cu patru grade de libertate, luînd în considerație efectul forței tăietoare, pe baza ipotezei modificate de mai sus. Astfel în [13] coeficienții matricei de rigiditate se obțin prin integrarea ecuației diferențiale care guvernează deformațiile de încovoiere ale grinzii dublu încastrate. Aceeași matrice de rigiditate poate fi obținută de asemenea din ecuațiile diferențiale ale unui element de grindă infinit, mic, aflat în echilibru static [5]. Altă posibilitate de a obține soluția corectă constă în inversarea matricei de flexibilitate care conține și contribuția forței tăietoare. Aceeași matrice de rigiditate poate fi obținută de asemenea pe baza modelului de element finit hibrid [14].

Pe de altă parte, după cum se arată și în [4], nu se cunoaște o metodă de a obține soluția corectă în cazul în care elementul de grindă este privit ca model-deplasare. Bibliografia disponibilă furnizează numai soluții aproximative pentru această situație, obținute fie prin însumarea efectelor separate ale momentului încovoietor și forței tăietoare, fie, ca în cazul modelului Mindlin de placă plană, prin introducerea unor cîmpuri-deplasare independente pentru săgețile grinzii și rotirile secțiunilor transversale [7], [15].

În cele ce urmează se prezintă un mod de determinare a matricei de rigiditate corecte a unui element de grindă cu patru grade de libertate, element considerat model-deplasare, luînd în considerație și contribuția forței tăietoare. Pentru acestea se utilizează un procedeu de cuplare a funcției de interpolare a săgeților produse de momentul încovoietor și forța tăietoare, cu funcția de interpolare a rotirilor provocate numai de forța tăietoare. De asemenea, se prezintă modul în care se determină matricea maselor echivalente și matricea de rigiditate a eforturilor inițiale, utilizînd aceleași cîmpuri-deplasare cuplate.

În [11] se evidențiază faptul că prin cuplarea cîmpurilor-deplasare se obține, pentru elementul de bară curbă, o matrice de rigiditate care dă rezultate superioare celor obținute în cazul cîmpurilor decuplate. În continuare se arată că în cazul elementelor rectangulare, prin acest procedeu, se obțin rezultate „exacte".

2. POLINOAMELE DE INTERPOLARE [12]

Comportarea unui element de grindă cu secțiune constantă, încărcat numai la noduri (fig. 2), poate fi descrisă cu ajutorul a patru grade de libertate. Corespunzător acestora, elementul are două moduri caracteristice de deformare (fig. 3). Polinoamele folosite pentru reprezentarea analitică a modurilor de deformare trebuie să fie în concordanță cu variația solicitărilor care rezultă din încărcarea elementului la noduri. Aceasta presupune posibilitatea obținerii unei variații liniare a momentului încovoietor și o forță tăietoare constantă, pentru componenta antisimetrică a încărcării

și de asemenea, un moment constant și o forță tăietoare nulă pentru componenta simetrică. Următoarele două polinoame satisfac aceste deziderate :

$$W1 = \frac{x}{4} - \frac{x^3}{4a^2}, \tag{1a}$$

$$W2 = -\frac{a}{4} + \frac{x^2}{4a}. \tag{1b}$$

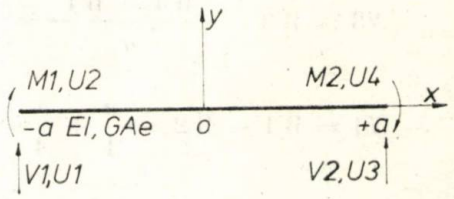


Fig. 2. — Forțele și deplasările nodale ale elementului de grindă.

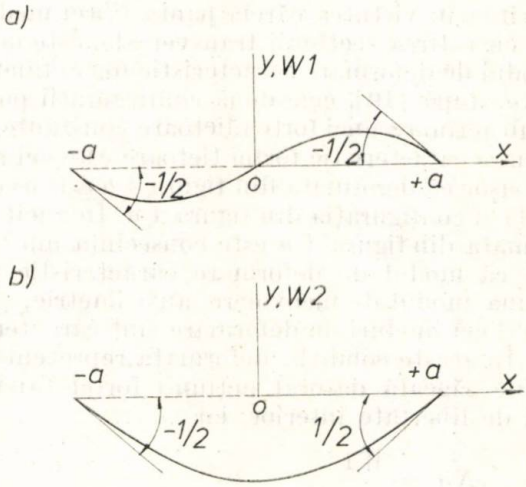


Fig. 3. — Confirgurațiile deformatelor elementului de grindă sub efectul rotirilor nodale : *a* — modul de deformare antisimetrică ; *b* — modul de deformare simetric.

Deplasările de corp rigid ale elementului, o translație normală la axa grinzii și o rotație, pot fi convenabil reprezentate prin :

$$W3 = \frac{1}{2} \text{ și} \tag{2a}$$

$$W4 = -\frac{x}{2}. \tag{2b}$$

Dacă ipoteza lui Bernoulli este acceptată în întregime, cele două moduri caracteristice de deformare elastică, împreună cu deplasările de

corp rigid, sînt suficiente pentru construirea funcţiilor de formă ale cîmpului deplasărilor transversale ale elementului de grindă :

$$N1 = W3 + \frac{W4 - W1}{a} = \frac{1}{2} - \frac{3x}{4a} + \frac{x^3}{4a^3},$$

$$N2 = W1 + W2 = -\frac{a}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4a} - \frac{x^3}{4a^2}, \tag{3}$$

$$N3 = W3 - \frac{W4 - W1}{a} = \frac{1}{2} + \frac{3x}{4a} - \frac{x^3}{4a^3},$$

$$N4 = W1 - W2 = \frac{a}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4a} - \frac{x^3}{4a^2}.$$

După cum se vede, modul de încovoiere antisimetric apare în toate funcţiile de formă.

Dacă se renunţă la cerinţa în virtutea căreia panta fibrei medii deformate trebuie să fie egală cu rotirea secţiunii transversale, este necesar să se ia în consideraţie şi modul de deformare caracteristic forţei tăietoare. În figura 4 sînt schematizate, după [10], cele două confirgurații posibile ale deformatei unei grinzi, sub acţiunea unei forţe tăietoare constante. Dintre acestea, modul de deformare caracteristic forţei tietoare este cel reprezentat în figura 4 *a* ; se vede uşor că deformata din figura 4 *b* este o combinaţie dintre o deplasare rigidă şi configuraţia din figura 4 *a*. Întrucît forţa tăietoare care produce deformata din figura 4 *a* este consecinţa unei încovoieri antisimetrice, rezultă că modul de deformare caracteristic forţei tăietoare însoţeşte întotdeauna modul de încovoiere antisimetric, şi este firesc să se admită că aceste două moduri de deformare sînt caracterizate de acelaş parametru (fig. 5). În aceste condiţii, deformata reprezentată în figura 5*a* constituie sporul de săgeată datorat acţiunii forţei tăietoare, $U5$ capătă caracter de grad de libertate interior, iar

$$N5 = \frac{W1}{a} \tag{4}$$

constituie a cincea funcţie de formă din cîmpul deplasărilor transversale.

Renunţînd la ipoteza lui Bernoulli, este permis ca în expresia energiei de deformaţie U să se introducă un termen separat, reprezentînd aportul forţei tăietoare [7], astfel că

$$U = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} EI\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} GA_e\gamma^2 \,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

În acest fel, în afară de cîmpul deplasărilor transversale

$$w = N_w z, \tag{6a}$$

un al doilea cîmp este luat în considerație pentru a reprezenta rotirea secțiunlor transversale produse numai sub acțiunea forței tăietoare :

$$s = N_S z. \tag{6b}$$

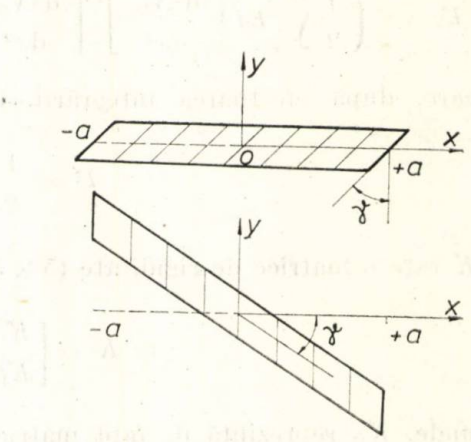


Fig. 4. — Configurațiile deformatelor elementului de grindă sub acțiunea forței tăietoare : a — modul de deformare tip grindă simplu rezemată ; b — modul de deformare tip consolă.

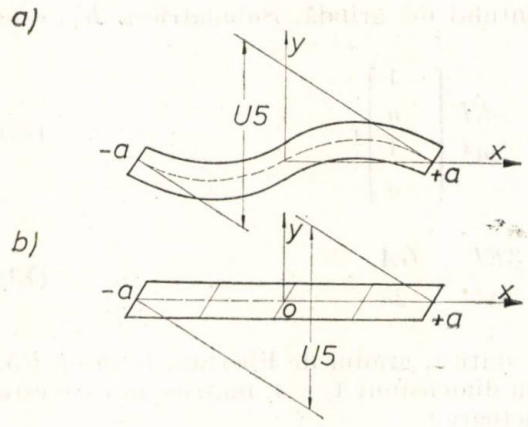


Fig. 5 — Gradul de libertate suplimentar.

În relațiile (6) au fost folosite următoarele notații :

$$N_W = [N1,\ N2,\ N3,\ N4,\ N5], \tag{7a}$$

$$N_S = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ N6], \tag{7b}$$

$$z^T = [U1,\ U2,\ U3,\ U4,\ U5]. \tag{8}$$

După cum s-a admis anterior, deformația specifică unghiulară γ este constantă pe secțiune, astfel încît $s = \gamma = T/(GA_e)$. Deoarece forța tăietoare T nu variază în lungul grinzii, rezultă că $N6$ este o constantă a cărei valoare se poate determina dintr-o condiție de reazem : pentru $x = a$, $w' + s + U4 = 0$. Astfel,

$$N6 = \frac{1}{2a}. \tag{9}$$

3. MATRICEA DE RIGIDITATE

Înlocuind pe w și s din relațiile (6) în relația (5) se obține egalitatea

$$U = z^T \left(\frac{1}{2} \int_{-a}^{a} EI \left[\frac{\mathrm{d}^2 N_W}{\mathrm{d}x^2} \right]^T \left[\frac{\mathrm{d}^2 N_W}{\mathrm{d}x^2} \right] \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} GA_e [N_e]^T [N_S] \, \mathrm{d}x \right) z, \tag{5 a}$$

care, după efectuarea integrării, devine:

$$U = \frac{1}{2} z^T \bar{K} z, \tag{10}$$

$\bar{K}$ este o matrice de rigiditate (5×5), care poate fi partiționată astfel:

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

unde, K_{11} reprezintă de fapt matricea de rigiditate convențională (fără aportul forței tăietoare) a elementului de grindă. Submatricea K_{12} este

$$K_{12} = \frac{3EI}{2a^3} \begin{bmatrix} -1 \\ a \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \tag{12}$$

și

$$K_{22} = \frac{3EI}{2a^3} + \frac{GA_e}{2a}. \tag{13}$$

Eliminînd, prin condensare statică, gradul de libertate interior $U5$, se obține matricea de rigiditate cu dimensiuni 4×4, matrice în care este inclusă și contribuția forței tăietoare:

$$K = R^T \bar{K} R, \tag{14}$$

în care R se calculează cu relația (15).

$$R^T = [I_4, \; -K_{12} K_{22}^{-1}]. \tag{15}$$

I_4 este matricea unitate cu dimensiuni 4×4.

Forma extinsă a matricei K este dată de relația (14 a).

$$K = \frac{EI}{L^3(1+t)} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & (4+t)L^2 & 6L & (2-t)L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & (2-t)L^2 & 6L & (4+t)L^2 \end{bmatrix}. \tag{14 a}$$

În relația (14 a) au fost folosite notațiile :

$L = 2a$, $t = 12EI/(GA_eL^2)$ și $A_e = \mu A$, în care μ este coeficientul de formă al secțiunii transversale A.

Matricea de rigiditate din relația (14 a) este identică cu forma corectă a matricei de rigiditate obținută în [13], [14] și [5], dată de asemenea în [4], [9] și [3].

4. MATRICEA MASELOR ECHIVALENTE

Energia cinetică a unui element de grindă cu secțiune constantă care vibrează liber la frecvența circulară ω, incluzînd și efectele forței tăietoare și inerției de rotație, se poate scrie astfel [5] :

$$T = \frac{\omega^2}{2} \rho A \int_{-a}^{a} \left[w^2 + r^2 \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + s \right)^2 \right] \mathrm{d}x, \tag{16}$$

în care r este raza de girație a secțiunii transversale, iar ρ reprezintă greutatea specifică a materialului din grindă. Înlocuind pe w și s din relațiile (6), se obține

$$T = \frac{\omega^2}{2} \rho A z^T \left(\int_{-a}^{a} [N_W]^T [N_W] \, \mathrm{d}x + r^2 \int_{-a}^{a} \left[\frac{\mathrm{d}N_W}{\mathrm{d}x} + N_S \right]^T \left[\frac{\mathrm{d}N_W}{\mathrm{d}x} + N_S \right] \mathrm{d}x \right) z \tag{16a}$$

care, după efectuarea integrării, devine

$$T = \frac{\omega^2}{2} z^T \bar{M} z. \tag{17}$$

$\bar{M}$, matricea maselor echivalente (5×5), poate fi scrisă astfel :

$$\bar{M} = \rho A \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} + \rho A r^2 \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{12}^T & \tilde{M}_{22} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Primul termen din (18) reprezintă aportul inerției de translație, iar al doilea, aportul inerției de rotație.

$$\bar{M}_c = \rho A (M_{11} + r^2 \tilde{M}_{11}) \tag{19}$$

constituie matricea convențională a maselor echivalente (fără aportul forței tăietoare) [1, 9, 8]. Celelalte submatrice din (18) sînt alcătuite astfel :

$$M_{12} = \frac{a}{210} \begin{bmatrix} -9 \\ 2a \\ 9 \\ 2a \end{bmatrix}, \qquad \tilde{M}_{12} = \frac{1}{10\,a} \begin{bmatrix} -6 \\ a \\ 6 \\ a \end{bmatrix},$$

$$M_{22} = \frac{a}{105}, \qquad \tilde{M}_{22} = \frac{3}{5a}. \tag{20}$$

Eliminînd $U5$, se obţine matricea maselor echivalente (4×4), în care este inclusă atît contribuţia forţei tăietoare, cît şi efectul inerţiei de rotaţie. Prin urmare,

$$M = R^T \bar{M} R, \tag{21}$$

în care R se calculează cu relaţia (15).

Forma extinsă a matricei maselor echivalente, identică cu cea prezentată în [2] şi [13], este următoarea:

$$M = \frac{\rho AL}{(1+t)^2}\left(\begin{bmatrix} M1 & -M2 & M3 & M4 \\ -M2 & M5 & -M4 & -M6 \\ M3 & -M4 & M1 & M2 \\ M4 & -M6 & M2 & M5 \end{bmatrix} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \begin{bmatrix} M7 & M8 & -M7 & M8 \\ M8 & M9 & -M8 & M10 \\ -M7 & -M8 & M7 & -M8 \\ M8 & M10 & -M8 & M9 \end{bmatrix}\right). \tag{21a}$$

În relaţia (21a) au fost folosite următoarele notaţii:

$$M1 = \frac{13}{35} + \frac{7}{10}t + \frac{1}{3}t^2,$$

$$M2 = \left(\frac{11}{210} + \frac{11}{120}t + \frac{1}{24}t^2\right)L,$$

$$M3 = \frac{9}{70} + \frac{3}{10}t + \frac{1}{6}t^2,$$

$$M4 = \left(\frac{13}{420} + \frac{3}{40}t + \frac{1}{24}t^2\right)L,$$

$$M5 = \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{60}t + \frac{1}{120}t^2\right)L^2$$

$$M6 = \left(\frac{1}{140} + \frac{1}{60}t + \frac{1}{120}t^2\right)L^2,$$

$$M7 = \frac{6}{5},$$

$$M8 = \left(-\frac{1}{10}+\frac{t}{2}\right)L,$$

$$M9 = \left(\frac{2}{15}+\frac{t}{6}+\frac{t^2}{3}\right)L^2,$$

$$M10 = \left(-\frac{1}{30}-\frac{t}{6}+\frac{t^2}{6}\right)L^2.$$

5. MATRICEA DE RIGIDITATE A EFORTURILOR INIȚIALE

Componenta neliniară a energiei de deformație, consecință a lucrului mecanic efectuat de eforturile unitare normale a căror rezultantă pe secțiune este forța P, parcurgînd deformațiile de încovoiere ale elementului de grindă, se calculează cu relația:

$$U_n = \int_{-a}^{a} \frac{P}{2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{22}$$

Înlocuind w din (6) și admițînd că forța P este constantă pe toată lungimea elementului de grindă, se obține:

$$U_n = z^T\left(\frac{P}{2}\int_{-a}^{a}\left[\frac{\mathrm{d}N_W}{\mathrm{d}x}\right]^T\left[\frac{\mathrm{d}N_W}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x\right)z, \tag{22 a}$$

care, după efectuarea integrării, devine:

$$U_n = \frac{P}{2}\, z^T\, \overline{K}_g\, z. \tag{23}$$

$\overline{K}_g$, matricea de rigiditate a eforturilor inițiale (5×5), poate fi partiționată astfel:

$$\overline{K}_g = \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{11} & \widetilde{K}_{12} \\ \widetilde{K}_{12}^T & \widetilde{K}_{22} \end{bmatrix}, \tag{24}$$

în care $\widetilde{K}_{11}$ reprezintă matricea de rigiditate a eforturilor inițiale în forma convențională (fără contribuția forței tăietoare) [6, 13, 4, 9, 8,3]. Submatricele $\widetilde{K}_{12}$ și $\widetilde{K}_{22}$ se calculează cu relațiile (25).

$$\widetilde{K}_{12} = \frac{P}{10a}\begin{bmatrix} -1 \\ a \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{K}_{22} = \frac{P}{10a}. \tag{25}$$

Eliminînd gradul de libertate interior, se obţine matricea de rigiditate a eforturilor iniţiale, cu dimensiuni 4×4, matrice în care este inclus şi aportul forţei tăietoare:

$$K_g = R^T \overline{K}_g R. \tag{26}$$

Matricea de transformare R este dată de relaţia (15).

În formă extinsă, matricea K_g se prezintă astfel:

$$K_g = \frac{P}{60L(1+t)^2} \begin{bmatrix} G1 & -G2 & -G1 & -G2 \\ -G2 & G3 & G2 & -G4 \\ -G1 & G2 & G1 & G2 \\ -G2 & -G4 & G2 & G3 \end{bmatrix}. \tag{26 a}$$

În relaţia (26a) au fost utilizate următoarele notaţii:

$$G1 = 12(6 + 10t + 5t^2),$$

$$G2 = 6L,$$

$$G3 = (8 + 10t + 5t^2)L^2,$$

$$G4 = (2 + 10t + 5t^2)L^2.$$

Matricea obţinută (26a) este identică cu matricea deplasărilor finite* din [2].

6. CONCLUZII

În lucrare se prezintă modul în care pot fi obţinute matricea de rigiditate, matricea maselor echivalente şi matricea de rigiditate a eforturilor iniţiale pentru un element de grindă dreaptă, cu patru grade de libertate, element considerat model-deplasare. Pentru a introduce efectul forţei tăietoare, se utilizează un procedeu de cuplare a funcţiei de interpolare a săgeţilor produse de momentul încovoietor şi forţa tăietoare, cu funcţia de interpolare a rotirilor provocate numai de forţa tăietoare.

Utilizarea procedeului poate fi extinsă şi la alte elemente, în măsura în care pot fi evidenţiate modurile de deformare caracteristice forţei tăietoare şi încovoierii aferente.

NOTAŢII

A, A_e — suprafaţa şi suprafaţa efectivă a secţiunii transversale a grinzii,

a — jumătate din lungimea elementului de grindă,

EI — rigiditatea la încovoiere a elementului de grindă,

*) În afara titulaturii de matrice a deplasărilor finite, matricea de rigiditate a eforturilor iniţiale mai este întîlnită în literatură şi sub numele de matrice de rigiditate geometrică.

GA_e — rigiditatea la tăiere a elementului de grindă,
K, $\bar{K}$, K_g — matrice de rigiditate,
L — lungimea elementului de grindă,
M, $\bar{M}$, M_c — matrice ale maselor,
N_S, N_W — vectorii funcțiilor de formă,
R — matrice de transformare,
s — cîmpul deplasărilor unghiulare provocate de forța tăietoare,
t — parametru adimensional,
T — energia cinetică,
U, U_n — energia de deformație,
u — cîmpul deplasărilor transversale,
z — vectorul deplasărilor,
γ — deformația unghiulară,
μ — coeficientul de formă al secțiunii transversale,
ω — frecvența circulară,
ρ — greutatea specifică a materialului.

Primită la redacție la 30 octombrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. J. S. ARCHER, *Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems*, ASCE Jrn., **89**, *ST4*, p. 161—178 (1963).
2. J. S. ARCHER, *Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques*, AIAA Jrn., **3**, *10*, p. 1910—1918 (1965).
3. V. BĂNUȚ, *Calculul neliniar al structurilor*, Edit. tehnică, București, 1981.
4. R. D. COOK, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1974.
5. R. DAVIS et al., *A Timoshenko Beam Element*, Jrn. Sound & Vibration, **22**, *4*, p. 475—487 (1972).
6. R. H. GALLAGHER, J. PADLOG, *Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis*, AIAA Jrn., **1**, *6*, p. 1437 (1963).
7. R. H. GALLAGHER, *Finite Element Analysis — Fundamentals*, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.
8. A. GHEORGHIU, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, București, 1975.
9. CH. MASSONET și colab., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. tehnică, București, 1974.
10. P. MAZILU, *Statica Construcțiilor*, vol. 2, Edit. tehnică, București, 1959.
11. H. R. MECK, *An Accurate Polynomial Displacement Function for Finite Ring Elements*, Computers & Structures, *11*, p. 265—269 (1980).
12. G. ONU, *Shear Effect in Beam Stiffness Matrix*, Journal of the Structural Division, ASCE, 108 (1982), sub tipar.
13. J. S. PRZEMIENIESKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, Mc. Graw-Hill Book Co., New York, 1968.
14. R. T. SEVERN, *Inclusion of Shear Deflection in the Stiffness Matrix for a Beam Element*, Jrn. Strain Analysis, **5**, *4*, p. 239—241 (1970).
15. P. TONG, *New Displacement Hybrid Finite Element Models for Solid Continua*, Int. Jrn. Num. Meth. Engng., **2**, *1*, p. 73—83 (1970).
16. S. P. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, 3-ed., Van Nostrand, New York, 1955.

INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE ASUPRA DEFORMATELOR STATICE ALE BARELOR DREPTE

de ȘERBAN VASILESCU
I.P.G. Ploiești

În lucrare este analizată influența forței tăietoare asupra deformatelor statice ale barelor drepte.
Se stabilește astfel ecuația fibrei medii deformate pentru o grindă încovoiată, se generalizează ecuația celor trei momente (Clapeyron) și se obține ecuația fibrei medii deformate pentru o bară supusă simultan la încovoiere și compresiune centrică.
Pentru o analiză cît mai judicioasă a influențelor sarcinilor concentrate se apelează la teoria distribuțiilor.
Rezultatele obținute sînt analizate pe un exemplu de calcul.

I. STABILIREA ECUAȚIEI GENERALE A FIBREI MEDII DEFORMATE ȚINÎND CONT DE INFLUENȚA FORȚEI TĂIETOARE

Există cazuri în tehnică cînd deformațiile produse de forțele tăietoare nu mai pot fi neglijate.

Astfel, dacă pentru un arbore raportul d/l (diametrul secțiunii transversale pe lungime) din anumite considerente tehnologice sau constructive crește peste o anumită valoare, influența forței tăietoare asupra deformatei statice a arborelui respectiv necesită a fi luată în considerare.

I.1. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Prin încovoierea unei bare axa acesteia se curbează și devine o curbă continuă, denumită fibra medie deformată a barei (fig. 1).

Notînd cu $v^M(x)$ săgeata barei în secțiunea de abscisă x, ecuația diferențială a fibrei medii deformate în cazul încovoierii în planul xOy (cu axa Oy axă principală de inerție a suprafeței transversale) este [3]:

$$\frac{d^2v^M}{dx^2} = -\frac{M}{EI}, \tag{I.1.1}$$

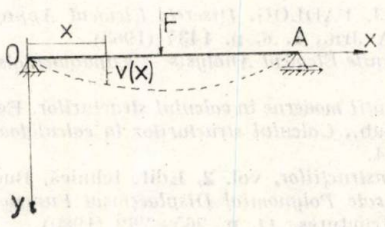


Fig. 1

unde M este momentul încovoietor din secțiunea de abscisă x, dirijat după axa Oz, E modulul de elasticitate al materialului barei, iar I este momentul de inerție în raport cu aceeași axă Oz și presupus pentru simplitate constant pe întreg parcursul barei.

Ecuaţia (I. 1.1.) ţine cont numai de deformarea produsă de momentele încovoietoare asupra fibrei medii.

Pentru a stabili influenţa forţei tăietoare plecăm de la relaţia cunoscută [3]:

$$\frac{dv^T}{dx} = \frac{T}{GA'}, \tag{I.1.2}$$

unde v^T este săgeata barei din secţiunea de abscisă x, produsă numai de forţa tăietoare T din secţiunea respectivă, G este modul de rezistenţă al materialului barei, iar A' este o arie ipotetică a secţiunii barei, arie pe care eforturile xy ar fi uniform distribuite $\left(A' = \frac{5}{6} A \text{ la dreptunghi, } A' = \frac{9}{10} A \text{ la cerc}\right)$.

Ţinînd cont că săgeata totală $v(x)$ din secţiunea de abscisă x este

$$v(x) = v^M(x) + v^T(x) \tag{I.1.3}$$

şi derivînd această relaţie de două ori în raport cu x obţinem

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{Ei} - \frac{P_n}{GA'}, \tag{I.1.4}$$

unde $P_n = -\frac{dT}{dx}$ reprezintă sarcina continuă uniform distribuită ce acţionează perpendicular pe bară.

Ecuaţia (I.1.4) reprezintă ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate cînd se ţine cont şi de influenţa forţei tăietoare.

I.2. STABILIREA ECUAŢIEI FIBREI MEDII DEFORMATE

Pentru o tratare cît mai judicioasă şi mai unitară a influenţelor sarcinilor concentrate, cît şi pentru eliminarea dificultăţilor de calcul ce apar în studiul clasic, vom apela în continuare la teoria distribuţiilor.

Vom folosi astfel funcţia treptată unitară a lui Heaviside definită prin:

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ 1, & x > a. \end{cases} \tag{I.2.1}$$

Discontinuitatea funcţiei lui Heaviside poate să apară în origine ($a = 0$) sau în secţiunea de abscisă $x = a$.

Vom apela de asemenea şi la funcţia impuls unitar a lui Dirac ($\delta(x)$) definită prin relaţia

$$\delta(x) = \lim_{\Delta x \to 0+} \left[\frac{H(x) - H(x - \Delta x)}{\Delta x} \right]. \tag{I.2.2}$$

Între cele două funcţii există relaţia cunoscută [5]:

$$\delta(x - a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x - a), \tag{I.2.3}$$

unde operatorul $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ semnifică derivata în sensul teoriei distribuţiilor.

Acţiunea unei forţe concentrate presupusă pentru început perpendiculară pe grindă, echivalează cu acţiunea unei sarcini continue a cărei valoare unitară este [5]:

$$q^F = F\,\delta(x - a), \tag{I.2.4.}$$

$x = a$, caracterizînd punctul de aplicaţie al forţei F faţă de originea considerată.

Similar, acţiunea unui moment concentrat, într-un punct de pe grinda dreaptă, caracterizat de abscisa $x = b$, este echivalentă cu acţiunea unei sarcini continue a cărei valoare unitară este [5]:

$$q^M = - M\,\delta'(x - b). \tag{I.2.5}$$

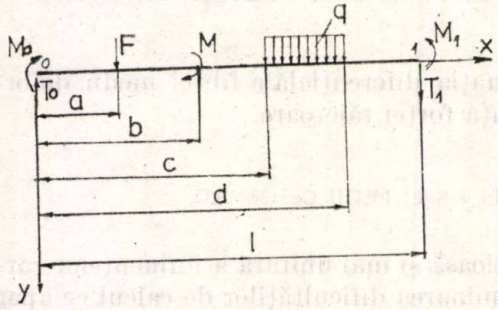


Fig. 2

Fie acum un tronson dintr-o bară dreaptă supus simultan acţiunilor discutate mai sus, ca în figura 2.

Valoarea unitară a sarcinii continue pentru acest caz general este egală cu suprapunerea efectelor repartiţiilor unitare anterior discutate:

$$q = q^q + q^M + q^T = q[H(x - c) - H(x - d)] - M\delta'(x - b) + F\delta(x - a) - M_0\delta'(x) - T_0\delta(x) + M_1\delta'(x - l) + T_1 \cdot \delta(x - l).$$

Ecuaţia (I.2.6) înglobează evident şi condiţiile iniţiale.

Momentul încovoietor în secţiunea de abscisă x este dat direct de relaţia:

$$M_i(x) = - \int \mathrm{d}x \int q(x)\,\mathrm{d}x, \tag{I.2.7}$$

înlocuind pe (I.2.6) în (I.2.7) și integrînd în sensul teoriei distribuțiilor obținem :

$$M_i(x) = -q\frac{(x-c)^2}{2}H(x-c) + q\frac{(x-d)^2}{2}H(x-d) + M\cdot H(x-b) -$$

$$- F(x-a)\,H(x-a) + M_0H(x) + T_0x\cdot H(x) - M_1H(x-l) +$$

$$+ T_1(x-l)\,H(x-l). \qquad \text{(I.2.8)}$$

Deoarece pe tronsonul $(0-1)$, x este totdeauna mai mic decît 1, rezultă că argumentul funcției lui Heaviside este permanent negativ. Prin urmare $H(x-l)=0$ și deci ultimii doi termeni din ecuația (I.2.8) dispar fiind egali cu 0.

Introducînd expresia momentului încovoietor $M_i(x)$ dată de (I.2.8) în (I.1.4), obținem :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\left[-q\frac{(x-c)^2}{2}H(x-c) + q\frac{(x-d)^2}{2}H(x-d) + \right.$$

$$\left. + M\cdot H(x-b) - F(x-a)\,H(x-a) + M_0H(x) + T_0xH(x)\right] -$$

$$- \frac{1}{GA'}\left[q\cdot H(x-c) - qH(x-d) - M\cdot\delta'(x-b) + F\delta(x-a) - \right.$$

$$\left. - M_0\cdot\delta'(x) - T_0\cdot\delta(x) + M_1\cdot\delta'(x-l) + T_1\cdot\delta(x-l)\right]. \qquad \text{(I.2.9)}$$

În ecuația (I.2.9) operatorul $\frac{d^2}{dx^2}$ reprezintă derivata în sensul teoriei distribuțiilor.

Pentru integrarea ecuației diferențiale (I.2.9) trebuie să transformăm derivata în sensul teoriei distribuțiilor în derivată în sensul obișnuit.

Relația care există între cele două derivate este [1]:

$$\tilde{f}'(x) = f'(x) + S_0\cdot\delta(x-x_0), \qquad \text{(I.2.10)}$$

unde

— $f(x)$ este o funcție de clasă $c^n(n \geqslant 1)$ peste tot cu excepția punctului x_0, unde $f(x)$ are o discontinuitate de speța întîi;

— $\tilde{f}'(x)$ este derivata funcției $f(x)$ în raport cu x, în sensul teoriei distribuțiilor;

— $f'(x)$ este derivata funcției în sens obișnuit acolo unde această derivată există.

— S_0 este saltul funcției $f(x)$ în punctul x_0 și este dat de relația [1]:

$$S_0 = f(x_0+0) - f(x_0-0), \qquad \text{(I.2.11)}$$

$f(x_0 + 0)$ fiind valoarea funcţiei $f(x)$ la dreapta lui x_0, iar $f(x_0 - 0)$ valoarea funcţiei $f(x)$ la stînga lui x_0.

Dacă funcţia $f(x)$ este de clasă c^n aproape peste tot, cu excepţia punctelor x_i, $i = \overline{1, k}$ (mulţimea punctelor x_i este de măsură zero) în punctele x_i funcţia avînd discontinuităţi de speţa întîi, atunci $\tilde{f}'(x)$ devine :

$$\tilde{f}'(x) = f'(x) + \sum_{i=1}^{k} S_i \cdot \delta(x - x_i), \tag{I.2.12}$$

unde S_i sînt salturile funcţiei $f(x)$ respectiv în punctele x_i, date de relaţiile :

$$S_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0). \tag{I.2.13}$$

Evident, dacă funcţia $f(x)$ este de clasă c^n peste tot domeniul de definiţie (nu are puncte de discontinuitate), relaţia (I.2.12) devine :

$$\tilde{f}(x) = f'(x) \tag{I.2.14}$$

dacă derivata în sensul teoriei distribuţiilor a funcţiei $f(x)$ este egală cu derivata în sens obişnuit a funcţiei $f(x)$.

Pentru determinarea saltului funcţiei $v(x)$ rezolvăm ecuaţia diferenţială (I.2.9) integrînd-o în sens obişnuit.

Astfel rezultă :

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[q\frac{(x-c)^4}{24}H(x-c) - q\frac{(x-d)^4}{24}H(x-d) - \right.$$

$$- M\frac{(x-d)^2}{2}H(x-b) + F\frac{(x-a)^3}{6}H(x-a) - M_0\frac{x^2}{2}H(x) -$$

$$\left. - T_0\frac{x^3}{6}\cdot H(x)\right] - \frac{1}{GA'}\left[q\frac{(x-c)^2}{2}H(x-c) - q\frac{(x-d)^2}{2}H(x-d) - \right.$$

$$\left. - M\cdot H(x-b) + F(x-a)\ H(x-a) - M_0 H(x) - T_0 x\, H(x)\right] +$$

$$+ \varphi_0 x + v_0, \tag{I.2.15}$$

în ecuaţia (I.2.15) se observă că termenii $M_0 \cdot H(x)$ şi $M \cdot H(x - b)$ au în $x = 0$ şi respectiv în $x = b$ discontinuităţi de speţa întîi.

Aşadar salturile funcţiei $v(x)$ în $x = 0$ şi în $x = b$ sînt, respectiv, S_0 şi S_1 :

$$S_0 = v(0 + 0) - v(0 - 0) = -\frac{M_0}{GA'},$$

$$S_1 = v(b + 0) - v(b - 0) = \frac{M}{GA'}.$$

Aplicînd relaţia (I.2.12), derivata în sensul teoriei distribuţiilor a lui v în raport cu x este :

$$\frac{\widetilde{\mathrm{d}v}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{M_0}{GA'}\,\delta(x) + \frac{M}{GA'}\,\delta(x-b). \tag{I.2.16}$$

Derivînd acum relaţia (I. 2.16) în sensul teoriei distribuţiilor în raport cu x obţinem :

$$\frac{\widetilde{\mathrm{d}^2v}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} + \frac{M_0}{GA'}\,\delta'(x) + \frac{M}{GA'}\cdot\delta'(x-b). \tag{I.2.17}$$

Înlocuind relaţia (I.2.17) în relaţia (I.2.9) pentru a transforma ecuaţia diferenţială în distribuţii (I.2.9) într-o ecuaţie diferenţială în sens obişnuit (în care operatorii de derivare să-şi aibă sensul clasic), obţinem :

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{EI}\left[q\frac{(x-c)^2}{2}H(x-c) - q\frac{(x-d)^2}{2}H(x-d) - M.\,H(x-b) + \right.$$

$$\left. F(x-a)\,H(x-a) - M_0\,H(x) - T_0\cdot x\cdot H(x)\right] -$$

$$-\frac{1}{GA'}\,[qH(x-c) - q\cdot H(x-d) + F\,\delta(x-a) - T_0\delta(x) +$$

$$+ M_1\cdot\delta'(x-l) + T_1\delta'(x-l)]. \tag{I.2.18}$$

Integrînd acum ecuaţia (I.2.18) în sensul teoriei distribuţiilor expresia fibrei medii deformate cînd se ţine cont şi de influenţa forţei tăietoare este :

$$v(x) = v_0 + \left(\varphi_0 + \frac{T_0}{GA'}\right)x - \frac{1}{GA'}\left[q\cdot\frac{(x-c)^2}{2}H(x-c) - \right.$$

$$\left. - q\frac{(x-d)^2}{2}H(x-d) + F(x-a)\,H(x-a)\right] + \frac{1}{EI}\left[-M_0\frac{x^2}{2}H(x) - \right.$$

$$- T_0\frac{x^3}{6}H(x) + F\frac{(x-a)^3}{6}H(x-a) - M\frac{(x-b)^2}{2}H(x-b) +$$

$$\left. + q\frac{(x-c)^4}{24}H(x-c) - q\frac{(x-d)^4}{24}H(x-d)\right] \tag{I.2.19}$$

Derivînd relaţia (I.2.19) în raport cu x obţinem expresia generală a rotirii :

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{T_0}{GA'} + \frac{1}{EI}\left[q\frac{(x-c)^3}{6}H(x-c) - q\frac{(x-d)^3}{6}H(x-d) - \right.$$

$$\left. - M(x-b)\,H(x-b) + F\frac{(x-a)^2}{2}H(x-a) - T_0\frac{x^2}{2}H(x) - M_0 x H(x)\right] -$$

$$- \frac{1}{GA'}[q(x-c)\,H(x-c) - q(x-d)\,H(x-d) + FH(x-a)]. \quad \text{(I.2.20)}$$

Pentru a ne da seama de influenţa forţei tăietoare asupra fibrei mediane vom aplica relaţiile (I.2.19) şi (I.2.20) pe un exemplu de calcul.

I.3. EXEMPLU DE CALCUL

Vom considera acum cazul unei bare încastrată la unul din capete şi liberă la celălalt (consolă), acţionată de o forţă normală pe axul barei şi uniform distribuită (fig. 3).

Aplicînd ecuaţia (I.2.19) obţinem :

$$v_B = v_0 + \varphi_0 x + \frac{T_0}{GA'}x - \left(\frac{M_0}{2EI} + \frac{p}{26A'}\right)x^2 - \frac{T_0}{6EI}x^3 + \frac{p}{24EI}x^4. \quad \text{(I.3.1)}$$

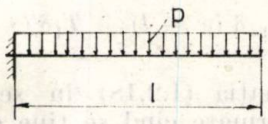


Fig. 3

Deoarece

$$T_0 = pl, \quad M_0 = \frac{pl^2}{2}, \quad \text{(I.3.2)}$$

ecuaţia (I.3.1) se transformă astfel :

$$v_B = \frac{pl^2}{GA'} + \frac{pl^4}{4EI} - \frac{pl^2}{2GA'} - \frac{pl^4}{GEI} + \frac{pl^4}{24EI} =$$

$$= \frac{pl^4}{8EI} + \frac{pl^2}{2GA'}. \quad \text{(I.3.3)}$$

Dar

$$v_B = v_B^M + v_B^T, \quad \text{(I.3.4)}$$

identificînd (I.3.3) cu (I.3.4), obţinem :

$$v_B^M = \frac{pl^4}{8EI}, \quad v_B^T = \frac{pl^2}{2GA'} \tag{I.3.5}$$

Pentru a ne da seama de cît de mare este influenţa forţei tăietoare faţă de cea a momentului încovoietor în formulele de mai sus, vom calcula raportul :

$$\frac{v_B^T}{v_B^T} = \frac{pl^2}{2GA'} \cdot \frac{8EI}{pl^4} = 4\,\frac{EI}{GA'} \cdot \frac{1}{l^2}. \tag{I.3.6}$$

Înlocuind în relaţia (I.3.6) raportul E/G dat de relaţia de izotropie $\left(\frac{E}{G} = 2(1+\mu)\right)$ şi introducînd coeficientul de zvelteţe $\lambda = \frac{l}{i}$ ca raport între lungimea barei şi raza de giraţie a secţiunii transversale obţinem :

$$\frac{v_B^T}{v_B^M} = 8(1+\mu)\,k\,\frac{i^2}{l^2} = 8(1+\mu)\,\frac{k}{\lambda^2}, \tag{I.3.7}$$

unde k este coeficientul ce face trecerea între aria secţiunii transversale şi aria redusă A' $\left(k = \frac{6}{5}\right.$ pentru dreptunghi, $\left.k = \frac{10}{9}\right.$ pentru cerc$\left.\right)$.

Pentru o secţiune dreptunghiulară, relaţia (I.3.7) devine :

$$\frac{v_B^T}{v_B^M} = \frac{0{,}8(1+\mu)}{\left(\frac{l}{h}\right)^2}, \tag{I.3.8}$$

unde a apărut raportul dintre deschiderea barei şi înălţimea secţiunii transversale (l/h).

Valorile raportului v_B^T/v_B^M sînt trecute în tabelul 1 în procente, funcţie de raportul l/h şi diverse valori ale lui μ.

Tabelul 1

μ \ l/h	2	3	4	5	10
0	20	8,88	5	3,2	0,8
$\frac{1}{6}$	23,33	10,37	5,83	3,73	0,93
0,3	26	11,55	6,5	4,16	1,04
0,5	30	13,33	7,5	4,8	1,2

Analizînd tabelul 1 observăm că săgeata produsă de forţa tăietoare poate atinge pînă la 30% din săgeata produsă de momentul încovoietor.

Pentru a analiza procentul din săgeata totală produsă de forţa tăietoare calculăm şi raportul:

$$\frac{v^T}{v^T + v^M} = \frac{1}{1 + 1{,}25 \dfrac{\left(\dfrac{l}{h}\right)^2}{1+\mu}}. \tag{I.3.9}$$

Valorile raportului (I.3.9) exprimate în procente sînt trecute în tabelul 2.

Tabelul 2

μ \ l/h	2	3	4	5	10
0	16,67	8,16	4,76	3,1	0,8
$\frac{1}{6}$	18,92	9,39	5,51	3,6	0,92
0,3	20,63	10,36	6,1	4	1,03
0,5	23	11,76	6,97	4,58	1,18

Se observă că pentru $l/h \leqslant 4$, forţa tăietoare începe să aibă o influenţă apreciabilă de care trebuie să se ţină seama în calculele de proiectare, deoarece eroarea care se face neglijînd aceste influenţe depăşeşte eroarea tehnică admisibilă (circa 5%).

II. GENERALIZAREA ECUAŢIEI CELOR TREI MOMENTE PENTRU CAZUL CÎND SE ŢINE CONT DE INFLUENŢA FORŢEI TĂIETOARE

II. 1 FORMULAREA MATRICEALĂ A METODEI PARAMETRILOR ÎN ORIGINE ÎN CAZUL GENERAL

Parametrii de capăt (v, φ, M, T) ai unui tronson de bară $(0-l)$ se constituie în matricile coloane

$$Z_{01} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ M_0 \\ T_0 \\ l \end{bmatrix}, \quad Z_{10} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \\ l \end{bmatrix}. \tag{II.1.1}$$

Elementele geometrice ale tronsonului (l, I, A') se notează cu indicele capătului din dreapta al tronsonului (l_1, I_1, A'_1). Pentru generalitate considerăm o bară rezemată oricum supusă acțiunii unei sarcini uniforme normală pe bară și a unei forțe concentrate normală pe bară. Izolăm din această bară un tronson ca în figura 5.

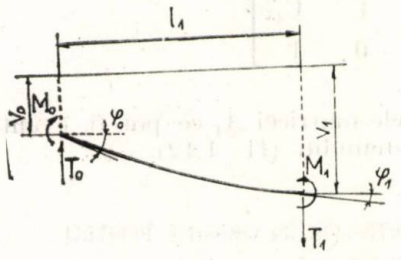


Fig. 4

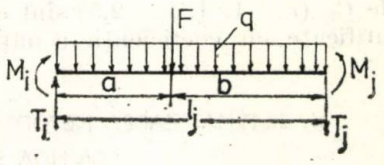


Fig. 5

Folosind relațiile fibrei medii deformate și ecuațiile de echilibru pentru elementul considerat ca fiind acționat de o sarcină concentrată F și o sarcină uniform distribuită, obținem:

$$v_j = v_i + \varphi_i l_j - \frac{M_i}{2EI_j} l_j^2 - \left(\frac{T_i l_j^3}{6EI_j} - \frac{T_i l_j}{GA'_j}\right) + \frac{q \cdot l_j^4}{24EI_j} +$$

$$+ \frac{F}{GEI_j}(l_j - a)^3 - \frac{q}{2GA'_j} l_j^2 - \frac{F}{GA'_j}(l_j - a),$$

$$\varphi_j = \varphi_i - \frac{M_i}{EI_j} l_j - T_i \frac{l_j^2}{2EI_j} + \frac{T_i}{GA'_j} + \frac{q l_j^3}{6EI_j} + \frac{F}{2EI_j}(l_j - a)^2 -$$

$$- \frac{q l_j}{GA'_j} - \frac{F}{GA'_j},$$

$$M_j = M_i + T_i l_j - q \frac{l_j^2}{2} - F(l_j - a), \qquad \text{(II.1.2)}$$

$$T_j = T_i - q l_j - F.$$

Analizînd ecuațiile (II.1.2) se observă că între matricele (II.1.1) există relația

$$\underset{\sim}{Z}_{10} = \underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{Z}_{01},$$

unde $\underset{\sim}{A}_1$ este o matrice diagonală de 5×5 de tipul:

$$\underset{\sim}{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ 0 & 0 & 1 & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{II.1.4}$$

unde C_{ij} $(i = 1, 4, j = 2,5)$ sînt elementele matricei $\underset{\sim}{A}_1$ ce pot fi eventual identificate cu coeficienţii ecuaţiilor sistemului (II. 1.12)

II. SISTEMATIZAREA METODEI PARAMETRILOR ÎN ORIGINE PENTRU GRINDA SIMPLU REZEMATĂ

Aplicînd relaţia (II.1.3) pentru grinda din figura 5, considerînd că în i şi j sînt reazeme simple, obţinem:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_j \\ M_j \\ T_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ 0 & 0 & 1 & C_{34} & C_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_i \\ M_i \\ T_i \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{II.2.1}$$

Prin identificare cu relaţiile (II. 1. 2) obţinem

$$C_{12} = l_j; \quad C_{13} = -\frac{l_j}{2EI_j}; \quad C_{14} = -\left(\frac{l_j^3}{6EI_j} - \frac{l_j}{GA'_j}\right),$$

$$C_{15} = F\frac{(l_j - a)^3}{6EI_j} + q\frac{l_j^4}{24EI_j} - \frac{l_j^2}{2GA'_j} - \frac{F(l_j - a)}{GA'_j}, \tag{II.2.2}$$

$$C_{23} = -\frac{l_j}{EI_j}; \quad C_{24} = -\left(\frac{l_j^2}{2EI_j} - \frac{l}{GA'_j}\right),$$

$$C_{25} = \frac{F}{2EI_j}(l_j - a)^2 + \frac{q}{6EI_j}l_j^3 - \frac{ql_j}{GA'_j} - \frac{F}{GA'_j},$$

$$C_{34} = l_j; \quad C_{35} = -\frac{l_j^2}{2} - F(l_j - a), \quad C_{45} = -q \cdot l_j - F.$$

Pe baza primei ecuații din relațiile (II. 2.1) obținem :

$$T_i = -\frac{C_{12}}{C_{14}} \cdot \varphi_i + \left(-\frac{C_{13}}{C_{14}} M_i \right) - \frac{C_{15}}{C_{14}}. \qquad \text{(II.2.3)}$$

Din a doua ecuație a grupului (II. 2. 1) obținem :

$$\varphi_j = \varphi_i + C_{23} M_i + C_{24}\left(-\frac{C_{12}}{C_{14}} \varphi_i - \frac{C_{13}}{C_{14}} M_i - \frac{C_{15}}{C_{14}} \right) + C_{25} =$$

$$= \left(1 - \frac{C_{12}}{C_{14}} C_{24}\right) \varphi_i + \left(C_{23} - \frac{C_{13}}{C_{14}} C_{24}\right) M_i + C_{25} - \frac{C_{15}}{C_{14}} C_{24}. \qquad \text{(II.2.4)}$$

Procedînd analog și pentru a treia ecuație din grupul (II.2.1) obținem :

$$M_j = -\frac{C_{12}}{C_{14}} C_{34} \cdot \varphi_i + \left(1 - \frac{C_{13}}{C_{14}} C_{34}\right) M_i + \left(C_{35} - \frac{C_{15}}{C_{14}} C_{34}\right). \qquad \text{(II.2.5)}$$

În acest fel am eliminat pe T_j și T_i din (II.2.1)

$$\begin{bmatrix} \varphi_j \\ M_j \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{C_{12}}{C_{14}} C_{24} & C_{23} - \frac{C_{13}}{C_{14}} C_{24} & C_{25} - \frac{C_{15}}{C_{14}} C_{24} \\ -\frac{C_{12}}{C_{14}} C_{34} & 1 - \frac{C_{13}}{C_{14}} C_{34} & C_{35} - \frac{C_{15}}{C_{14}} C_{34} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_i \\ M_i \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \text{(II.2.6)}$$

Relația (II.2.6) permite calculul rotirii din punctele i și j în funcție numai de încărcările exterioare.

Pentru calculul rotirii din i sau j calculăm toate elementele C_{ij} din relația (II.2.6) înlocuindu-le cu valorile respective din relațiile (II. 2.2). Efectuînd aceste calcule și scriind apoi ecuația a doua din grupul 2.2.6, obținem

$$M_j = \frac{6EI_j}{l_j} \frac{1}{1 - \frac{6}{l_j^2} \frac{EI_j}{GA'_j}} \varphi_i - 2 \frac{1 + \frac{3}{l_j^2} \frac{EI_j}{GA'_j}}{1 - \frac{6}{l_j^2} \frac{EI_j}{GA'_j}} M_i -$$

$$- \frac{q \cdot \frac{l_j^4}{4} + 2F \cdot l_j^2 \cdot a - 3F \cdot l_j \cdot a^2 + F \cdot a^3}{l_j^2 \left(1 - \frac{6}{l_j^2} \cdot \frac{EI_j}{GA'_j}\right)}. \qquad \text{(II.2.7)}$$

Explicînd pe φ_i din (II.2.7) obţinem :

$$\varphi_i = \frac{l_j}{6EI_j}\left(1 - \frac{6}{l_j^2}\frac{EI_j}{GA'_j}\right)M_j + \frac{2\cdot l_j}{6EI_j}\left(1 + \frac{3}{l_j^2}\cdot\frac{EI_j}{GA'_j}\right)\cdot M_i +$$

$$+ \frac{q\frac{l_j^4}{4} + 2Fl_j^2a - 3F\cdot l_j a^2 + F\cdot a^3}{6l_jEI_j} = \frac{l_j}{6EI_j}\left[M_j + 2M_i + \right.$$

$$\left. + \frac{q\frac{l_j^4}{4} + Fab(l_j + b)}{l_j^2}\right] + \frac{1}{l_j\cdot GA'_j}(M_i - M_j)\cdot \qquad \text{(II.2.8)}$$

Prin permutarea indicilor în relaţia (II.2.8) şi ţinînd cont că rotirea din j se produce în sens antiorar obţinem :

$$\varphi_j = -\frac{l_j}{6EI_j}\left[M_i + 2M_j + \frac{q\frac{l_j^4}{4} + Fab(l_j + a)}{l_j^2}\right] -$$

$$- \frac{1}{l_j\cdot GA'_j}(M_j - M_i). \qquad \text{(II.2.9)}$$

Se observă că în relaţiile (II.2.8) şi (II.2.9) apar doi termeni ce nu depind decît de sarcinile exterioare :

$$m_{ij} = \frac{l_j^2}{4} + \frac{Fab(l_j + b)}{l_j^2},$$

$$m_{ji} = \frac{l_j^2}{4} + \frac{Fab(l_j + a)}{l_j^2}. \qquad \text{(II.2.10)}$$

II.3. GENERALIZAREA ECUAŢIEI CELOR TREI MOMENTE

Pe baza ecuaţiilor (II.2.8) şi (II.2.9) şi a continuităţii fibrei medii pe reazemele unei grinzi continue se poate ajunge la ecuaţia celor trei momente (Clapeyron).

Astfel, aplicînd relaţiile (II.2.8) şi (II.2.9) obţinem :

$$\varphi_{ji} = \frac{-l_j}{6EI_j}[M_i + 2M_j + m_{ji}] - \frac{l}{l_jGA'_j}(M_j - M_i),$$

$$\varphi_{jk} = \frac{l_k}{6EI_k}(2M_j + M_k + m_{jk}) + \frac{l}{l_k\cdot GA'_k}(M_j - M_k). \qquad \text{(II.3.1)}$$

Considerînd un moment de inerţie arbitrar I_0 şi notînd lungimile reduse.

$$l'_j = \frac{I_0}{I_j} l_j ; \quad l'_k = \frac{I_0}{I_k} l_k, \tag{II.3.2}$$

rotirea relativă pe reazemul j se exprimă prin relaţia :

$$6EI_0(\varphi_{jk} - \varphi_{ji}) = l'_j \cdot M_i + 2M_j(l'_k + l'_j) + M_k l'_k + m_{ji} l'_j + m_{jk} l'_k +$$

$$+ 6\frac{EI_0}{G}\left[M_j\left(\frac{l}{l_j A'_k} + \frac{l}{l_k A'_k}\right) - \frac{M_i}{l_j A'_j} - \frac{M_k}{l_k A'_k}\right]. \tag{II.3.3}$$

Dacă grinda este continuă, $\Delta\varphi = 0$, de unde rezultă :

$$M_i \cdot l'_j + 2M_j(l'_j + l'_k) + M_k \cdot l'_k + m_{ji} l'_j + m_{jk} l'_k +$$

$$+ 6\frac{EI_0}{G}\left[\frac{M_j}{A'_k}\left(\frac{1}{l_j} + \frac{1}{l_k}\right) - \frac{M_i}{l_j A'_j} - \frac{M_k}{l_k A'_k}\right] = 0 \tag{II.3.4}$$

Ecuaţia (II.3.4) reprezintă ecuaţia celor trei momente pentru cazul cînd se ţine cont de influenţa forţei tăietoare asupra fibrei mediane.

III. STABILIREA INFLUENŢEI FORŢEI TĂIETOARE ASUPRA FLAMBAJULUI BARELOR DREPTE

III. 1. STABILIREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A FIBREI MEDII DEFORMATE ÎN TEORIA DE ORDINUL DOI PENTRU BARE SOLICITATE SIMULTAN LA ÎNCOVOIERE ŞI COMPRESIUNE CENTRICĂ

Se consideră bara simplu rezemată din figura 6, acţionată concomitent de sarcini transversale normale pe bară şi de forţă axială de compresiune P.

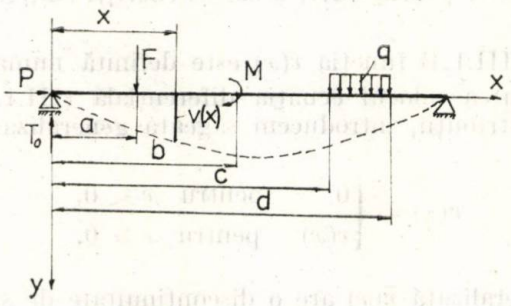


Fig. 6

Scriind ecuaţiile de echilibru pe forma deformată a sistemului, ecuaţia diferenţială a fibrei medii (I. 1. 8) ia forma :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M^{QP}}{EI} - \frac{\varphi_u}{GA'}. \tag{III.1.1}$$

În relaţia (III.1.1) momentul M^{QP} este momentul dat de sarcinile transversale (M^Q) şi momentul dat de forţa axială (M^P)

$$M^{QP} = M^Q + M^P. \tag{III.1.2}$$

Momentul dat de forţele transversale pe bază este dat de relaţia (I. 2. 6).

Momentul dat de forţa axială P este

$$M^P = P \cdot v. \tag{III.1.3}$$

Înlocuind relaţiile (I.2.6), (III.1.3) şi (I.2.3) în (III.1.1) obţinem ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{EI}\left[q\frac{(x-c)^2}{2}H(x-c) - q\frac{(x-d)^2}{2}H(x-d) - M\cdot H(x-b) + \right.$$

$$\left. + F\cdot(x-a)\,H(x-a) - M_0\cdot H(x) - T_0\cdot X\cdot H(x)\right] - \frac{P\cdot v}{EI} -$$

$$-\frac{1}{GA'}\,[qH(x-c) - q\,H(x-d) - M\cdot\delta'(x-b) + F\cdot\delta(x-a) -$$

$$- M_0\delta'(x) - T_0\cdot\delta(x)]. \tag{III.1.4}$$

III.2. STABILIREA SOLUŢIEI ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A FIBREI MEDII DEFORMATE, ŢINÎND CONT ŞI DE INFLUENŢA FORŢEI TĂIETOARE

În ecuaţia (III.1.4) funcţia $v(x)$ este definită numai pentru $x > 0$.

Pentru a putea înlocui ecuaţia diferenţială (III.1.4) cu o ecuaţie diferenţială în distribuţii, introducem săgeata generalizată $\bar{v}(x)$ astfel :

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 0, \\ v(x) & \text{pentru } x \geqslant 0. \end{cases} \tag{III.2.1}$$

Funcţia generalizată $\bar{v}(x)$ are o discontinuitate de speţa întîi pentru $x = 0$.

În acest caz în conformitate cu formula (I.2.11) putem scrie:

$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}x}\bar{v}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bar{v}(x) + S_0 \cdot \delta(x). \tag{III.2.2}$$

Pentru funcţia noastră avem:

$$S_0 = \bar{v}(x_0 + 0) - \bar{v}(x_0 - 0) = v(0) = v_0. \tag{III.2.3}$$

Formula (III.2.2) devine

$$\widetilde{\frac{\mathrm{d}\bar{v}(x)}{\mathrm{d}x}} = \frac{\mathrm{d}\bar{v}(x)}{\mathrm{d}x} + v_0 \cdot \delta(x) \tag{III.2.4}$$

Derivînd în raport cu x relaţia (III.2.4.), obţinem:

$$\widetilde{\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}(x)}{\mathrm{d}x^2}} = \frac{\mathrm{d}^2\bar{v}(x)}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}\right)\delta(x) + v_0 \cdot \delta'(x) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2\bar{v}(x)}{\mathrm{d}x^2} + \varphi_0 \cdot \delta(x) + v_0\delta'(x), \tag{III.2.5}$$

înlocuind acum în relaţia (III.1.4) operatorul $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ cu operatorul $\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}^2}{\mathrm{d}x^2}$ dat de relaţia (III.2.5), obţinem

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \varphi_0 \cdot \delta(x) - v_0\delta'(x) + \frac{P}{EI} \cdot \bar{v}(x) = -\frac{M_0}{EI} H(x) -$$

$$-\frac{T_0}{EI} x \cdot H(x) + \frac{F}{EI}(x - a) \cdot H(x - a) - \frac{M}{EI} H(x - b) +$$

$$+\frac{q}{EI}\frac{(x - c)^2}{2} H(x - c) - q\frac{(x - d)^2}{2EI} \cdot H(x - d) - \frac{q}{GA'} H(x - c) +$$

$$+\frac{q}{GA'} H(x - d) + \frac{M}{GA'} \cdot \delta'(x - b) - \frac{F}{GA'} \delta(x - a) +$$

$$+\frac{M_0}{GA'} \cdot \delta'(x) + \frac{T_0}{GA'} \cdot \delta(x). \tag{III.2.6}$$

Notăm

$$\frac{P}{EI} = k^2. \tag{III.2.7}$$

Pentru a găsi soluţia ecuaţiei (III.2.6) vom integra această ecuaţie cu condiţii iniţiale, folosind metoda transformărilor integrale. Astfel vom aplica transformata Laplace în raport cu variabila spaţială x, folosind rezultatele prezentate în [1]:

$$p^2 L[\bar{v}(x)] - \varphi_0 \cdot L[\delta(x)] - v_0 L[\delta'(x)] + k^2 L[\bar{v}(x)] =$$

$$-\frac{M_0}{EI} L[H(x)] - \frac{T_0}{EI} \cdot L[x \cdot H(x)] + \frac{F}{EI} L[(x-a) \cdot H(x-a)] -$$

$$-\frac{M}{Eg} L[H(x-b)] + \frac{q}{EI} L\left[\frac{(x-c)^2}{2} H(x-c)\right] -$$

$$-\frac{q}{2EI} L[x-d)^2 \cdot H(x-d)] - \frac{q}{GA'} L[H(x-c)] +$$

$$+\frac{q}{GA'} L[H(x-d)] + \frac{M}{GA'} L[\delta'(x-b)] -$$

$$-\frac{F}{GA'} L[\delta(x-a)] + \frac{M_0}{GA'} L[\delta'(x)] + \frac{T_0}{GA'} L[\delta(x)]. \quad \text{(III.2.8)}$$

În conformitate cu rezultatele prezentate în [1] avem:

$$L[\delta(x)] = 1;$$

$$L[\delta'(x)] = p,$$

$$L[H(x)] = \frac{1}{p},$$

$$L[-x \cdot H(x)] = \frac{-1}{p^2},$$

$$L[(x-a) \cdot H(x-a)] = e^{-pa} L[x \cdot H(x)] = \frac{1}{p^2} e^{-pa},$$

$$L[H(x-b)] = e^{-pb} L[H(x)] = \frac{1}{p} e^{-pb},$$

$$L[(x-c)^2 H(x-c)] = e^{-pc} L[x^2 \cdot H(x)] = \frac{2}{p^3} e^{-pc},$$

$$L[(x-d)^2 \cdot H(x-d)] = e^{-pd} \frac{2}{p^3}, \quad \text{(III.2.9)}$$

$$L[H(x-c)] = \mathrm{e}^{-pc}\frac{1}{p},$$

$$L[H(x-d)] = \frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-pd},$$

$$L[\delta'(x-b)] = \mathrm{e}^{-pd}\,p,$$

$$L[\delta(x-a)] = \mathrm{e}^{-pa}. \tag{III.2.9}$$

Înlocuind relaţiile (III.2.9) în (III.2.8) obţinem :

$$(p^2+k^2)\cdot L[\bar{v}(x)] - \varphi_0 - v_0\cdot p = \frac{M_0}{EI}\cdot\frac{1}{p} - \frac{T_0}{EI}\cdot\frac{1}{p^2} +$$

$$+\frac{F}{EI}\cdot\frac{1}{p^2}\,\mathrm{e}^{-pa} - \frac{M}{EI}\cdot\frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-pb} + \frac{q}{EI}\cdot\frac{1}{p^3}\,\mathrm{e}^{-pc}\times$$

$$\times\frac{q}{EI}\cdot\frac{1}{p^3}\,\mathrm{e}^{-pd} - \frac{q}{GA'}\cdot\frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-pc} + \frac{q}{GA'}\cdot\frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-pd} + \frac{M}{GA'}\,p\mathrm{e}^{-pb} -$$

$$-\frac{F}{GA'}\,\mathrm{e}^{-pa} + \frac{M_0}{GA'}\cdot p + \frac{T_0}{GA'}\cdot \tag{III.2.10}$$

Din (III.2.10) rezultă :

$$L[\bar{v}(x)] = v_0\frac{p}{p^2+k^2} + \varphi_0\frac{1}{p^2+k^2} - \frac{M_0}{EI}\cdot\frac{1}{p(p^2+k^2)} -$$

$$-\frac{T_0}{EI}\cdot\frac{1}{p^2(p^2+k^2)} + \frac{M_0}{GA'}\cdot\frac{p}{p^2+k^2} + \frac{T_0}{GA'}\,\frac{1}{p^2+k^2} +$$

$$+\frac{F}{EI}\,\mathrm{e}^{-pa}\frac{1}{p^2(p^2+k^2)} - \frac{M}{EI}\,\mathrm{e}^{-pb}\,\frac{1}{p(p^2+k^2)} + \frac{q}{EI}\,\mathrm{e}^{-pc}\,\frac{1}{p^3(p^2+k^2)} -$$

$$-\frac{q}{EI}\,\mathrm{e}^{-pd}\,\frac{1}{p^3(p^2+k^2)} - \frac{q}{GA'}\cdot\frac{1}{p(p^2+k^2)}\cdot\mathrm{e}^{-pc} +$$

$$+\frac{q}{GA'}\,\mathrm{e}^{-pd}\,\frac{1}{p(p^2+k^2)} + \frac{M}{GA'}\,\mathrm{e}^{-pb}\,\frac{p}{p^2+k^2} - \frac{F}{GA'}\,\mathrm{e}^{-pa}\,\frac{1}{p^2+k^2}\cdot \tag{III.2.11}$$

Aplicînd acum transformata Laplace inversă pentru fiecare termen din relaţia (III.2.11), obţinem :

$$\bar{v}(x) = \left[v_0 \cos kx + \frac{\varphi_0}{k} \sin kx - \frac{M_0}{P} (1 - \cos kx) - \right.$$

$$\left. - \frac{T_0}{kP} (x - \sin kx) + \frac{T_0}{kGA'} \sin kx + \frac{M_0}{GA'} \cos kx \right] H(x) +$$

$$+ \frac{F}{kP} [(x - a) - \sin kx\,(x - a)] H(x - a) - \frac{M}{P} [1 - \cos k(x - b)] \times$$

$$\times H(x - b) + \left[\frac{M}{GA'} \cos k(x - b) \right] H(x - b) -$$

$$- \left[\frac{F}{kGA'} \sin k(x - a) \right] H(x - a) + \left\{ \frac{q}{2P} (x - c)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{q}{k^2 P} [1 - \cos k(x - c)] \right\} H(x - c) - \left\{ \frac{q}{2P} (x - d)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{q}{k^2 P} [1 - \cos k(x - d) \right\} H(x - d) - \frac{q}{GA'} [1 - \cos k(x - c)] H(x - c) +$$

$$+ \frac{q}{GA'} [1 - \cos k(x - d)] \cdot H(x - d). \qquad \text{(III.2.12)}$$

Relaţia (III.2.12) reprezintă ecuaţia fibrei medii deformate supuse simultan la încovoiere şi compresiune centrică atunci cînd se ţine seama şi de influenţa forţei tăietoare asupra fibrei mediane. Ecuaţia (III.2.12) poate fi folosită în orice metodă pentru determinarea sarcinii critice de flambaj ca, de exemplu, metoda relaţiilor de recurenţă, metoda aproximaţiilor succesive sau metoda energetică.

De asemenea, procedeul poate fi uşor extins şi pentru studiul flambajului barelor cu secţiune variabilă şi cu legături elastice.

IV. CONCLUZII

Ca organe de maşini cu largă utilizare, arborii necesită un calcul exact, calcul care să ţină seama (atunci cînd este cazul) de toţi factorii ce conduc la deformarea fibrei mediane.

În acest context în lucrare este prezentată ecuaţia fibrei medii deformate la încovoiere, precum şi simultan la încovoiere şi compresiune centrică.

Pentru ca procedeele prezentate să poată fi aplicate și în cazul cînd arborii sînt static nedeterminați, se generalizează ecuația celor trei momente pentru cazul cînd se ține cont de influența forței tăietoare asupra fibrei mediene.

Pentru o tratare cît mai unitară a influențelor sarcinilor concentrate se apelează la teoria distribuțiilor.

Eliminarea dificultăților de calcul ce apar în teoria clasică apare cu atît mai evidentă cu cît numărul de discontinutități este mai mare.

De asemenea, aplicarea metodei anterior prezentate pentru stabilirea influenței forței tăietoare asupra deformatelor dinamice ale barelor drepte este ușor de realizat și ar putea constitui obiectivul unei lucrări viitoare.

Primită la redacție la 16 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. V. ILLE, P. P. TEODORESCU, *Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile*, vol. II. Edit. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.
2. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, Edit. Academiei, București, 1970.
3. N. POSEA, *Calculul eforturilor și deplasărilor arborilor*, St. cerc. mec. apl., **40**, 2 (1981).
4. N. POSEA, *Rezistența materialelor*, Ed. didactică și pedagogică, București, 1979.
5. E. TOCACI, *Fenomene discontinui în mecanică și rezistența materialelor*, Edit. Academiei, București, 1974.

CERCETĂRI PRIVIND INFLUENȚA ENERGIEI ULTRASONORE ASUPRA REZISTENȚEI LA OBOSEALĂ A PIESELOR PRELUCRATE PRIN DEFORMARE PLASTICĂ A STRATULUI SUPERFICIAL ÎN CÎMP ULTRASONOR

de GHEORGHE AMZA, NICOLAE CONSTANTIN
Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă rezultate privind creșterea rezistenței la oboseală a unor epruvete executate din OLC 45 și 41 MoC 11, durificate și netezite cu ultrasunete cu ajutorul unei instalații originale. Sînt prezentate instalația, un tabel și mai multe diagrame care ilustrează creșterea sensibilă a rezistenței la oboseală în comparație cu a epruvetelor din aceleași oțeluri, prelucrate superficial cu mijloace convenționale.

Pentru a mări fiabilitatea organelor de mașini se folosește o prelucrare de finisare prin deformare plastică, care își găsește o aplicare tot mai largă în diferitele domenii ale industriei constructoare de mașini. Procesul de deformare plastică la rece a stratului superficial are ca rezultat nu numai îmbunătățirea macro și microgeometriei suprafeței, a preciziei dimensionale și de formă, ci și îmbunătățirea proprietăților fizico-mecanice și fizico-chimice ale pieselor prelucrate. Dezavantajele metodelor clasice de deformare plastică la rece [6], [7], [8], constau în aceea că necesită forțe de apăsare mari, mașini specializate, sculele și utilajele sînt complicate și greu de realizat, productivitatea este relativ scăzută și tehnologia de prelucrare destul de complicată. O metodă eficace pentru micșorarea sarcinilor statice de deformare este aceea de a aplica fie sculelor, fie materialului ce urmează a fi deformat oscilații ultrasonore, energia ultrasonoră aducîndu-și un aport deosebit în desfășurarea procesului de deformare. Avantajele acestei metode referitoare la utilajul folosit pentru prelucrare rezultă din forțe statice de deformare mici, simplitatea schemei cinematice, scule relativ simple și ușor de realizat, posibilitatea utilizării unor mașini-unelte universale, posibilitatea prelucrării diferitelor tipuri de suprafețe și productivitatea ridicată.

Pornind de la aceste considerente, în cadrul catedrei de tehnologia materialelor și sudură din Institutul politehnic București a fost concepută, proiectată și realizată o instalație model experimental de durificat, netezit și detensionat în cîmp ultrasonor tip DND-01-AM. Schema bloc a acestei instalații este prezentată în figura 1, iar schema cinematică de principiu este prezentată în figura 2. Potrivit schemei cinematice de principiu, modelul experimental conceput și realizat cuprinde trei părți distincte:

— blocul ultrasonic A, format din traductorul magnetostrictiv *1*, care convertește oscilațiile electrice primite de la generatorul de înaltă frecvență G, în oscilații mecanice cu frecvență reglabilă în domeniul 14,5 ... 32 kHz. De traductor este fixată prin lipire cu un aliaj special flanșa nodală *2*, de care este fixat concentratorul tip bilă *4*. Traductorul magnetostrictiv este răcit continuu cu ajutorul unui sistem de răcire și este izolat acustic prin intermediul carcasei *3*;

— blocul pneumatic B, care realizează apăsarea concentratorului bilă asupra piesei *6*, cu o forță statică P_0. El este alcătuit din cilindrul pneumatic sau hidraulic *7*, care se deplasează în raport cu pistonul *8*, legat

la tija *9*, care este fixată de batiul mașinii *18*. Tija *9*, este prevăzută cu o serie de orificii pentru aer și ulei. Pentru fixarea blocului ultrasonic *A*, care face corp comun cu blocul pneumatic sau hidraulic *B*, s-a folosit flanșa specială *11* și colierele *12*, prevăzute cu role de glisare pe ghidajele prelucrate în coloana de susținere *19*;

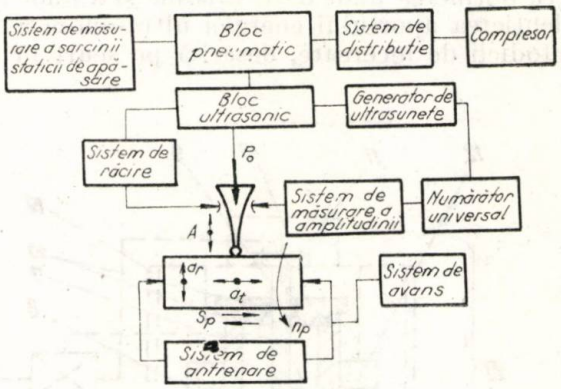


Fig. 1. — Schema generală de principiu a instalației de durificat, netezit și detensionat în cîmp ultrasonor

— sistemul de fixare și antrenare al piesei *C*, necesar pentru realizarea unei rotații a piesei *6*, cu turația reglabilă n_p, este alcătuit dintr-un motor *13*, reductorul *14*, universalul *15* și vîrful rotitor *16*. Sistemul este așezat pe masa mașinii *17*, care are posibilitatea deplasării pe verticală și în plan orizontal cu un avans reglabil s_p.

Metoda de prelucrare propusă și mașina de durificat, netezit și detensionat în cîmp ultrasonor DND-01-AM, model experimental realizat, potrivit încercărilor și experimentărilor efectuate, prezintă o serie de avantaje față de alte metode și alte instalații construite pînă în prezent [1]—[5], [8], [9], [11], [7].

Ecruisarea, independent de natura ei (prin întindere sau prin compresiune), mărește rezistența la oboseală a metalelor și aliajelor lor [8], [10]. Rezistența la oboseală a metalelor este influențată în mod diferit de diverși factori ca : forma și mărimea piesei, calitatea suprafeței, condițiile de exploatare, felul solicitării, suprasolicitării, coeficientul de asimetrie al ciclului, șocurile, frecvența solicitării, temperatura și alții, de aceea, este foarte important de știut modul cum influențează fiecare factor asupra rezistenței la oboseală precum și măsurile ce se pot lua pentru obținerea unei anumite rezistențe la oboseală precum și măsurile ce se pot lua pentru obținerea unei rezistențe la oboseală cît mai ridicate.

Procedeul de deformare plastică la rece a stratului superficial în cîmp ultrasonor conduce la obținerea unei foarte bune calități a suprafețelor prelucrate [3], [2], [6], cu influență directă asupra rezistenței la oboseală. Pentru a exprima cantitativ influența calității suprafeței, adică a stării stratului superficial, asupra rezistenței la oboseală, se introduce un coeficient global de calitate a suprafeței $\eta_{\sigma-1}$ care este raportul dintre rezistența

la oboseală a epruvetei cu suprafaţa prelucrată în cîmp ultrasonor σ^u_{-1} şi rezistenţa la oboseală a epruvetei cu suprafaţa prelucrată prin procedeul de comparaţie, σ^c_{-1} :

$$\eta_{\sigma-1} = (\sigma^u_{-1}/\sigma^c_{-1}) \cdot 100[\%]. \quad (1)$$

Avînd în vedere numărul foarte mare de factori ce influenţează rezistenţa la oboseală, pentru obţinerea unor date valabile şi a unor concluzii care să permită evidenţierea aportului energiei ultrasonore a fost necesară stabilirea unei metodicii de încercare, descrisă pe scurt în cele ce urmează.

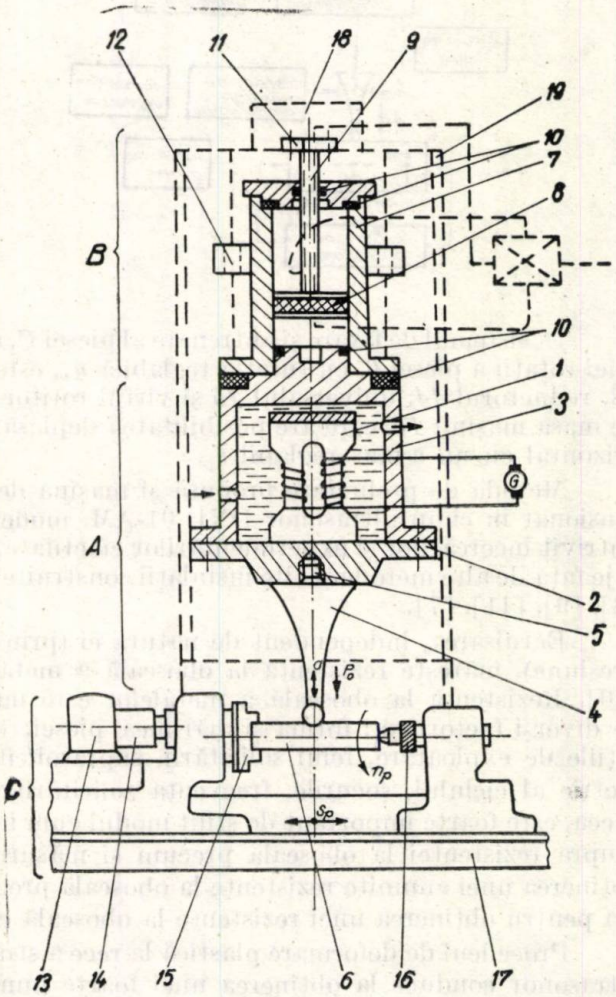


Fig. 2. — Schema cinematică de principiu a instalaţiei de durificat, netezit şi detensionat în cîmp ultrasonor tip DND-01-AM.

Experimentările au fost făcute pe epruvete cilindrice cu cap filetat (fig. 3), execuţia lor fiind făcută după desenele din cartea tehnică a maşinii de încercat. Pe o serie de epruvete s-a executat în porţiunea centrală un concentrator de eforturi unitare de forma prezentată în figura 3 *c*. Acest

concentrator de eforturi, care a avut rolul de a localiza ruperea epruvetei (în lipsa lui ruperea s-a produs oriunde pe porţiunea cilindrică, cu tendinţa localizării spre racordări), a fost făcut în două moduri distincte : clasic, prin aşchiere şi neconvenţional, prin deformare plastică în cîmp ultrasonor prin procedeul analizat. S-au încercat şi epruvete netede prelucrate

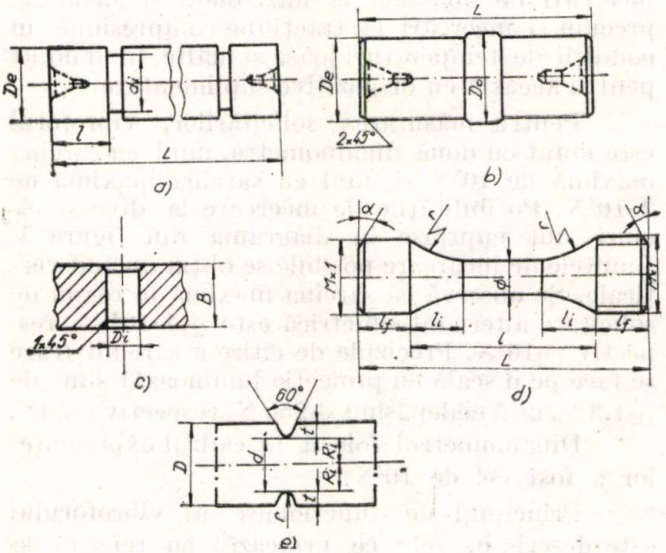


Fig. 3. — Forma epruvetelor folosite la experimentări : *a* — epruvetă în trepte ; *b* — epruvetă cilindrică ; *c* — epruvetă pentru durificare, netezire şi detensionare a alezajelor ; *d*, *e* — epruvete pentru încercări la tracţiune şi oboseală.

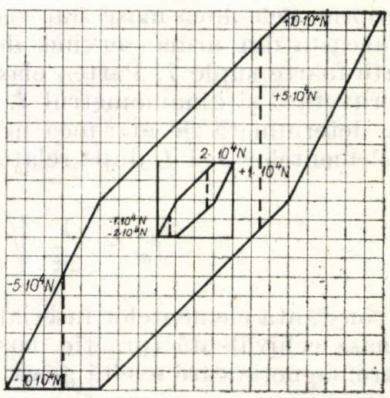


Fig. 4. — Diagramă cu domeniul de încercări ce poate fi efectuat cu vibroforul AMSLER tip 10 HFP 422.

final cu ultrasunete pe toată suprafaţa prin durificare şi netezire şi s-au comparat cu epruvete netede prelucrate fără ultrasunete. Din fiecare din cele patru tipuri de epruvete s-au încercat cîte 10 bucăţi, luîndu-se în considerare cîte şase bucăţi cu rezultatele cele mai semnificative. Încercările s-au făcut la tracţiune-compresiune după ciclu simetric, frecvenţa de lucru fiind de 120 Hz. Maşina utilizată a fost vibroforul Amsler de înaltă frecvenţă, tip 10HFP 422, aflat în dotarea laboratorului de solicitări variabile al catedrei de rezistenţa materialelor din Institutul politehnic Bucureşti. Acest vibrofor poate fi utilizat pentru determinarea limitei de oboseală la tracţiune, compresiune sau tracţiune-compresiune, deci la solicitări axiale,

după cicluri cu orice coeficient de asimetrie R (de preferință $R = -1$). Epruvetele utilizate pot fi bare cilindrice cu capete filetate, fire, epruvete plate (plăci), table sau chiar elemente întregi de construcție (subansamble sudate sau nituite etc.). Pentru fiecare din aceste epruvete mașina este dotată cu capete de prindere corespunzătoare. Vibroforul poate executa încercări de oboseală la încovoiere și răsucire, precum și încercări la tracțiune-compresiune în condiții de temperaturi joase și înalte, fiind dotat pentru aceasta cu dispozitive suplimentare.

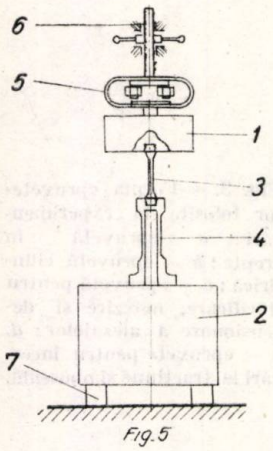


Fig. 5. — Principiul de funcționare al vibroforului.

Pentru măsurarea solicitărilor, vibroforul este dotat cu două dinamometre, unul cu sarcina maximă de 10^5N și unul cu sarcina maximă de $2 \cdot 10^4$N. Posibilitățile de încercare la diverse cicluri sînt cuprinse în diagrama din figura 4. Limitele de încărcare posibile se obțin ducînd verticale. Se observă că sarcina maximă în regim de solicitare alternant-simetrică este $\pm 5 \cdot 10^4$ N, respectiv $\pm 10^4$N. Preciziile de citire a sarcinii (care se face pe o scală cu proiecție luminoasă) sînt de $\pm 1{,}5\,\%$, însă nedepășind ± 250 N, respectiv ± 50N.

Dinamometrul folosit în cadrul experiențelor a fost cel de 10^5N.

Principiul de funcționare al vibroforului este descris în cele ce urmează, cu referire la figura 5. Mașina funcționează ca un sistem cu două mase, oscilînd la frecvență proprie. Cele două mase sînt masa principală *1* și masa complementară *2*, aceasta din urmă servind de fundație și fiind așezată pe patru resoarte foarte suple *7*. Partea elastică a acestui sistem este formată din epruveta *3* și dinamometrul *4*. Frecvența proprie a sistemului oscilant este determinată de mărimea maselor *1* și *2* și de constantele elastice ale elementelor *3* și *4*, după relația :

$$f_{pr} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (2)$$

unde k este constanta elementelor înseriate *3* și *4* :

m — masa echivalentă (practic masa *1*, deoarece $m_2 \gg m_1$). Un dispozitiv electromagnetic care excită acest sistem permite menținerea oscilațiilor la frecvența proprie și menținerea amplitudinii. Masa principală *1*, poate fi modificată prin adăugarea de mase suplimentare care permit modificarea frecvenței în limitele 60...300 Hz.

Un resort *5*, permite aplicarea unei pretensiuni asupra epruvetei care va constitui sarcina medie (în cazul încercării după un ciclu nesimetric). Această pretensiune este reglabilă cu ajutorul șurubului *6*. Resortul *5* și resoartele *7*, sînt mult mai suple decît elementele *3* și *4*, astfel încît ele nu influențează deloc frecvența sistemului.

Încercările au decurs în felul următor :

— cîte șapte epruvete din fiecare serie au fost încercate pînă la rupere cu sarcină constantă pentru a se determina aliura porțiunii încli-

nate a curbei Wöhler, iar cîte trei epruvete au fost încercate în trepte succesive de încărcare pentru a se determina rezistența la oboseală prin metoda sarcinii progresive (Locati);

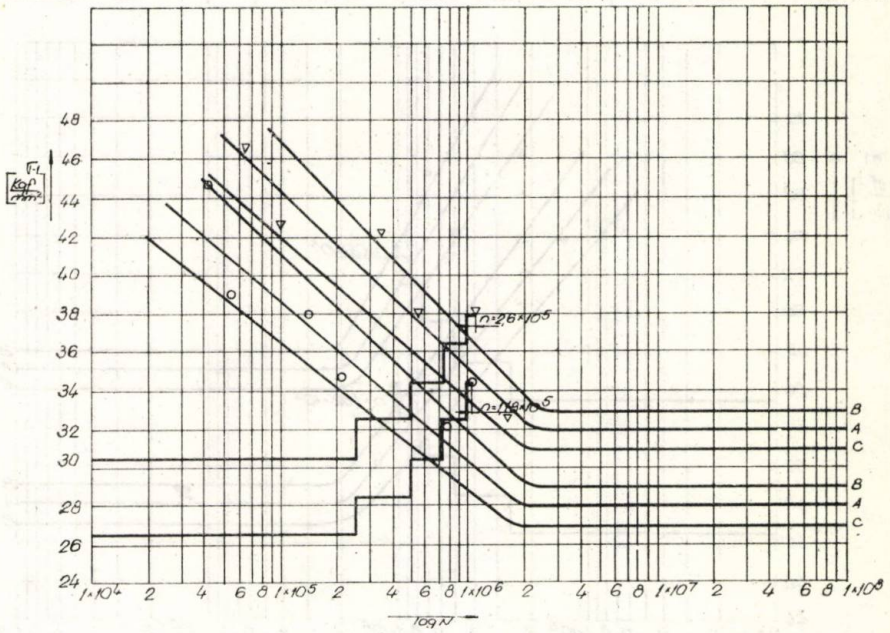


Fig. 6. — Reprezentarea solicitărilor la încercarea în trepte după metoda Locati la epruvete prelucrate fără ultrasunete.

— s-au reținut pentru trasarea curbelor rezultatele experimentale de la cinci epruvete din fiecare serie încercate la sarcină constantă și de la o epruvetă din fiecare serie încărcată în trepte (fig. 6 și fig. 7).

S-au făcut următoarele ipoteze:

— ipoteza vătămării cumulative a lui Miner:

$$\sum \frac{n}{N} = 1, \tag{3}$$

unde n este numărul de cicluri la un prag de solicitare;

N — numărul de cicluri corespunzător ruperii la această solicitare, după curba Wöhler;

— ipoteza cunoașterii alurei curbei Wöhler, $\sigma = f(n)$, pentru materialul respectiv sau pentru un material asemănător.

Pentru început s-a lucrat cu epruvete din OLC 45 normalizat obținute din aceeași bară, deoarece existau diferite posibilități de comparație cu curbe de oboseală ridicate în lucrările [4], [3], [10], [14]. S-a determinat $\sigma_r = 70{,}5$ daN/mm² pe o epruvetă încercată la întindere, apoi s-a considerat că limita la oboseală a epruvetei netede prelucrată fără ultrasunete este $\sigma_{-1} = 32$ daN/mm², a epruvetei cu concentrator prelucrată

la fel este $\sigma_{-1} = 28$ daN/mm^2. În continuare, s-au considerat cîte două curbe Wöhler luate de o parte și de alta a curbei corespunzătoare, trasate pentru fiecare epruvetă avînd $\Delta\sigma_{-1} = \pm 1$ daN/mm^2 peste, respectiv sub limita la oboseală corespunzătoare curbei inițiale (*B* și *C* din figurile *6* și *7*). S-a ales apoi cîte o epruvetă din fiecare tip din cele încercate la o solicitare care a crescut în trepte constante de 2 daN/mm^2 menținute un număr $n = \text{const.} = 2{,}5 \cdot 10^5$ cicluri, prima treaptă de solicitare fiind sub limita de oboseală presupusă. S-a procedat similar pentru epruvetele prelucrate cu ultrasunete, estimîndu-se $\sigma_{-1} = 57$ daN/mm^2, pentru epruvetele netede și $\sigma_{-1} = 50$ daN/mm^2, pentru cele cu concentrator. Valorile obținute pentru $\Sigma \frac{n}{N}$ luate de pe fiecare curbă Wöhler sînt date în tabelul 1. Indicii 1, 2, ... arată treapta de solicitare pentru care s-a determinat valoarea N. În figura 8, *a* și *b*, s-au dedus rezistențele la oboseală ținînd cont de rezultatele din tabelul 1.

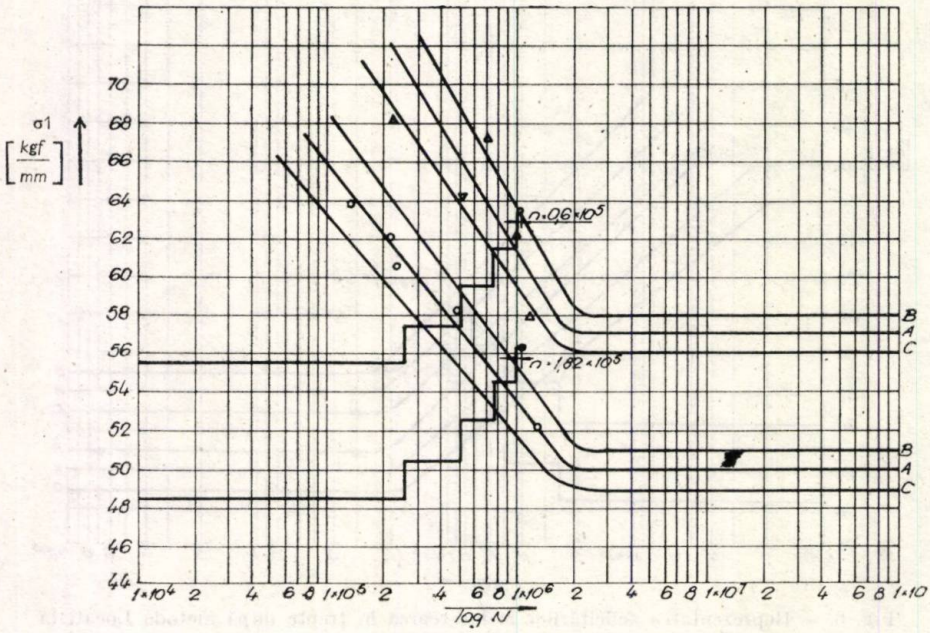


Fig. 7. — Reprezentarea solicitărilor la încercarea în trepte după metoda Locati la epruvete prelucrate cu ultrasunete.

Examinînd valorile obținute pentru rezistența la oboseală a celor patru tipuri de epuruvete prelucrate prin cele două procedee se constată că aportul energiei ultrasonore constă într-o creștere a rezistenței la oboseală cu 70 % la epruvetele netede, și cu 77 % la epruvetele cu concentrator, obținîndu-se în acest fel rezultate mult superioare metodelor obișnuite folosite pentru ridicarea rezistenței la oboseală.

De asemenea, se poate observa că executarea concentratorului de eforturi unitare conduce în ambele cazuri de prelucrare la un efect de con-

Tabelul 1

Rezultate experimentale obținute la încercarea la oboseală materialului OLC 45

Epruvetă	Curba	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	$\Sigma \frac{n}{N}$	Rezistența la oboseală
Epruvetă netedă prelucrată fără ultrasunete	A	∞	$1{,}95 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$0{,}72 \cdot 10^6$	$0{,}5 \cdot 10^6$	1,18540	32,25
	B	∞	∞	$1{,}7 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$0{,}78 \cdot 10^6$	0,69530	
	C	∞	$1{,}3 \cdot 10^6$	$0{,}81 \cdot 10^6$	$0{,}45 \cdot 10^6$	$0{,}31 \cdot 10^6$	2,04210	
Epruvetă cu concentrator prelucrată fără ultrasunete	A	∞	$1{,}6 \cdot 10^6$	$0{,}98 \cdot 10^6$	$0{,}54 \cdot 10^6$	$0{,}315 \cdot 10^6$	1,16430	28,2
	B	∞	∞	$1{,}4 \cdot 10^6$	$0{,}85 \cdot 10^6$	$0{,}35 \cdot 10^6$	0,68921	
	C	∞	$1{,}15 \cdot 10^6$	$0{,}61 \cdot 10^5$	$0{,}33 \cdot 10^6$	$0{,}19 \cdot 10^6$	1,89321	
Epruvetă netedă prelucrată cu ultrasunete	A	∞	$1{,}7 \cdot 10^6$	$1{,}25 \cdot 10^6$	$1{,}0 \cdot 10^6$	$0{,}73 \cdot 10^6$	0,67852	55,75
	B	∞	∞	$1{,}6 \cdot 10^6$	$1{,}3 \cdot 10^6$	$1{,}05 \cdot 10^6$	0,40731	
	C	∞	1,3 10	$1{,}0 \cdot 10^6$	$0{,}72 \cdot 10^6$	$0{,}53 \cdot 10^6$	0,90124	
Epruvetă cu concentrator prelucrată cu ultrasunete	A	∞	$1{,}7 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$0{,}83 \cdot 10^6$	$0{,}58 \cdot 10^6$	0,97320	49,9
	B	∞	∞	$1{,}6 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$0{,}82 \cdot 10^6$	0,58721	
	C	∞	$1{,}3 \cdot 10^6$	$0{,}9 \cdot 10^6$	$0{,}6 \cdot 10^6$	$0{,}4 \cdot 10^6$	1,34331	

centrare efectiv $\beta_e = 1{,}15$, ceea ce este într-o bună concordanță cu datele din literatura de specialitate.

După cîmpul de împrăștiere al valorilor obținute la încercarea epruvetelor netede, se poate trage concluzia că rezultatele sînt mai concludente, iar intervalul de încredere este mai bun decît în cazul epruvetelor cu concentrator. S-au făcut experimentări pe epruvete cu concentratori de tensiune nu numai pentru a localiza ruperea și a permite o cercetare microfractografică a ruperii în stratul deformat, ci și pentru a pune în evidență celelalte efecte ale energiei ultrasonore asupra stratului deformat (creșterea durității și micșorarea substanțială a microneregularităților). Ceea ce s-a remarcat însă în cazul unor epruvete cu concentrator prelucrat cu ultrasunete a fost scăderea considerabilă a coeficientului de sensibilitate la încrestare, care în unele cazuri a scăzut pînă aproape de zero, lucru ce demonstrează eficacitatea acțiunii energiei ultrasonore asupra rezistenței la oboseală. Faptul că unele epruvete supuse încercărilor nu s-au rupt în zona concentratorului de tensiune ci în altă parte, demonstrează posibilitatea utilizării acestui procedeu de durificare și netezire în cîmp ultrasonor la prelucrarea unor concentratori de natură tehnologică (canale, găuri,

renuri, îmbinări prin strîngere, urme de prelucrare mecanică etc.) cu o importantă micşorare a coeficientului de sensibilitate la încrestare. S-a constatat de asemenea că un rol foarte important asupra creşterii rezistenţei la oboseală îl are grosimea stratului ecruisat, dependenţa fiind aproximativ liniară.

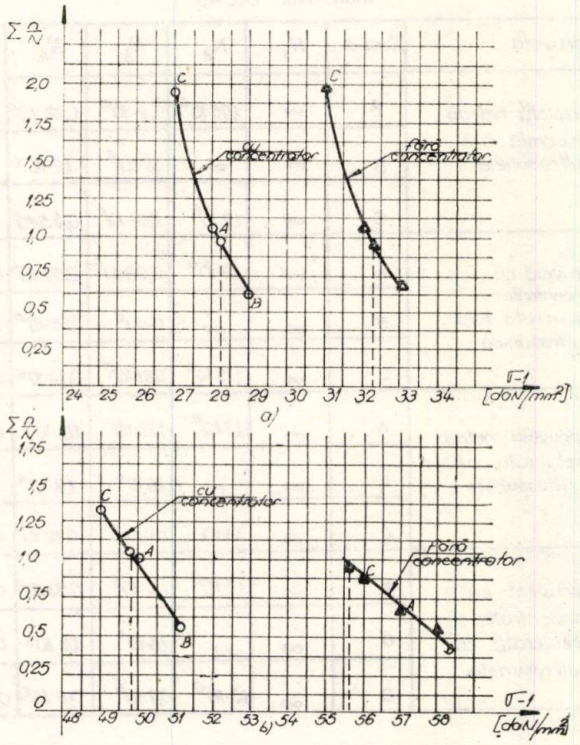


Fig. 8. — Determinarea rezistenţei la oboseală cu ajutorul curbei $\Sigma \frac{n}{N} = f(\sigma)$ după metoda Locati: *a* — epruvetă lucrată fără ultrasunete; *b* — epruvetă lucrată cu ultrasunete.

Observaţie. Încercările efectuate în domeniul solicitărilor mari (sensibil peste limita de oboseală) au dus la concluzia că durabilitatea creşte foarte mult (peste 100 ori) la epruvetele prelucrate cu ultrasunete, demonstrînd eficacitatea procedeului la prelucrarea unor organe de maşini care în timpul funcţionării sînt supuse la solicitări variabile mult peste limita de oboseală.

Rezultate asemănătoare au fost obţinute şi pentru epruvete confecţionate din aluminiu şi oţeluri aliate. Prelucrarea datelor experimentale s-a făcut absolut la fel ca şi în cazul epruvetelor din OLC 45, analizat mai sus.

Pentru a demonstra eficacitatea acţiunii energiei ultrasonore asupra creşterii rezistenţei la oboseală s-au făcut comparaţii cu rezultatele obţinute în literatura de specialitate [13], [10], [9], [12], la probe prelucrate prin diferite procedee. Din figura 9, se poate vedea creşterea rezistenţei la oboseală a unui oţel carbon de calitate, cu 60 %, faţă de prelucrarea prin rectificare, cu 30 %, faţă de epruveta tratată termic şi cu 10 %, faţă de epruveta rulată printr-un procedeu clasic. Rezultate asemănătoare s-au obţinut şi la oţelul 41MoC11 (fig. 10), unde creşterea rezistenţei la oboseală a fost de 35 % faţă de prelucrarea prin aşchiere, de 30 % faţă de proba tratată termic şi de 15 % faţă de proba durificată cu alice.

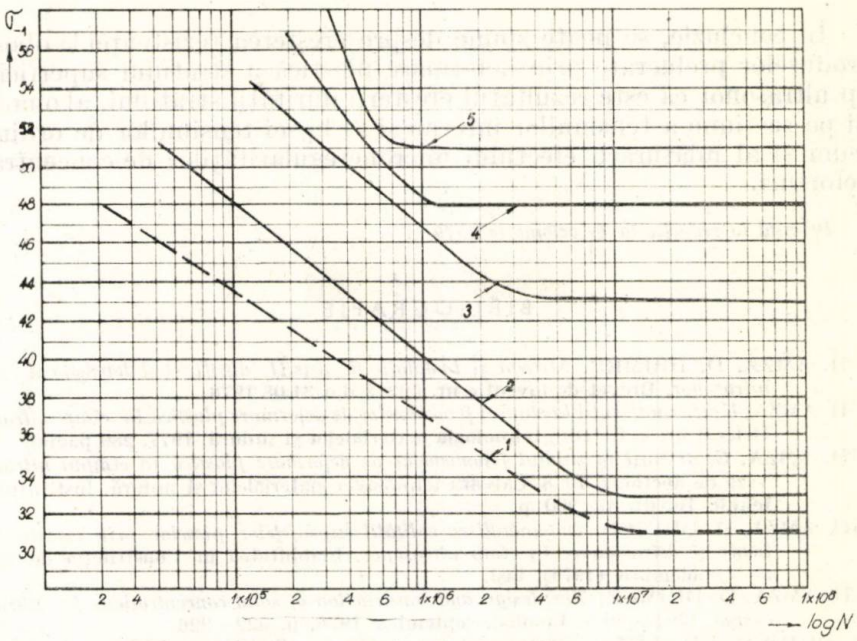


Fig. 9. — Efectul ultrasunetelor asupra rezistenţei la oboseală la OLC 45 : *1* — epruvetă acoperită cu un strat de Ni-Fe cu grosimea de 5 μ m ; *2* — epruvetă rectificată, neacoperită ; *3* — epruvetă în stare îmbunătăţită ; *4* — epruvetă netedă rulată ; *5* — epruvetă durificată şi netezită cu ultrasunete.

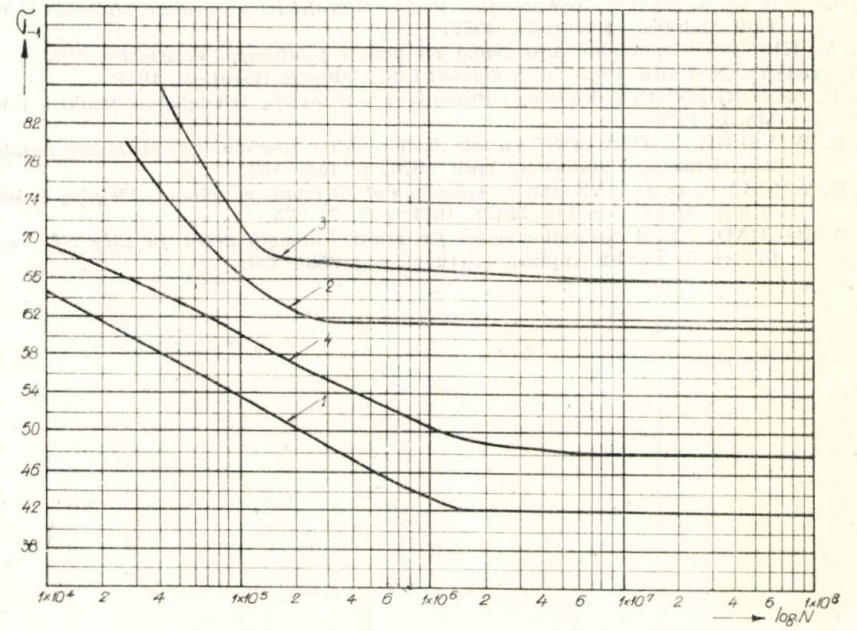


Fig. 10. — Efectul energiei ultrasonore asupra rezistenţei la oboseală la 41 MoC 11 : *1* — epruvetă rectificată ; *2* — epruvetă cu crestătură ($k_\sigma = 2{,}2$) rulată cu alice ; *3* — epruvetă durificată şi netezită cu ultrasunete ; *4* — epruvetă cu crestătură ($k_\sigma = 2{,}2$) nitrurată.

În concluzie, se poate spune despre creșterea rezistenței la oboseală a produselor prelucrate prin deformare plastică a stratului superficial în cîmp ultrasonor că este rezultatul creșterii durității stratului, al omogenizării pe secțiune a tensiunilor interne și al lipsei tensiunilor de ordinul I, precum și al înlăturării efectului microneregularităților de concentratori de eforturi.

Primită la redacție la 19 octombrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. GH. AMZA, D. DRIMER, *Metodă și instalație de netezit, durificat și detensionat în cîmp ultrasonor*, Brevet de invenție nr. 69218 din 31.08.1978.
2. GH. AMZA, *Unele contribuții la studiul fenomenelor de deformare plastică în cîmp ultrasonor*, Referat nr. 2, Catedra tehnologia materialelor și sudură, 1977, 289 pagini.
3. GH. AMZA, *Contribuții la studiul fenomenelor de deformare plastică în cîmpul ultrasonor*, Teză de doctorat, 1978. Catedra tehnologia materialelor și sudură, Institutul politehnic București, 200 p.
4. GH. AMZA, D. DRIMER, *Îmbunătățirea calității suprafețelor pieselor prin netezire, durificare și detensionare în cîmp ultrasonor*, Fiabilitatea în Construcția de Mașini, *2—4*, noiembrie (1974), Iași.
5. GH. AMZA, D. DRIMER, *The design and construction of solid concentrations for ultrasonic energy*, Ultrasonics, London, september 1976, p. 222—226.
6. D. DRIMER, GH. AMZA, *Mecanismul îmbunătățirii calității suprafețelor prelucrate prin deformare plastică a stratului superficial în cîmp ultrasonor*, Conferința „Dezvoltarea Industrială a Tehnologiilor neconvenționale", 22—25 nov. 1977, București.
7. I. GAVRILAȘ, A. MAIER, *Netezirea suprafețelor prin rulare*, Construcția de Mașini, *6—7*, (1966).
8. I. GAVRILAȘ, A. MAIER, *Netezirea și ecruisarea suprafețelor prin rulare, alunecare și lovire*, Edit. tehnică, București, 1972.
9. V. V. KLUBOVICI, *Vlianie ultrazvuka na proțess plasticeskoi deformații*, Minsk, 1963.
10. ȘT. NĂDĂȘAN și alții, *Oboseala metalelor*, Edit. tehnică, București, 1962.
11. V. P. SEVERDENKO, i drughie, *Ultrazvuki Plasticionisti*, Izdatelistvo Nauki i Tehniki, Minsk, 1976.
12. C. E. WINSPER, G. DAWSON, *An introduction to the machanics of oscillatory metalworking*, Metals and Materials, April 1970, p. 158—162.
13. C. E. WINSPER, D. H. SANSOME, *Aplication of ultrasonic vibration to the plug drawing of tube*, Metal Forming, **38(3)**, 1971, pag. 71—75.
14. T. WORIGRAD, ș. a., *A dislocation model for grain boundary peaks in pine c.f.c. metals*, Review de Phisics Applied, *6*, (1971), pag. 355—370.

INSTALAȚIE PENTRU MĂSURAREA MOBILITĂȚII ȘI IMPEDANȚEI MECANICE

de DAN-MIHAI ȘTEFĂNESCU
Institutul politehnic București
Laboratorul de cercetări pentru încercări de materiale

Se prezintă rezultatele cercetărilor întreprinse în vederea realizării unei instalații pentru măsurarea mobilității și impedanței mecanice a structurilor elastice.

1. INTRODUCERE

Dezvoltarea tehnologică neîntreruptă a dus, pe de o parte, la realizarea, pe baza unor materiale mai rezistente, a unor structuri mai ușoare, cu frecvențe proprii ridicate, iar, pe de altă parte, la creșterea turațiilor, deci a frecvențelor perturbatoare, la utilaje, ceea ce ridică noi probleme de rezonanță structurală.

Comportarea dinamică a mașinilor și structurilor este studiată tot mai profund și devine un factor important, de care se ține seama în proiectare. Problemele nu se mai pot rezolva neeconomic, printr-un coeficient de siguranță excesiv sau printr-o analiză efectuată abia după apariția defecțiunilor.

Conceptul de mobilitate/impedanță mecanică a apărut pe baza analogiilor electromecanice și s-a dezvoltat datorită : a) îmbunătățirii teoriei impedanței, care face posibilă evitarea utilizării sistemului de ecuații diferențiale clasice și folosirea unor metode de estimare mai rapide, bazate pe reprezentările grafice ale funcțiilor de transfer ; b) perfecționării consi-

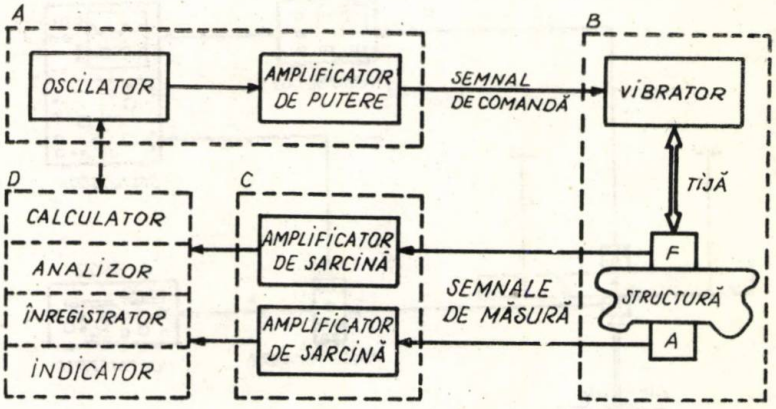


Fig. 1

derabile a echipamentelor de excitare și măsurare a vibrațiilor, precum și a celor de analiză a datelor experimentale : c) acceptării acestui concept de către inginerii mecanici, fără a se mai recurge la conversia sistemelor mecanice în circuitele electrice analoge [11].

Studiul mobilității și al inversei acesteia, impedanța, solicită cunoștințe complexe de mecanică și electronică, îmbinarea strînsă a aspectelor

teoretice cu cele experimentale. Consideraţii privind definirea acestor noţiuni, din ce în ce mai răspîndite în tehnica modernă, analiza comparată a metodelor de măsurare, precum şi marele număr de aplicaţii, sînt prezentate pe larg în lucrarea [14].

Schema de principiu a unei instalaţii experimentale [6] este reprezentată în figura 1. Se pot recunoaşte cele patru funcţiuni importante [15]: a) generarea forţei, cu ajutorul unui oscilator de audiofrecvenţă, care furnizează un semnal de comandă [8], printr-un amplificator de putere, unui vibrator electromecanic sau electrohidraulic; b) interfaţa cu structura, căreia prin intermediul unui captor de forţă, i se aplică solicitarea mecanică, comandată în frecvenţă, răspunsul fiind detectat şi măsurat de un captor de vibraţii; c) prelucrarea semnalelor de la captoare, prin amplificare şi filtrare corespunzătoare; d) analiza datelor şi afişarea rezultatelor.

Aparatura existentă la Catedra de rezistenţa materialelor din Institutul politehnic Bucureşti permite utilizarea metodei staţionare de determinare a mobilităţii, metodă care, deşi necesită un timp de lucru mai îndelungat, este cea mai exactă şi, în acelaşi timp, cea mai apropiată de esenţa fenomenului.

2. INSTALAŢIA EXPERIMENTALĂ

Alegerea celor mai adecvate componente ale sistemului de măsură se face în funcţie de o serie de factori tehnico-economici, analizaţi pe larg

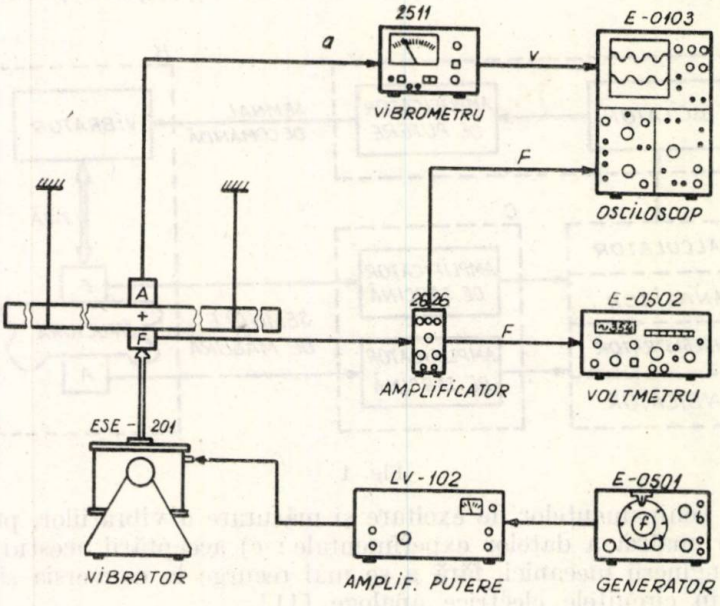


Fig. 2

în lucrarea [4]. Schema-bloc a montajului experimental (fig. 2) este alcătuită din următoarele elemente:

2.1. Generatorul de semnal, care furnizează un semnal sinusoidal cu amplitudine și frecvență reglabile în trepte sau continuu. Folosirea oscilatorului electronic pentru producerea semnalului de intrare permite menținerea unui grad înalt de precizie și stabilitate a frecvenței. Se utilizează generatorul E—0501, produs la I.E.M.I. [17].

2.2. Amplificatorul de putere, care reglează nivelul de excitație necesar. Nu se cer condiții deosebite din punct de vedere al performanțelor, ci încadrarea, împreună cu vibratorul, în criteriile : a) acoperirea domeniului de frecvențe necesar ; b) generarea forțelor la amplitudinea dorită, pentru a da naștere la mișcări măsurabile ; c) evitarea producerii armonicelor excesive sau zgomotelor.

Se preferă amplificatoarelor de putere speciale, care dau la ieșire semnale cu intensitate de amplitudine constantă, pentru ca vibratorul electrodinamic să producă o forță de amplitudine constantă.

Aparatul avut la dispoziție, tip LV-102, de la Metra Mess- und Frequenztechnik Radebeul, furnizează semnale cu tensiune de amplitudine constantă, ceea ce impune necesitatea măsurării forței aplicate, deoarece aceasta depinde de frecvență, amplitudinea ei scăzînd pronunțat la frecvența de rezonanță a sistemului excitat.

2.3. Vibratorul este de tip electrodinamic, forța fiind produsă prin interacțiunea dintre curentul sinusoidal care parcurge bobina și cîmpul magnetic din întrefier. Este un excitator de vibrații cu acționare directă : suportul bobinei mobile este fixat de structura încercată, iar corpul vibratorului se așează pe o masă mare, care absoarbe forțele de reacțiune, intercalîndu-se o suspensie elastică (strat de cauciuc spongios), în scopul eliminării influenței rezonanței corpului vibratorului pe elementul de rezemare.

Acest mod de aplicare, tipic pentru măsurările de mobilitate, realizează adaptarea impedanțelor mecanice a structurii încercate și a vibratorului, încadrîndu-se în categoria „vibrator mic care excită o structură mare". Trebuie satisfăcute următoarele condiții : a) forma de undă a forței de excitație să nu fie distorsionată ; b) mișcările structurii să nu producă o reacție asupra forței de excitație : c) să nu se modifice caracteristicile dinamice ale sistemului excitat, prin adăugarea de masă, rigiditate sau amortizare ; d) amplitudinea și frecvența pe lanțul de generare a forței să fie reglabile independent, în domeniile de lucru necesare : forțe relativ mici (sub 3 000 daN) și frecvențe relativ înalte (pînă la 20 kHz).

Se folosește un generator de vibrații de translație, tip ESE—201, fabricat de VEB Schwingungstechnik Vibr und Akustik-WIB-Dresda.

2.4. Captorul de forță este destinat măsurării mărimii de intrare în sistem, necesitatea sa fiind impusă de faptul că forța aplicată structurii diferă de cea produsă de vibrator. Captorul se intercalează între excitator și probă, cît mai aproape de aceasta.

Cel mai indicat este captorul bazat pe variația unei mărimi electrice [7]. Se preferă cel de tip generator, bazat pe efectul piezoelectric al cuarțului, care produce o sarcină electrică proporțională cu forța de compresiune, sarcină a cărei variație se măsoară electronic.

Captorul piezoelectric prezintă o serie de avantaje : a) dimensiunile mici, facilitînd măsurarea cît mai aproape de punctul de aplicare a forței, căci la frecvențe mari puține structuri pot fi considerate suficient

de rigide; b) greutatea redusă (se permite să aibă maximum 10% din greutatea piesei pe care se aplică); c) masa mică a părții captorului situate deasupra elementului piezoelectric, ceea ce permite efectuarea măsurărilor și pe structuri de joasă impedanță; d) lipsa părților în mișcare relativă, deci evitarea amortizării, care ar introduce schimbări de fază; e) sensibilitatea și, implicit, rezoluția ridicate; f) liniaritatea foarte bună; g) răspunsul în frecvență pe tot domeniul de interes, frecvența limită superioară putînd ajunge pînă la o cincime din cea proprie a captorului, în scopul evitării rezonanțelor false; h) stabilitatea pe termen lung, obținută prin folosirea unor materiale îmbătrînite artificial.

Dezavantajele constau în sensibilitatea transversală ridicată (se admite maximum 5% față de cea principală), precum și în sensibilitatea la diverși factori ambianți (gradienți termici, umiditate, presiune acustică, cîmpuri magnetice și electrostatice, radiații), care trebuie cunoscută. Se impun măsuri corespunzătoare pentru reducerea la minimum a erorilor de măsurare, o atenție deosebită acordîndu-se frecvențelor joase și nivelelor mici de semnal.

Captorul de forță disponibil este de tip 8200-Bruel & Kjaer [16].

2.5. Captorul de accelerație măsoară mărimea de ieșire din sistem. Mișcarea este cel mai bine sesizată de accelerometru, datorită fiabilității sale și mărimii domeniului dinamic, definit ca raport, exprimat în decibeli, între amplitudinea maximă și cea minimă ale semnalelor ce pot fi măsurate.

Se utilizează accelerometrul 4370-Bruel & Kjaer, de tip Delta (plăcuțele piezoelectrice sînt lipite pe fețele laterale ale unei prisme triunghiulare, fiind solicitate la forfecare), deci un captor cu traductori electromecanici bilaterali liniari.

În locul unui accelerometru separat se poate folosi un „cap de impedanță", care reunește în aceeași montură captoarele piezoelectrice de forță și accelerație, avînd și alte avantaje: a) dimensiunile mai mici, comparativ cu cele două captoare separate, satisfăcînd mai ușor condiția de a măsura forța și accelerația în același punct și fără erori de fază; b) masa totală mai redusă; c) ușurința de montare pe structură [3]. Trebuie observat că, deși captoarele mici interferă mai puțin, sensibilitatea lor este mai scăzută. În plus, accelerometrul din capul de impedanță trebuie etalonat prin comparație cu accelerometrul 4370—B & K, care este echipament standard pentru indicatorul de vibrații folosit. Se poate lucra cu capul de impedanță tip 8001 de la Bruel & Kjaer sau cu oricare altul disponibil (v. tab.1).

2.6. Amplificatorul de sarcină permite conectarea captorului piezoelectric la un aparat indicator, determinînd nivelul semnalului de excitație.

Pentru captorul de forță este potrivit amplificatorul 2626 de la Bruel & Kjaer, care are următoarele facilități și performanțe: a) impedanța de intrare ridicată și cea de ieșire coborîtă, adică adaptarea de impedanță cu captorul și instrumentul, între care este legat în schema electronică; b) afișarea cu trei cifre, în pC/g, a sensibilității captorului, deci a reglajului intrării; c) citirea directă a sensibilității amplificatorului, în V/g și submultipli, adică a nivelului normalizat al ieșirii; d) acoperirea unui larg domeniu dinamic (80dB) și de frecvență (0,3Hz la 100kHz); e) zgomotul

Tabelul 1

FIRMA	GENERATOR	AMPLIFICATOR DE PUTERE	VIBRATOR	CAPTOR DE FORȚĂ	ACCELEROMETRU	CAP DE IMPEDANȚĂ	AMPLIFICATOR DE SARCINĂ	VIBROMETRU	VOLTMETRU	FAZMETRU	OSCILOSCOP	CORELATOR	ANALIZOR FOURIER	TRANSFERMETRU	ANALIZOR DE IMPEDANȚĂ	INREGISTRATOR DE NIVEL	INREGISTRATOR XY
B & K INSTRUMENTS	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X						X	
BELL & HOWELL					X		X			X							
BENTLY NEVADA CORP.					X			X		X							
ELSYTEC												X	X	X			
EMR TELEMETRY-WESTON													X	X	X		
ENDEVCO				X	X	X	X	X									
GENERAL ELECTRIC	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
GENERAL RADIO	X	X			X			X	X	X		X	X	X		X	X
HEWLETT-PACKARD	X		X						X		X			X			X
LING ELECTRONICS	X	X	X		X		X					X	X	X			
NICOLET SCIENTIFIC												X	X	X	X		
PCB PIEZOTRONICS				X	X	X	X	X									
PRODERA	X	X	X						X	X	X		X		X		X
ROCKLAND SYSTEMS												X	X	X	X		
SPECTRAL DYNAMICS					X			X			X	X	X	X	X		
TEKTRONIX		X				X					X	X	X	X		X	X
UNIGON INDUSTRIES												X	X	X	X		
VIBRATION INSTRUMENTS	X						X	X		X				X	X		
ZONIC TECHNICAL LAB.	X	X	X	X								X	X	X	X		
I.E.M.I.	X							X	X		X						
METRA + WIB.	X	X	X		X			X	X		X					X	X
ORION E.M.G.	X								X		X						X
TESLA	X								X		X						

intern redus (se recomandă folosirea cablurilor scurte), ceea ce asigură rezoluţie ridicată; f) revenire rapidă, dacă se măsoară şocuri; g) selectarea limitei inferioare şi superioare de frecvenţă, pentru a reduce influenţa semnalelor perturbatoare din afara benzii de măsurare; h) ieşirea directă sau prin transformator, ultima fiind utilă în cazul buclelor parazite la pămînt sau atunci cînd amplificatorul joacă rol de condiţioner de semnal în bucla de menţinere automată a nivelului constant al forţei.

2.7. Vibrometrul indică nivelul semnalului de răspuns al structurii la excitaţia aplicată.

Pentru captorul piezoelectric de acceleraţie 4370-B K cel mai adecvat este instrumentul pentru măsurarea vibraţiilor 2511 de la Bruel & Kjaer, ale cărui caracteristici tehnice principale sînt: a) preamplificatorul de sarcină înglobat, care converteşte impedanţa ridicată a accelerometrului la o valoare mai scăzută, adaptînd-o circuitului electronic care urmează; b) citirea analogică directă, fără altă etalonare (accelerometrul 4370—B & K este accesoriu standard al indicatorului de vibraţii), asigurîndu-se precizia globală de măsurare de $\pm 5\%$; c) conversia acceleraţie-viteză-deplasare, prin simplă sau dublă integrare, cu păstrarea caracteristicii reale de fază; d) indicarea valorilor eficace sau „vîrf la vîrf", cu opţiunea reţinerii maximului; e) gama dinamică mare (100 dB); f) posibilitatea analizei de frecvenţă, asociat cu filtrul trece-bandă acordabil 1621—B & K, care asigură şi puritatea armonică a semnalelor, indispensabilă pentru măsurarea precisă a defazajelor; g) ieşirile diverse — pentru osciloscop şi înregistrator magnetic sau pe hîrtie—, cu specificarea nivelelor maxime şi a impedanţelor necesare.

2.8. Voltmetrul numeric facilitează cunoaşterea mărimii excitaţiei aplicate structurii, după etalonarea canalului de măsurare a forţei.

Se foloseşte Versatesterul E-0502, din producţia indigenă [17], care afişează numeric valoarea eficace a tensiunii sinusoidale, cu o eroare maximă de $\pm 2{,}5\%$. Aparatul este multifuncţional, putînd juca rol de generator de semnale sinusoidale cu distorsiuni reduse (0,1 %) şi reglare fină a frecvenţei (0,01 %) şi amplitudinii (0,1 %) sau de frecvenţmetru digital cu rezoluţia maximă de 0,1Hz.

2.9. Osciloscopul permite vizualizarea continuă a semnalelor de pe canalele de măsurare a forţei şi vitezei. Prin urmărirea permanentă a formei de undă a semnalelor, care trebuie să fie perfect sinusoidale, se evită nivelele de excitaţie prea mici (afectate de zgomote) sau prea mari (sinusoidă „retezată").

În lipsa fazmetrului, osciloscopul poate sluji şi la determinarea unghiului de fază dintre forţă şi viteză, după verificarea prealabilă a defazajului între canale, în condiţiile ataşării unei mase rigide în locul structurii elastice. Controlul fazei se poate face cercetînd cele două semnale separate, poziţionate unul sub altul ori suprapuse pe ecranul osciloscopului, sau compunînd cele două oscilaţii sincrone, de amplitudini diferite, aplicate la intrările X şi Y, într-o figură Lissajous.

Se utilizează osciloscopul de laborator E-0103, de la I.E.M.I., avînd două canale şi eroarea intrinsecă, după etalonare cu semnal de la calibratorul intern, de $\pm 3\%$.

La nevoie, montajul experimental se poate completa cu elemente de prelucrare şi afişare automată a datelor, în diverse variante: buclă de

reglare a nivelului constant al forței și înregistrator pe hîrtie gradată în nvel și în frecvență [16], analizor digital al răspunsului în frecvență (transfeirmetru) [18] sau analizor de impedanță mecanică [9].

De asemenea, se poate lucra cu instalația Prodera pentru producerea și măsurarea vibrațiilor [1], aflată în dotarea Laboratorului de rezistența materialelor din Institutul politehnic București. Pentru structuri complexe, cum sînt cele aerospațiale, se poate folosi o metodă de excitație în mai multe puncte simultan, scurtîndu-se considerabil durata testării.

Există o multitudine de posibilități de realizare a schemei electronice de măsurare a mobilității, folosind aparate și captoare românești sau străine [19] (v. tab. 1). Pentru alcătuirea instalației experimentale se va urmări compatibilitatea componentelor alese, precum și asigurarea performanțelor cerute, pe baza specificațiilor tehnice elaborate de firmele producătoare.

3. METODOLOGIA DE MĂSURARE

3.1 ETALONAREA INSTALAȚIEI

Există o serie de metode de etalonare a captoarelor de vibrații [7]. Accelerometrul 4370-B & K, fiind captor standard pentru vibratorul 2511, nu se impune etalonarea acestuia, ci numai verificarea că sensibilitatea sa este constantă în intervalul de frecvențe necesar [2], folosind un generator armonic cu modulație de frecvență sau procedînd la comutarea manuală a acesteia.

Etalonarea canalului de măsurare a forței se face printr-o metodă dinamică „directă" : vibratorul electrodinamic imprimă unui corp cilindric din oțel, cu masă m cunoscută, o accelerație a, măsurată cu accelerometrul verifiat anterior, comparîndu-se forța calculată cu relația

$$F = m \cdot a \ [N], \qquad (1)$$

cu indicația corespunzătoare a voltmetrului electronic. Așazarea celor două captoare trebuie să reflecte condițiile de montaj ale acestora pe structura ce se va experimenta, aparatura folosită fiind cea din figura 2.

Pentru determinarea sensibilității exprimată ca tensiune a captorului de forță,

$$S_F = \frac{U_F}{F}\left[\frac{V}{N}\right], \qquad (2)$$

se folosește montajul din figura 3, în care m_1 este masa greutății adiționale, m_a—masa accelerometrului, m_c—masa părții captorului de forță situată deasupra traduc-

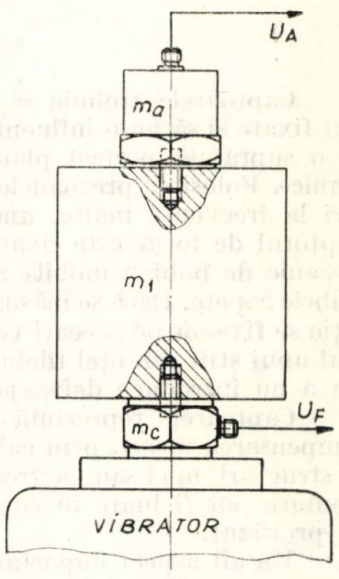


Fig. 3

torului. Cunoscînd aceste mase (m_1 prin cîntărire, m_a şi m_c din specificaţiile firmelor producătoare), este suficientă o sigură determinare, semnalul de ieşire al captorului fiind

$$U_{F_1} = S_F \cdot (m_1 + m_c + m_a) \cdot a_1. \tag{3}$$

Precizia sporeşte dacă se face o determinare suplimentară, căci la m_c şi m_a mai intervine şi masa proprie a cablurilor. Se înlocuieşte greutatea adiţională cu alta mai mare (m_2), dar fără a se depăşi domeniul liniar de lucru al vibratorului. Menţinînd constantă frecvenţa (f_e), se reglează excitaţia pentru a se obţine aceeaşi acceleraţie a_1. În acest caz, semnalul de ieşire al captorului de forţă este

$$U_{F_2} = S_F \cdot (m_2 + m_c + m_a) \cdot a_1. \tag{4}$$

Scăzînd membru cu membru ultimele două relaţii, rezultă

$$S_F = \frac{U_{F_2} - U_{F_1}}{(m_2 - m_1) \cdot a_1}. \tag{5}$$

Aplicaţie. Fie $m_1 = 0{,}5$ kg; $m_2 = 1$ kg; $f_e = 200$ Hz; $a_1 = 1$g. Se citesc: $U_{F_1} = 615$ mV şi $U_{F_2} = 1150$ mV. Rezultă: $S_F = 110{,}097$ mV/N şi în acest fel canalul de măsurare a forţei este etalonat direct în newtoni.

O alternativă constă în ajustarea reglajului de sensibilitate al amplificatorului de sarcină la valoarea necesară, astfel încît să se citească direct nivelul ieşirii pe scala de 100 mV/N, deci nu prin intermediul unei constante calculate.

3.2 PROBLEME MECANICE

Captoarele trebuie să urmărească fidel mişcarea structurii pe care sînt fixate şi să nu o influenţeze apreciabil. Cea mai bună montare se face pe o suprafaţă perfect plană şi curată, respectînd indicaţiile din fişele tehnice. Folosirea prezoanelor de oţel este adecvată mai ales pentru măsurări la frecvenţe înalte, unde precizia depinde de rigiditatea prinderii. Captorul de forţă este fixat prin prezon de structura studiată şi ataşat mecanic de bobina mobilă a vibratorului, de obicei cu o tijă filetată la ambele capete. Dacă se măsoară mobilitatea punctuală, captorul de acceleraţie se fixează pe aceeaşi verticală, deasupra structurii, tot prin intermediul unui ştift din oţel filetat. Prinderile trebuie să fie lipsite de joc, pentru a nu introduce defazaje suplimentare în sistem.

Captoarele reprezintă o masă adăugată atructurii, ceea ce impune compensarea masei, prin calcul sau cu circuite electronice [12], mai ales la structuri mici sau cu frecvenţe proprii apropiate. Deşi masele suplimentare pot fi luate în considerare, rezonanţele nedorite sînt mai greu de prevăzut.

Un alt aspect important îl constituie asigurarea unei legături mecanice perfecte între vibrator şi structură. Excitatorul de vibraţii trebuie

astfel așezat încît forța să fie aplicată doar într-un punct al structurii și să nu se transmită prin suport (se folosește un strat de cauciuc spongios). Aplicarea forței pe direcția dorită este dificil de realizat în practică, mai ales la structuri nesimetrice. Aplicarea forței se face printr-o tijă de oțel, cu dimensunile optime Φ 1mm × 25 mm. Tija este rigidă axial, dar flexibilă la mișcările laterale, protejînd astfel suspensia vibratorului la solicitări transversale față de direcția dorită. Totodată, tija permite rotirea locală a structurii, pentru a nu da naștere unui cuplu suplimentar.

În concluzie, trebuie să se asigure condiții pentru ca ceea ce se măsoară să fie chiar mobilitatea structurii, neafectată de montarea captoarelor, de legătura mecanică spre vibrator, de modul de așezare sau suspendare a structurii. De aici rezultă atenția deosebită care trebuie acordată detaliilor practice ale implementării metodei experimentale [5].

3.3 PROBLEME ELECTRICE

Realizarea schemei electronice (fig. 2), care să măsoare mobilitatea cu precizie ridicată, impune verificarea prealabilă a performanțelor componentelor și interconectarea lor îngrijită.

Fiecare componentă a lanțului de măsurare, de la oscilator pînă la analizor, generază zgomot. În apropierea rezonanțelor, forțele sînt foarte mici, în timp ce la antirezonanțe aproape că nu există răspuns, astfel încît, pentru aceste nivele infime, se cere ca zgomotul să fie foarte mic, cerință îndeplinită numai de instrumentația de calitate. Se recomandă folosirea cablurilor originale ale captoarelor, proiectate pentru zgomot minim, cît mai scurte (1,5 m) și fixate pe structură. O altă sursă de zgomot o constituie „buclele la masă", care se elimină punînd instalația la masă într-un singur punct, de preferință lîngă aparatul de măsură. Se folosesc preamplificatoare de sarcină cu intrări flotante sau se izolează din punct de vedere electric captoarele față de structura metalică, prin intermediul unor foițe de mică.

Structura poate răspunde și la micile componente ale armonicilor superioare introduse de vibrator, ceea ce impune filtrarea corespunzătoare. De asemenea, sînt necesare măsuri pentru reducerea influenței factorilor ambianți.

3.4 MODUL DE LUCRU

Se utilizează metoda staționară, repetîndu-se, pentru fiecare punct al curbei mobilității. următorul ciclu de operații: a) alegerea frecvenței oscilatorului și reglarea corespunzătoare a filtrelor, așteptînd pînă se realizează un regim staționar de vibrații; b) reglarea nivelului excitației, astfel încît pe canalele de măsurare a forței și vitezei să se obțină semnale neafectate de zgomot sau nedistorsionate (se alege nivelul optim de la caz la caz, nu unul constant pentru tot domeniul frecvențelor, ca în varianta Prodera); c) măsurarea nivelelor semnalelor, pentru citirea electronică a vitezei și forței impunîndu-se folosirea aceluiași fel de valori, de preferință eficace; d) calcularea raportului celor două mărimi, ținînd seama de eta-

lonarea efectuată ; e) tabelarea datelor experimentale şi prezentarea lor grafică.

Frecvenţele de lucru sînt conforme caroiajului logaritmic de pe hîrtia standard pentru înregistrarea rezultatelor experimentale, alegîndu-se pasul mai mic în jurul rezonanţelor şi antirezonanţelor.

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

Instalaţia experimentală şi metoda de măsurare adoptată se verifică prin determinarea unui număr cît mai mare de frecvenţe proprii de vibraţie transversală ale unei bare libere la capete [13]. S-a ales o bară dreaptă, deoarece constituie cel mai simplu exemplu de sistem continuu, al cărui studiu poate fi făcut integral şi pe cale teoretică, contribuind la verificarea rezultatelor experimentale.

Se testează mobilitatea barei prismatice suspendate în poziţie orizontală, în punctele nodale ale primului mod. Fiind necesară o suspensie elastică moale, astfel încît frecvenţa sa proprie de corp rigid pe arcuri să fie mult mai joasă decît cea a primului mod de vibraţie de încovoiere, se aleg corzi din material plastic.

Excitaţia forţată se aplică la mijlocul barei, pe direcţia axei verticale de simetrie. Datorită simetriei, în punctul de excitaţie bara are o mişcare de translaţie, astfel încît se poate folosi metoda convenţională de măsurare a mobilităţii, aplicabilă sistemelor cu un singur grad de libertate.

Determinarea mobilităţii se face prin metoda „punct cu punct", citind, pentru fiecare valoare a frecvenţei semnalului produs de generator, valorile corespunzătoare ale forţei şi vitezei. Se calculează mobilitatea punctuală de translaţie (M_e), raportînd viteza la forţă şi, luînd ca valoare de referinţă $M_0 = 1\text{m/s/N}$, se exprimă în decibeli ($20 \log M_e/M_0$).

Pentru comparaţie, se determină şi analitic mobilitatea punctuală la mijlocul barei, folosind relaţia de calcul

$$M_c = \frac{\pi f}{EI_z\gamma^3} \frac{1 + \cos\frac{\gamma l}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{\gamma l}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\gamma l}{2} \cdot \sin\frac{\gamma l}{2} + \cos\frac{\gamma l}{2} \cdot \operatorname{sh}\frac{\gamma l}{2}}, \tag{6}$$

unde

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{4\pi^2 f^2 \cdot \rho \cdot A}{E \cdot I_z}} \tag{7}$$

Frecvenţele de rezonanţă şi antirezonanţă alternează, avînd expresiile

$$f_{(A)R} = \frac{\gamma^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E \cdot I_z}{\rho \cdot A}}. \tag{8}$$

Utilizînd următoarele valori numerice: $l = 2{,}61$ m; $A = 21{,}65 \times 10^{-4}$ m^2; $I_z = 37{,}5 \times 10^{-8}$ m^4; $E = 21 \times 10^{10}$ N/m^2; $\rho = 7{,}85$ kg/m^3, rezultă: $f_{A_1} = 22{,}37$ Hz; $f_{R_1} = 35{,}58$ Hz; $f_{A_2} = 140{,}17$ Hz; $f_{R_2} = 192{,}3$Hz; $f_{A_3} = 392{,}51$ Hz; $f_{R_3} = 474{,}78$ Hz.

Valorile mobilității, calculate la diferite frecvențe, se trec pe aceeași diagramă (fig. 4) cu cele obținute experimental, observîndu-se o bună concordanță a rezultatelor, mai ales în domeniul 25—400 Hz.

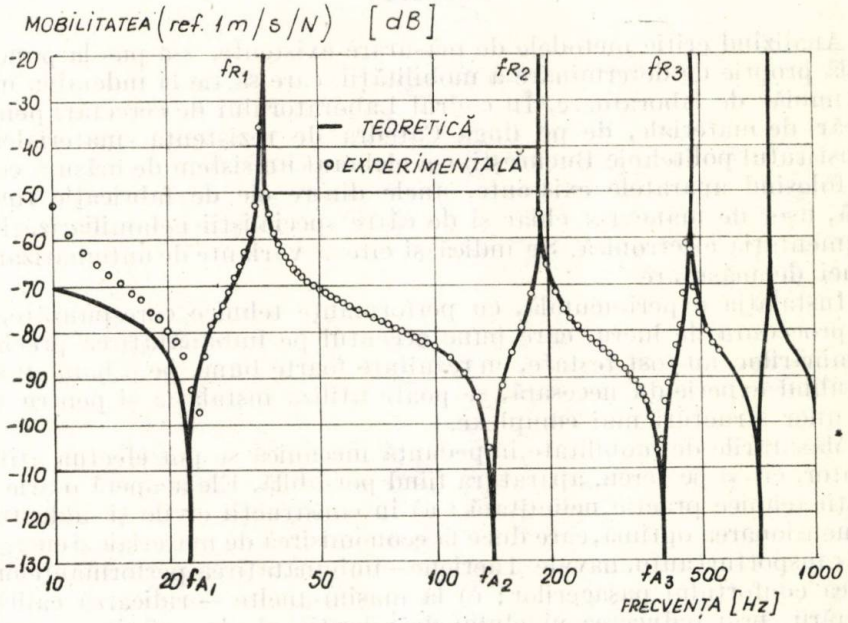


Fig. 4

Analiza diagramelor conduce la următoarele interpretări:

4.1. Curba teoretică, trasată pe baza unor funcții trigonometrice și hiperbolice, este asimptotică în jurul rezonanțelor și antirezonanțelor, în timp ce experimental se obțin valori finite, datorită amortizării inerente din sistem.

4.2. Maximele de pe diagramă indică rezonanțe, adică, aplicînd forțe oricît de mici, se obțin viteze însemnate, ceea ce constituie o proprietate a întregului sistem (exceptînd nodurile).

Minimele indică antirezonanțe, în sensul că ar fi necesare forțe foarte mari pentru a produce mișcări sesizabile, proprietatea depinzînd și de punctul de aplicație al forței.

4.3. Cunoscînd că o configurație suspendată perfect este greu de realizat, fără a afecta forma răspunsului, mai ales la poziția primei antirezonanțe, se recomandă o poziționare cît mai precisă, pentru a reduce neconcordanța dintre rezultatele experimentale și cele teoretice.

4.4. Masa calculată a barei este de 44,36 kg. Masa adăugată este de 61 g (54,2 g accelerometrul, 3g partea din captorul de forță aflată deasupra

elementului sensibil şi circa 4 g cele două ştifturi de montare), ceea ce reprezintă sub 0,14% din cea a barei.

Forţa de inerţie corespunzătoare masei adiţionale este foarte mică, dar, în vecinătatea rezonanţelor, poate deveni comparabilă cu forţa efectiv aplicată, în special la structurile uşoare, slab amortizate, producînd o deplasare aparaentă a frecvenţelor de rezonanţă spre valori inferioare.

5. CONCLUZII

Analizînd critic metodele de măsurare existente, s-a pus la punct o metodă proprie de determinare a mobilităţii, care să fie la îndemîna unui mare număr de laboratoare. În cadrul Laboratorului de cercetări pentru încercări de materiale, de pe lîngă Catedra de rezistenţa materialelor. din Institutul politehnic Bucureşti, s-a elaborat un sistem de măsură complet, folosind aparatele existente, unele dintre ele de fabricaţie românească, uşor de manevrat chiar şi de către specialiştii nefamiliarizaţi cu instrumentaţia electronică. Se indică şi cîteva variante de automatizare a schemei de măsurare.

Instalaţia experimentală, cu performanţe tehnice corespunzătoare, ca şi procedura de lucru, care pune accentul pe îmbunătăţirea preciziei determinărilor, au fost testate, cu rezultate foarte bune, pe o bară etalon. Acumulînd experienţa necesară, se poate utiliza instalaţia şi pentru testarea unor structuri mai complexe.

Măsurările de mobilitate/impedanţă mecanică se pot efectua atît în laborator, cît şi pe teren, aparatura fiind portabilă. Ele acoperă o arie de aplicaţii tehnice practic nelimitată : a) în construcţii civile şi industrale — dimensionarea optimă, care duce la economisirea de materiale şi energie ; b) în transporturi auto, navale şi aeriene — îmbunătăţirea performanţelor şi sporirea confortului pasagerilor ; c) la maşini-unelte — ridicarea calităţii prelucrării, prin reducerea nivelului de vibraţii ; d) la utilaje — mărirea rezistenţei la solicitări dinamice şi multe altele [10], [14].

Primită la redacţie la 30 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. J. A. BATICLE (PRODERA), *A Fully Computerized System to Find out Structures Mathematical Models*, Symp. on Exp. Techn. in Appl. Mech., 15—20, Inst. politehnic Bucureşti, 1—3 nov, 1972.,
2. R. R. BOUCHE, *Instruments and Methods for Measuring Mechanical Impedance*, Endevco Tech. Paper 203, 1961.
3. W. BRADLEY, *Mechanical Impedance Testing*, Endevco Tech. Paper 102, Rev. 1/64.
4. GH. BUZDUGAN., E. MIHĂILESCU, M. RADEŞ, *Măsurarea vibraţiilor*, Bucureşti, Edit. Academiei R. S. România, 1979.
5. GH. BUZDUGAN, M. RADEŞ, D. M. ŞTEFĂNESCU, M. GĂVAN, *Metodologie de măsurare a vibraţiilor la utilaje pentru construcţii*, Contract de cercetare ştiinţifică nr. 247—L. C. I. M., Inst. politehnic Bucureşti, 1980.
6. D. J. EWINS, *The Whys and Wherefores of Mechanical Impedance Measurements*, Solartron Dynamic Analysis Monograph, 1979.
7. C. M. HARRIS, C. E. CREDE, *Şocuri şi vibraţii* (trad. din limba engleză), vol. I cap. 10 (Impedanţa şi mobilitatea mecanică) şi cap. 18 (Etalonarea captoarelor), Bucureşti, Edit. tehnică, 1968.

8. K. D. JAHN, *Verfahren zur Schwingungserregung bei der Messung mechanischer Impedanzen*, Mess. + Prüf., *3*, 126—130 (1977).
9. A. C. KELLER, *Fundamentals for Mechanical Impedance Analysis*, Spectral Dynamics Corp. Tech. Publ. M-2, 6—67.
10. H. P. OLESEN, R. B. RANDALL, *A Guide to Mechanical Impedance and Structural Response Techniques*, Brüel & Kjaer Appl. Note no. 17—179.
11. H. P. OLESEN, *Measurement of the Dynamic Properties of Materials and Structures*, Brüel. & Kjaer Appl. Note no. 17—180.
12. M. RADEȘ, *Compensarea maselor la măsurarea impedanțelor mecanice*, St. cerc. mec. apl, **35**, *4*, 547—568 (1976).
13. M. RADEȘ, *Studiul vibrațiilor transversale ale unei bare prismatice*, Lucrări de laborator de vibrații mecanice, 86—100, Inst. politehnic București, 1979.
14. D. M. ȘTEFĂNESCU, *Măsurarea mobilității și impodanței mecanice: definiții, metode, aplicații*, Lucrare nepublicată, (1981).
15. R. G. WHITE, *Techniques and Instrumentation for the Transient Measurement of Structural Frequency Response*, Symp. on Exp. Techn. in Appl. Mech., 35 — 48, Inst. politehnic București, 1—3 nov. 1972.
16. * * * *Master Catalogue*, 19, 137—156, 165—178, 273—278, Brüel & Kjaer Electronic Instruments, 1977.
17. * * * *Cărți tehnice ale aparatelor*, I. E. M. I. București (1979).
18. * * * *A Short Guide to Mechanical Impedance Testing*, Solartron Appl. Note, 1974.
19. * * * *Instrumentation Buyer's Guide*, Sound and Vibr., mar. 1976.

INSTALAȚIE DE GRANULARE PENTRU OXID DE WOLFRAM

de LUCIAN CĂPITANU

Institutul de fizica și tehnologia materialelor București

Oxidul de wolfram rezultat sub formă de pulbere în urma operațiilor de oxidare și reducere a pulberii de wolfram, este aglomerat și granulat sub forma unor sfere cu diametre variind între 0,5 și 4 mm. Sub această formă oxidul de wolfram este utilizat ca accelerator de reacție în industria metalurgică.
Lucrarea prezintă utilajul realizat în urma studiilor de laborator, pentru granularea pulberii de wolfram. Sub forma prezentată, instalația este utilizată în cadrul stației pilot de oxid de wolfram.

I. INTRODUCERE

În urma cercetărilor de laborator s-a observat că procedeul cel mai bun de granulare, în situația dată, este granularea umedă. Aceasta se realizează prin umezirea periodică a pulberii de wolfram, în utilaje cu tambur rotativ.

Prin rotirea tamburului, particulele de oxid de wolfram sînt antrenate și ridicate pînă la o înălțime care depinde de turația tamburului, cad și sînt ridicate din nou. În timpul acestor mișcări, particulele de oxid de wolfram, umede, se aglomerează, luînd o formă sferică ca urmare a frecării dintre ele. Eficiența acțiunii de granulare și gradul de utilizare a energei depind, pentru o anumită dimensiune de granule, de turația tamburului (fig. 1). La turații mici, particulele sînt antrenate pînă la o înălțime mică, de

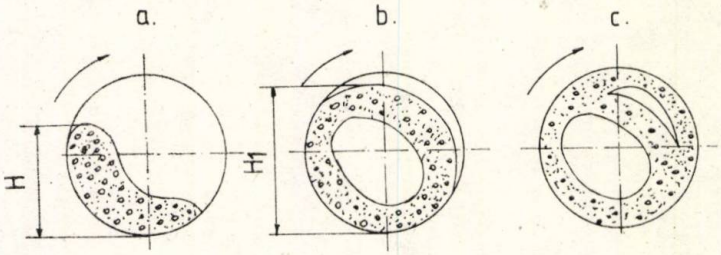


Fig. 1. — Mișcarea granulelor în în tambur : *a* — turație mică ; *b* — turație optimă ; *c* — turație mare.

unde se rostogolesc spre partea de jos. Mărind turația, înălțimea de ridicare crește, crescînd și eficiența procesului de granulare prin creșterea duratei contactului dintre particulele în frecare. Turația la care granulele deja formate se mai desprind de pereții tamburului și cad, se numește turație critică. Peste această valoare a turației, granulele formate și pulberea antrenată împreună cu acestea, se mențin în contact cu peretele interior al tamburului, mișcarea relativă dintre particule și ca urmare procesul de granulare încetînd.

Turația optimă a tamburului se determină din bilanțul forțelor care acționează asupra unei granule aflată în mișcare. După cum se observă

din figura 2, asupra granulei se exercită forța centrifugă F_c și forța gravitațională F_g. Aceasta din urmă are componentele $F_g \cos \varphi$ și $F_g \sin \varphi$, unde φ este unghiul de ridicare a granulelor. Granulele de masă m, nu se

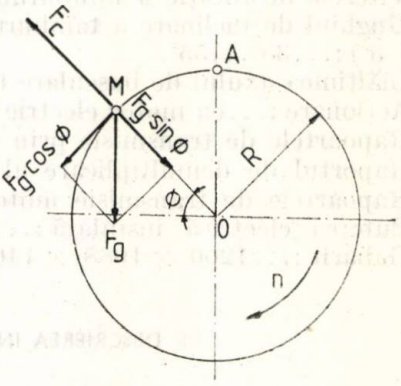


Fig. 2. — Determinarea turației optime a tamburului.

vor desprinde de perete atîta timp cît

$$F_c \geq F_g \sin \varphi, \tag{1}$$

sau

$$m \omega^2 R \geq mg \sin \varphi. \tag{2}$$

Pentru $\varphi = 90°$ (poziția granulei în punctul A), condiția de mai sus devine:

$$\frac{\omega^2 R}{g} \geq 1. \tag{3}$$

Viteza unghiulară calculată din relația (3), constituie viteza critică la această valoare aglomerarea încetînd:

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{4}$$

Introducînd în relația (4) expresiile:

$$\omega_{cr} = 2\pi n_{cr}; \qquad R = \frac{d_i}{2},$$

rezultă expresia turației critice:

$$n_{cr} = \frac{0{,}706}{\sqrt{d}} \qquad [\text{rot/s}],$$

în care d_i reprezintă diametrul interior al tamburului rotativ.

Turația optimă a tamburului se stabilește din condiția ca lucrul mecanic de cădere a granulei să fie maxim.

II. CARACTERISTICI TEHNICE

— Dimensiunile tamburului .....Φ1000 × 250 mm.
— Sensul de rotaţie a tamburului:... dreapta.
— Vitezele de rotaţie a tamburului; 10; 20; 30 rot/min.
— Unghiul de înclinare a tamburului faţă de orizontală (în trepte din 5° în 5°):...35°...55°.
— Înălţimea axului de basculare faţă de sol... 700 mm.
— Acţionare:...cu motor electric $N = 0{,}8$ kW; $n = 1000$ rot/min.
— Rapoartele de transmisie prin curea: $i_c = 0{,}66$; 1; 2.
— Raportul de demultiplicare al reductorului: $i_r = 50$.
— Rapoartele de transmisie motor-tambur: $i = 33$; 50; 100.
— Puterea electrică instalată;... $P = 0{,}8$ kW.
— Gabarit:...1200 × 1088 × 1400 mm.

III. DESCRIEREA INSTALAŢIEI

Instalaţia de granulare realizată, a cărei schemă de principiu este prezentată în figura 3, este formată dintr-un cadru rigid (1), confecţionat prin sudură din platbande şi profile de oţel. Cadrul susţine toate celelalte subansamble ale instalaţiei, care formează un grup unitar, mobil în jurul unei axe orizontale. Adoptarea acestei soluţii a fost necesară pentru a asigura diverse unghiuri de înclinare a tamburului, în timpul funcţionării.

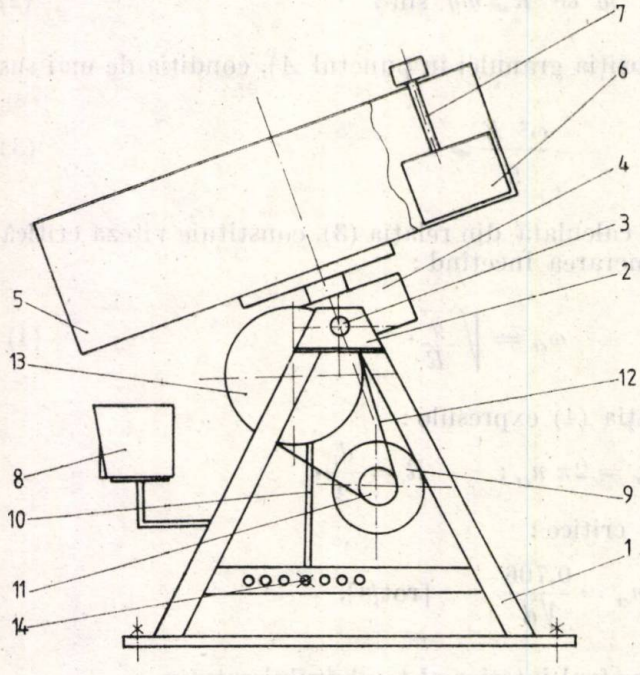


Fig. 3. — Schema de principiu a instalaţiei de granulare.

Pe plăcile de fixare din partea superioară a cadrului, sînt fixate lagărele cu alunecare *2*, în care sînt montate axele suporţilor de basculare *3*, care au rolul de a asigura mişcarea de basculare a întregului grup de subansamble mobile ale instalaţiei. Suporţii de basculare sînt formaţi dintr-un ax sudat de o piesă de prindere sub forma unui sector de cerc, prevăzută cu găuri filetate pentru montarea pe reductorul *4*.

Reductorul este de tip melcat, cu ra-

portul de demultiplicare $i = 50$, avînd rolul de a asigura mișcarea de rotație a tamburului. Pe axul de intrare, reductorul este prevăzut cu o roată de curea cu trei trepte *3*, cu ajutorul unei flanșe cu butuc.

În interiorul tamburului este montată o placă deflectoare *6*, reglabilă ca poziție, care are rolul de a crea particulelor de oxid de wolfram o mișcare favorabilă granulării. Placa este susținută de un dispozitiv de reglare *7*, cu trei grade de libertate, asigurînd reglarea poziției plăcii.

Mișcarea de rotație a tamburului este asigurată de motorul electric *9*, montat pe o placă suport *10*, avînd rol de susținere și de întindere a curelei trapezoidale *12*. Mișcarea de rotație este transmisă prin intermediul roților de curea *11* și *13*.

Prin combinarea valorilor turației, a unghiului de înclinare a tamburului și a poziției plăcii deflectoare, se obține regimul optim de granulare a pulberii de wolfram introdusă în tambur.

Comenzile instlației sînt amplasate centralizat într-un panou de comandă și automatizare *8*, montat în consolă pe cadrul *1*.

IV. CONCLUZII

Instalația de granulare realizată constituie o materializare a cercetărilor de laborator, într-un utilaj specializat. Introducerea plăcii deflectoare și în special profilul acesteia, constituie o noutate, rezultată în urma unor cercetări laborioase. Ea asigură forma spațială optimă a fluxului de particule aflate pe traiectoria descendentă, ceea ce conduce în final la un randament ridicat al procesului de granulare.

Primită la redacție la 21 decembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. E. BEILICH, D. BECHERESCU, *Cuptoare și utilaje în industria silicaților*, vol. II, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973.
2. R. Z. TUDOSE, *Procese, operații, utilaje în industria chimică*, Ed. didactică și pedagogică, București. 1973.

Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau (Manualul pentru construcția de mașini), ediția a 14-a, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York.

Lucrarea constituie un îndreptar valoros pentru cei implicați în problemele construcției de mașini. Manualul se adresează atît inginerului care lucrează în acest domeniu, fie în proiectare, fie în fabricație, cît și studenților din institutele politehnice și constituie o bază pentru orientare și documentare în problematica vastă a construcției de mașini.

Tematica este tratată în 23 de părți, împărțite în capitole, subcapitole și paragrafe. În afară de acestea există o anexă cuprinzînd tabele numerice și grafice cu valori uzuale precum și un repertor pentru găsirea celor peste 10 000 de termeni de specialitate tratați în carte.

Redăm mai jos părțile din cuprinsul manualului pentru a ilustra materialul documentar vast pus la dispoziția cititorului :

A — Matematică ; B — Mecanică ; C — Rezistența materialelor ; D — Termodinamică, E — Tehnologia materialelor ; F — Bazele tehnicii proiectării ; G — Organe de mașini ; H — Acționări hidraulice și pneumatice ; I — Mecanisme ; K — Utilaje termice ; L — Instalații pentru generarea aburilor ; M — Instalații de climatizare ; N — Gospodărirea energiei ; O — Dinamica mașinilor ; P — Mașini cu piston ; Q — Tehnica autovehiculelor ; R — Mașini hidraulice rotative ; S — Tehnologia construcțiilor de mașini ; T — Tehnica de transport și depozitare ; U — Electrotehnica ; V — Metrologie ; W — Automatizare ; X — Informatică.

Unele părți, ca de exemplu F — „Bazele tehnicii proiectării" și X — „Informatică" — dau prelucrarea electronică a datelor, sînt rare ori cuprinse în manuale pentru construcția se mașini dar foarte utile.

Partea E este impropriu denumită „Tehnologia materialelor". Cele trei capitole din care se compune tratează despre : 1. Proprietăți de rezistență a materialelor și pieselor ; 2. Încercări ale materialelor și 3. Proprietăți și utilizarea materialelor. O componentă importantă a acestei părți cuprinzînd tabele numerice ale diferitelor proprietăți ale materialelor se găsește în anexă.

De remarcat este faptul că toate părțile cuprind cele mai recente probleme ale domeniului pe care îl tratează.

Scopul urmărit de editori este de a se asigura inginerului un manual complex și cuprinzător, care să-l ajute la rezolvarea problemelor sale fără să fie nevoie de consultarea altor materiale documentare. Totodată cartea trebuie să permită o orientare rapidă a nespecialistului în diferite domenii de specialitate cu care este confruntat în rezolvarea sarcinilor sale.

Aceste deziderate sînt în mare măsură realizate. Desigur nu se poate pretinde ca un singur manual să cuprindă întregul bagaj de cunoștințe necesare rezolvării unor probleme de mare specialitate și complexitate, cum se întîlnesc dese ori în construcția de mașini.

La începutul fiecărei părți sau capitol este indicată bibliografia cu caracter general, iar bibliografia de strictă specialitate care este citată în text prin numere între croșete [ ] se găsește la sfîrșitul fiecărui capitol.

O particularitate utilă o constituie dublarea titlurilor părților, capitolelor, subcapitolelor și paragrafelor în limba germană cu traducerea lor în limba engleză, ceea ce ușurează utilizarea manualului de către cei care nu stăpînesc foarte bine limba germană.

Execuția tehnică a lucrării, în special schițele și reprezentările grafice sînt de o claritate remarcabilă.

În concluzie se poate afirma că manualul „Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau" ediția a 14-a, reprezintă un ajutor prețios pentru inginerii și studenții din domeniul construcțiilor de mașini.

G. Winter

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).

● Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiu actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 41, nr. 5 septembrie—octombrie 1982

SUMAR

C. TEODORESCU-ŢINTEA, DAN PANTAZOPOL, MIHAI NEAMŢU, Savantul şi profesorul Elie Carafoli 521

STUDII

V. ULMANU, D. RAŞEEV, Cercetări privind capacitatea portantă a îmbinărilor filetate cu umăr pentru garnitura de foraj 529

CH. VASILIU, Variaţia coeficientului de aderenţă şi determinarea vitezei autovehiculelor după urmele de frînare 545

I. N. CONSTANTINESCU, CIPRIAN BOLOG, Studiul vibraţiilor transversale şi longitudinale ale cablurilor de compensare la instalaţiile de extracţie 561

V. CHIUJDEA, I. ROŞU, Determinarea profilului teoretic al electrodului sculă la prelucrarea electrochimică a pieselor de configuraţie complexă 578

MIHAIL POPESCU, Rezultate experimentale în studiul mişcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune. II 595

N. ATANASIU, C. I. IONESCU, Z. ATANASIU, Cercetări privind prelucrabilitatea prin aşchiere la strunjirea aliajelor de aluminiu deformabile 610

OAMENII DE ŞTIINŢĂ ŞI PACEA 627

RECENZII 629

SAVANTUL ȘI PROFESORUL ELIE CARAFOLI

de C. TEODORESCU-ȚINTEA, DAN PANTAZOPOL, MIHAI NEAMȚU
Institutul Național pentru Creație Științifică și Tehnică

A prezenta viața și opera academicianului profesor Elie Carafoli, la cea de-a 80-a sa aniversare, este nu numai un gest de recunoștință, dar și un autentic act de cultură, în măsura în care, vorbind despre un om atît de implicat în evoluția, aproape de la începuturi, a unei întregi ramuri a științei și tehnicii — aeronautica — abordăm, ipso facto, însăși istoria acestei discipline.

Pentru noi, cei care trăim și muncim în această țară, este și un necesar act patriotic, deoarece, este bine să știm că avem oameni înzestrați cu spirit creator, care, muncind aici, în sînul societății noastre, au adus și aduc contribuții valoroase la progresul spectaculoasei științe a aeronauticii. Acest lucru este cu deosebire important pentru sentimentul de încredere, curajul și îndemnul pe care exemplul unor astfel de oameni îl insuflă generațiilor în a persevera, în a crea, în a întreprinde, fără de care nu este posibilă ridicarea unei națiuni pe culmile civilizației.

Elie Carafoli s-a născut la 15 septembrie 1901 la Veria, lîngă Salonic, într-o familie de români, puternic implicată în viața culturală a comunității române din peninsula Balcanică. Școala primară din Veria, școala secundară din Salonic, ambele în limba română, atmosfera culturală în care și-a petrecut copilăria, au sădit în sufletul său sentimente care s-au transformat pe parcurs într-un puternic atașament pentru Țara Românească, spre care își va îndrepta pașii tocmai cînd prima conflagrație mondială cuprindea regiunea Balcanilor. Curajul și dîrzenia trebuie să fi fost, fără discuție, necesare tînărului de 15 ani, pentru a putea înfrunta vicisitudinile acelor vremuri și a putea ajunge, pe drumuri desfundate și pline de primejdiile războiului, la București, la începutul anului 1916.

Ajuns în țară, își completează studiile liceale la liceul Lazăr și apoi la Mănăstirea Dealului, unele dintre cele mai bune școli din acea vreme, iar apoi urmează studiile la Școala politehnică din București, de unde obține în 1924 diploma de inginer electromecanic.

Beneficiază apoi de o bursă de studii la Paris, pe care o fructifică obținînd mai întîi licența în științe fizico-matematice, apoi, în 1928, doctoratul, prin susținerea cu succes a tezei sale „Contribution à la théorie de la sustentation en aérodynamique".

De perioada șederii în Franța sînt legate începuturile activității sale strălucite în aerodinamică. În acea vreme, multe din fenomenele fundamentale ale acestei științe erau încă neelucidate, teoria și metodele de calcul se aflau în stadiu incipient, iar metodele experimentale erau foarte puțin dezvoltate. Pe de altă parte, aviația care se dezvolta datorită perseverenței

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 5, 1982, P. 521–528

entuziaștilor și atracției pe care o exercita asupra celor mai diverse categorii de oameni, avea nevoie tot mai mare de cunoștințe științifice riguroase, de precizie, de calcul. Cele mai luminate minți erau tot mai mult atrase de problematica științifică a acestei sublime aventuri a omului. Era o vreme cînd ideile „pluteau" în aer, cînd cursa sportivă pentru noi recorduri, de viteză de altitudine, de distanță, impunea o altă cursă pe tărîmul cunoașterii științifice.

Lucrînd la Institutul aerotehnic de la Saint-Cyr, care ținea de Sorbona, sub conducerea profesorului Albert Toussaint, Elie Carafoli s-a făcut remarcat prin ingeniozitatea sa, creîndu-și totodată un nume și un loc în știința aeronauticii. Astfel, cărțile „Aérodynamique des ailes d'avion", „Théorie et tracés des profils aérodynamiques" (în colaborare cu Albert Toussaint), „Influence des ailerons sur les caractéristiques des surfaces sustentatrices" și „Recherches expérimentales sur les ailes monoplanes", precum și comunicările sale la Academia de științe de la Paris, l-au făcut repede cunoscut în cercurile științifice din întreaga lume, unele dintre ele devenind manuale de referință pentru mulți dintre cei care mai tîrziu au ajuns savanți de renume. Aceste importante lucrări au contribuit la eforturile de înțelegere și elucidare a fenomenelor de bază respective, devenind un util instrument pentru proiectanții de avioane.

Este semnificativ modul cum a apreciat lumea științifică din Franța, valoarea contribuțiilor lui Elie Carafoli la dezoltarea Aeronauticii: pe lîngă „Premiul Louis Bréguet" (1928) și „Medalia de onoare — argint" a Societății pentru încurajarea progresului el primește bursa de studii care purta numele legendarului erou al aerului, Guynemer, „L'as des as" al piloților din Franța din cel dintîi război mondial și care era destinată în principiu numai francezilor.

Cînd, la vîrsta de 27 de ani, se întoarce în țară, Elie Carafoli aduce cu sine nu numai diplomele de licențiat și doctor de la Sorbona ori distincțiile primite pentru lucrările sale, ci, mai presus de toate, aducea preocupările sale de viitor, ideile care fierbeau atunci în mințile oamenilor de știință, cercetătorilor, constructorilor de avioane; aduce cu sine o parte din cele mai înaintate concepții ale vremii, spiritul științific al Sorbonei, ardoarea și entuziasmul său pentru aeronautică.

În Franța fusese asistent atașat la catedra de mecanica fluidelor de la Sorbona, condusă de Paul Painlevé. În România i se încredințează, pe măsura reputației sale științifice, primul curs de aerodinamică și mecanica avionului de la Școala politehnică din București, cu care de fapt inaugurează, în octombrie 1928, învățămîntul superior ingineresc în acest domeniu, în țara noastră.

El concepe și organizează primul laborator de aerodinamică din țară, care în anul 1930 este dotat cu o suflerie continuă cu performanțe deosebite pentru acea vreme, realizată în colaborare cu Ion Stroescu. La această suflerie, Elie Carafoli își continuă cercetările asupra aripilor de avion, dar tot aici vor fi încercate, pentru prima dată, avioanele construite în țară. Mai tîrziu va fi construită și o a doua suflerie de dimensiuni mai mari la Institutul de mecanică al Academiei R. S. România (actualmente INCREST). Spiritul științific a avut mult de cîștigat, prin îmbinarea armonioasă a muncii didactice cu cercetarea și cu gîndirea inginerească. Laboratorul de aerodinamică al profesorului Carafoli devine locul de naștere al

unor avioane româneşti de mare succes, IAR-CV-11, IAR-14, IAR-15, IAR-16 — care aducea noutăţi constructive pe plan mondial, printre care formula aripă-joasă avea să aibă un remarcabil succes. Performanţele deosebite ale acestor avioane care erau înzestrate cu profile aerodinamice generate prin metoda sa proprie de trasare, aduc aerodinamicianului Carafoli şi constructorilor de avioane români binemeritate succese la concursul aeronautic de la Bucureşti, din anul 1931, unde avionul IAR-13 surclasează unele dintre cele mai bune avioane din acele vremuri (Dewoitine 27-Franţa, Junkers 47-Suedia, Fokker D-XVI-Olanda, PZL-11-Polonia, Morane 221-Franţa). Astfel, IAR-13 realizează viteze maxime cu 10% mai mari şi timp de urcare la 5 000 metri cu 15% mai mic decît al doilea clasat, avionul PZL-11.

Date mai complete rezultă din tabelul de mai jos, cunoscut mult mai tîrziu şi publicat de ing. Ion Iacovachi:

Denumirea avionului		Viteza la sol	Viteza la 5 000 m	Urcarea la 5 000 m	Motor
Dewoitine 27	(Franţa)	287	236	9'38"	Hispano 400 CP
Junkers 47	(Suedia)	238	279	11'27"	Jupiter 480 CP
Fokker D-XVI	(Olanda)	278	289	10'45"	Jaguar 460 CP
PZL-11	(Polonia)	292	265	9'29"	Hispano 500 CP
Morane 221	(Franţa)	238	270	9'35"	Jupiter 480 CP cu compresor
IAR-13	(România)	329,7	306	7'58"	Hispano 500 CP

Cu avionul IAR-16, echipat cu motorul Bristol Mercury IVS, cu o putere de 500 CP, s-a obţinut o viteză de 295 km/oră la sol şi 345 km/oră la 5 000 m altitudine. Cu acest avion locotenentul aviator Al. Papană a stabilit recordul naţional de înălţime, urcîndu se la 11 639 m.

Ce aduceau metodele mult mai precise de calcul elaborate de tînărul savant Elie Carafoli?

În primul rînd, cu ele se puteau obţine valori realiste ale solicitărilor aerodinamice ale structurii avioanelor, ceea ce permitea proiectarea lor mai corectă, reducerea greutăţii şi implicit îmbunătăţirea performanţelor avionului. Pe de altă parte, alegerea ştiinţifică a formei aripii, a profilelor, a formei fuzelajului, a carenajelor etc. contribuiau în mod direct, printr-o aerodinamică optimizată, la realizarea unor performanţe înalte.

Profesorul Carafoli avea la ce să se gîndească şi o făcea cu multă pasiune. Abordează teoria aripioarelor şi umple un spaţiu, gol pe vremea aceea, punînd la dispoziţia constructorilor, aparatul matematic necesar calculului forţelor şi momentelor aerodinamice de şarnieră.

Studiile sale teoretice şi experimentale asupra profilelor aerodinamice, începute la Saint-Cyr şi continuate la Bucureşti, au dus la numeroase dezvoltări şi la punerea la punct a „Metodei generale de trasare şi de calcul a profilelor". O importantă generalizare o constituie profilele cu vîrf rotunjit, numite în literatura de specialitate „profile Carafoli". Aceste profile prezentau caracteristici aerodinamice şi constructive convenabile, putînd fi în acelaşi timp calculate în mod exact prin teoria sa.

Metoda generală de trasare și determinare a caracteristicilor aerodinamice ale profilelor aduce contribuții originale la dezvoltarea aerodinamicii și prezintă un larg interes, deoarece :

— acoperă tipurile de profile cunoscute, precum și profile de tip nou cu vîrf ascuțit, cu diedru îi profilele cu bord de fugă rotunjit (profile Carafoli [1]) ;

— este bazată pe interpretarea geometrică și fizică a funcției de transformare conformă, punîndu-se în evidență parametrii care determină geometria profilului (grosimea relativă maximă și poziția acesteia pe linia scheletului, unghiul la bordul de fugă (diedrul vîrfului) sau gradul său de rotunjire, precum și parametrii care determină caracteristicile aerodinamice esențiale (coeficientul de moment de portanță nulă C_{mo}, axa de portanță nulă etc.). Metoda permite efectiv proiectarea de profile cu caracteristici date și cu o formă convenabilă din punctul de vedere constructiv, ceea ce la vremea aceea era foarte important. La profilele cu vîrf ascuțit sau cu diedru, circulația în jurul profilului se determină, conform teoriei lui Jukowski, impunînd o viteză finită la vîrf. La profilele cu vîrf rotunjit, circulația se determină impunînd o viteză nulă în punctul unde raza de curbură a vîrfului este minimă. Acest lucru se bazează pe condițiile de curgere în jurul acestui punct.

Profilele cu bord de fugă rotunjit au aplicații la aripile de avion la elici aeriene și marine, dar mai ales la paletele de turbo-mașini, unde, pentru rațiuni constructive, se utilizează aproape exclusiv astfel de profilei. Trasarea lor se face după aceeași metodă ca la profilele cu bord ascuțit.

Paralel cu teoria profilelor, Elie Carafoli desfășoară intense cercetări teoretice și experimentale asupra aripilor de anvergură finită, punînd la punct o metodă analitică de calcul, ușor de utilizat, eficientă și generală. În esență, metoda constă în aproximarea prin polinoame trigonometrice a variației corzii și incidenței în anvergură, ceea ce permite în final rezolvarea explicită a ecuației lui Prandtl pentru distribuția circulației în anvergură și determinarea analitică a tuturor caracteristicilor aerodinamice ale aripii. Metoda se aplică cu multă ușurință și permite o bună înțelegere a fenomenelor aerodinamice. Astfel, metoda are aplicație la aripi de diverse forme în plan (dreptunghiulare, eliptice, trapezoidale etc.), avînd incidența variabilă datorită torsiunii, cambrării, sau bracajului suprafețelor de comandă.

Totodată, Elie Carafoli dezvoltă teoria profilelor și aripilor în mișcare de rotație sau roto-translație, care se poate aplica și la mișcarea oscilatorie a avionului. Toate aceste lucrări erau elaborate la cel mai înalt nivel științific. De ele beneficiau și studenții — viitorii ingineri — și constructorii și cei care se ocupau cu cercetarea științifică. Cît de valoroase erau aceste cercetări se poate vedea și din faptul că, atunci cînd și-a adăugat și alte contribuții într-o lucrare unitară — Aerodinamica (1952) — aceasta a fost tradusă atît în limba germană („Tragflügeltheorie", Verlag Technik, Berlin, 1954), cît și în limba rusă (Aerodinamika Krila Samoleta, Izd. Akad, Nauk SSSR, Moscova, 1956). Bineînțeles, această lucrare mai con-

[1] Denumirea de „Profile Carafoli" a fost dată, printre alții, de savantul englez Milne-Thomson în cartea sa „Theoretical Aerodynamics Macmillan, London 1948—1966, pag. 111, 134, 136.

ţinea şi alte studii teoretice, efectuate după 1948, cum ar fi teoria sistemelor portante şi de rezistenţă minimă sau a sistemelor aripă-fuzelaj, dar partea elaborată în anii 30 avea preponderenţă. Acest lucru ne permite să apreciem că, datorită lucrărilor sale, inginerii de aviaţie români au beneficiat încă din acei ani, nu numai de o înaltă pregătire ştiinţifică în aerodinamica şi mecanica zborului, dar au avut metode de calcul dintre cele mai bune şi mai corecte, pe deplin satisfăcătoare pentru nevoile industriei aerodinamice. Nu întîmplător avioanele IAR, mai ales IAR-80, erau printre cele mai bune din Europa la începutul războiului. Asocierea acestor elemente se impune de la sine şi este necesar să o facem.

Existau deja atunci specialişti în probleme de aerodinamică, de structuri, motoare, aparate de bord. Dar la formarea lor avusese o puternică contribuţie nivelul ridicat al şcolii româneşti, la a cărei temelie se afla şi munca profesorului Carafoli. Încă o dată se demonstrează cît de favorabil este impactul cercetării ştiinţifice fundamentale asupra dezvoltării bazelor teoretice ale învăţămîntului superior şi mai cu seamă asupra progresului tehnic şi producţiei industriale de performanţă.

După anul 1944, România a păşit pe drumul construirii unei noi societăţi. Încă de la prelucrarea industriei şi în general a economiei de către stat, problema asigurării cercetării devenea foarte importantă. Recunoscîndu-i-se meritele deosebite, Elie Carafoli este ales în 1948 membru titular al ACADEMIEI şi i se încredinţează organizarea şi conducerea Institutului de mecanică aplicată. În paralel, era profesor titular al cursului de Aerodinamică şi şeful catedrei de Aviaţie la Institutul politehnic din Bucureşti. Datorită lui, învăţămîntul şi cercetarea aeronautică vor continua să fie viabile, să producă.

Pe linia cercetării aerodinamice sînt abordate probleme noi de mare actualitate, ca de exemplu calculul aripilor şi sistemelor aripă-fuzelaj în regim supersonic. Profesorul Carafoli aduce contribuţii remarcabile în dezvoltarea teoriei mişcărilor conice supersonice, introducînd o metodă nouă de studiu, aceea a „analogiei hidrodinamice". Această nouă metodă are la bază studiul sistematic al tuturor tipurilor de singularităţi, care apar în expresia potenţialului curgerii conice, ca urmare a prezenţei bordurilor de atac şi de fugă, a muchiilor unde are loc un salt de pantă etc., ajungîndu-se la o elegantă exprimare a acestora prin formulele potenţialului singularităţilor din curgerea incompresibilă (surse, dublete, vîrtejuri). Se stabileşte astfel o metodologie de construire a soluţiei mişcărilor conice deosebit de eficientă, intuitivă, şi în acelaşi timp riguroasă, cu care sînt abordate un număr mare de probleme de interes practic : aripi subţiri şi groase de forme poligonale oarecare, sisteme aripă-fuzelaj, aripi cruciforme (pentru prima dată în lume) etc.

În acelaşi timp, sub conducerea sa, în institutul transformat între timp în „Institutul de mecanica fluidelor", se constituie colective de cercetare în domenii cum ar fi Aerodinamica sistemelor portante la viteze subsonice şi supersonice, Mecanica fluidelor vîscoase şi teoria stratului limită, Tuburi de şoc, Combustie etc.

La activitatea institutului participă foştii elevi ai academicianului Carafoli, deveniţi la rîndul lor cercetători de prestigiu, cît şi tot mai mulţi tineri, selecţionaţi dintre cei care dovedesc înclinare spre cercetare. Aceştia au format ceea ce se numeşte „Şcoala românească de aerodinamică", cu-

noscută în țară și în străinătate. La afirmarea acesteia au contribuit în foarte mare măsură revistele „Studii și cercetări de mecanică aplicată (SCMA)" și „Revue Roumaine de Mécanique Appliquée" (RMA), al căror redactor responsabil, este, de la înființare, prof. Elie Carafoli, precum și simpozioanele internaționale de înalt nivel științific organizate cu participarea unor savanți de prestigiu mondial.

Beneficiind din plin de condițiile excelente asigurate de statul socialist dezvoltării științei și culturii în țara noastră, Institutul de mecanica fluidelor capătă un prestigiu internațional, se dezvoltă rapid și odată cu el se formează noi generații de cercetători, de specialiști.

În fruntea acestora, conducîndu-i cu dăruire și afecțiune, academicianul Carafoli știe să aleagă tematica cea mai interesantă, să selecționeze oamenii, să impună un ritm de muncă susținut. Și toate acestea în timp ce el însuși produce, participă direct la elaborarea unor cercetări de primă valoare. Cartea sa „Aerodinamica vitezelor mari" este tradusă în limbile rusă și engleză. O altă carte, de teoria aripilor în regim supersonic, apare în editura „Pergamon Press", sinteză a unui număr impresionant de articole și lucrări publicate în țară și în străinătate, rod al muncii sale și a unui colectiv, de colaboratori.

În paralel, ca șef al Catedrei de aviație la Institutul politehnic din București, și ca titular al cursului de Aerodinamică, profesorul Carafoli desfășoară o activitate neobosită de formare a viitorilor ingineri de aviație, cărora le insuflă dragostea pentru meseria lor, simțul științific, gîndirea inginerească și odată cu aceasta sentimentul tradiției noastre în domeniul aeronautic, încrederea în forțele proprii, îndrăzneala și entuziasmul pentru știință.

Acest lucru avea să-și vădească importanța majoră după anul 1968, cînd conducerea Partidului și Statului nostru a hotărît să imprime un nou avînt industriei aeronautice, punînd în fața constructorilor români de avioane sarcini deosebite.

În fapt, anii'70 au marcat trecerea la o etapă superioară în evoluția aeronauticii românești. S-a dezvoltat puternic industria și odată cu aceasta cercetarea științifică, proiectarea și învățămîntul aeronautic de toate gradele. S-a schimbat radical scara la care se abordează problemele. Astăzi dispunem de avioane în concepție proprie, cu performanțe remarcabile, fabricate de industria aeronautică română și aflate în dotarea aviației noastre, de uzine ultramoderne, de institute de cercetare științifică de profil, de întreprinderi de cercetare și producție pentru aviație.

În acest nou context, profesorul Elie Carafoli continuă să activeze neobosit, aducîndu-și valoroasa sa contribuție la dezvoltarea științelor aeronautice românești. Conducător de doctorantură, îndrumător și sfetnic neprețuit în problemele orientării și organizării programelor de cercetări fundamentale și aplicative, conducător direct al unor studii și cercetări de aerodinamică teoretică și aplicată, profesorul Carafoli se află mereu în primele rînduri ale frontului științific românesc, participînd cu tot entuziasmul la înfăptuirea visului său din totdeauna — dezvoltarea aviației în patria noastră.

Valoarea științifică a operei prof. Elie Carafoli, importanța ei pe plan mondial au fost recunoscute și onorate de instituții de mare prestigiu din țări cu tradiție în domeniul aeronauticii. Membru de onoare al Societății

Regale Aeronautice din Anglia (alături de nume răsunătoare ca : Sir Geoffrey Taylor, Prof. A. Akeret, Sir George Edwards), membru al Academiei internaionale de astronautică și de două ori președinte al Federației internaționale de astronautică (1969 și 1970), membru în Comitetul executiv al consiliului internațional al uniunilor științifice — ICSU (anii 1964—1967), iată numai cîteva din simbolurile mai semnificative ale acestei recunoașteri, în fapt mult mai numeroase, la care se adaugă medalia „Gauss", decernată de Societatea științifică din Braunschweig (RFG, 1970), unde a fost mai tîrziu și membru străin al acestei societăți, diploma și medalia „Tiolkovschi" (U.R.S.S., 1981), „Medalia de argint" (1967) a Societății de încurajare pentru cercetare și invenție, Paris, diploma „Paul Tissandier" (1956), decernată de Federația internațională de aeronautică.

O semnificație deosebită o au părerile unor iluștri oameni de știință din toată lumea, exprimate cu diferite ocazii. Astfel, referindu-se la ediția în limba rusă a cărții „Aerodinamica vitezelor mari", academicianul Leonid Sedov îi scria academicianului Elie Carafoli la 20 mai 1957 : „În cartea dv. se face o expunere completă și magistrală a tuturor rezultatelor celor mai esențiale ale aerodinamicii teoretice moderne. În dezoltarea acestui domeniu al științei, merite deosebite vă aparțin dumneavoastră personal".

Tot cu referire la aceeași carte, un alt savant ilustru, prof. Paul Germain, membru al Academiei de științe din Paris, scrie la 15 aprilie 1957 :

„Permiteți-mi să vă prezint felicitările mele. Pe arena internațională sînt puține cărți comparabile cu cea a dumneavoastră. Puteți fi mîndru de a fi realizat în circumstanțe dificile o operă atît de importantă".

Iar acad. J. Kozesnik de la Academia de științe cehoslovacă, apreciază (la 30 aprilie 1973) cu referire la activitatea științifică :

„În special sînt lucrările dumneavoastră din domeniul mecanicii fluidelor și de aerodinamică, care v-au făcut celebru în toată lumea prin importanța lor științifică și practică deosebită, precum și prin eleganța soluțiilor obținute".

La 17 decembrie 1969, profesorul H. Blenk, președintele Societății științifice din Braunschweig, îi scria profesorului Elie Carafoli :

„Am azi marea cinste și bucurie de a vă putea transmite că societatea noastră a hotărît ca medalia „Carl-Friederich Gauss" 1970 să vă fie decernată dv., ca o recunoaștere a lucrărilor dv. proeminente și deschizătoare de drumuri din domeniul Fizicii fluidelor".

Nu mai puțin semnificativ este și faptul că Elie Carafoli era cel de al 4-lea reprezentat al Fizicii fluidelor care primea medalia Gauss, înaintea sa fiind Theodor von Karman, profesorul Betz de la Goettingen și profesorul Goerther din Freiburg/Breisgau. Cel de-al cincilea avea să fie, cîțiva ani mai tîrziu, Sir James Lighthill, membru titular la Royal Society.

Cu atît mai mult este prețuită munca acad. Elie Carafoli în țara noastră, unde a fost onorat în mai multe rînduri cu ordine, medalii, premii și decorații. Astfel, este Laureat al Premiului de Stat clasa I, decorat cu Ordinul Muncii clasa I, Ordinul Steaua Republicii Socialiste România, clasa a II-a, Ordinul Meritul Științific, clasa I, deținător al titlului de „Om de știință emerit" al Republicii Socialiste România etc.

Cu o listă de lucrări de mare valoare științifică, deschizătoare de drumuri, în care se înscriu peste 180 de titluri (o parte elaborate împreună cu colaboratorii săi), între care multe cărți cunoscute și recunoscute în întreaga lume drept lucrări fundamentale, iar restul note științifice publicate și comunicări prezentate la congrese, academicianul Elie Carafoli este unul dintre cei mai proeminenți savanți în domeniul Aerodinamicii, considerat ca atare atît în țara noastră cît și peste hotare.

Nu putem încheia această succintă prezentare a realizărilor savantului și profesorului Elie Carafoli fără a ne exprima stima și admirația noastră pentru omul care a pășit în anii săi 80 ca autor al unui nou tratat de dinamica fluidelor, epuizat în cîteva ore după apariție și care desăvîrșește în prezent volumul al doilea, al aceleiași lucrări, pe care noi toți discipolii săi, ca de altfel întreaga lume științifică, îl așteptăm cu un interes pe deplin justificat.

CERCETĂRI PRIVIND CAPACITATEA PORTANTĂ A ÎNBINĂRILOR FILETATE CU UMĂR PENTRU GARNITURA DE FORAJ

de V. ULMANU și D. RAȘEEV
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare se stabilește o metodologie de calcul a capacității portante a îmbinărilor filetate conice la solicitarea de tracțiune.
Capacitatea portantă se determină luînd în considerație atît efectul de concentrare a tensiunilor la baza spirei, cît și faptul că materialul, prin comportarea sa plastică în vecinătatea concentratorului, este capabil să reducă local vîrfurile de sarcină.
Metoda analitică de calcul se verifică experimental prin încercarea la tracțiune a îmbinărilor de dimensiunea 4 1/2 in.

1. INTRODUCERE

La asamblarea elementelor garniturii de foraj se folosesc îmbinări filetate conice cu umăr de tip cep și mufă, a căror formă este prezentată în figura 1.

În timpul forajului, îmbinările filetate sînt puternic solicitate sub acțiunea forței de pretensionare, dezvoltată de momentul de înșurubare, a greutății proprii a garniturii de foraj, a încovoierii datorită devierilor găurii de sondă sau a pierderii stabilității garniturii în găuri largi și a momentului de torsiune necesar forajului, sarcinile avînd caracter static sau dinamic.

Elementul îmbinărilor în care survin majoritatea ruperilor îl reprezintă cepul, care este supus la tracțiune statică sub acțiunea forței de pretensionare și a greutății garniturii de foraj, peste care se suprapun eforturile la încovoiere care au caracter variabil și efortul de torsiune, care, în comparație cu celelalte solicitări, poate fi considerat constant.

Repartiția eforturilor unitare pe secțiunea transversală are un grad mare de neuniformitate, deoarece fundul spirei filetului constituie un puternic concentrator de tensiuni.

În funcție de valoarea solicitărilor și de caracterul de variație, starea limită a îmbinării se poate atinge în următoarele situații:
— atingerea unor deformații ce fac inutilizabilă îmbinarea filetată (pierderea preciziei);
— ruperea, prin depășirea rezistenței la tracțiune;
— ruperea la oboseală, datorită solicitărilor variabile.

În prezenta lucrare se determină teoretic și experimental capacitatea portantă a îmbinărilor filetate cu umăr pentru garnitura de foraj la solicitarea de tracțiune, cu luarea în considerare a efectului de concentrare a ten-

siunilor și a comportării materialului în vecinătatea concentratorului de tensiuni. S-a luat în considerare solicitarea la tracțiune deoarece reprezintă modul de pierdere a capacității portante la instrumentații. Solici-

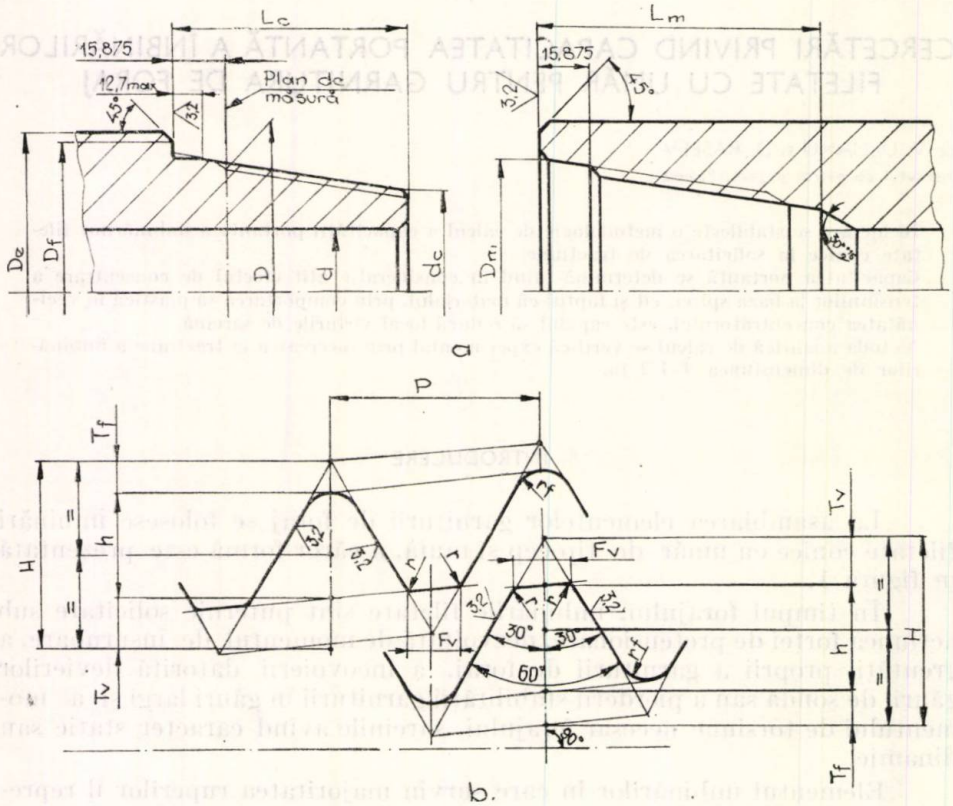


Fig. 1. — Îmbinări filetate conice cu umăr : *a*-forma îmbinării ; *b*-forma filetului.

tările la încovoiere conduc la distrugerea îmbinării prin ruperea la oboseală, iar solicitările de torsiune au o valoare neimportantă pentru atingerea stării limită.

2. DETERMINAREA COEFICIENTULUI DE CONCENTRARE A EFORTURILOR

La piesele la care repartiția tensiunilor pe secțiunea transversală este neuniformă, ca urmare a efectului de concentrare a eforturilor, calculul de rezistență ia în considerare valoarea maximă a efortului unitar echivalent, σ_{max}.

Efortul maxim se determină în raport cu efortul unitar mediu pe secțiunea transversală cu relația

$$\sigma_{max} = \alpha_k \sigma_n, \qquad (1)$$

în care α_k este coeficientul de concentrare a eforturilor ;

σ_n — efortul unitar nominal echivalent, calculat pe baza unei teorii de rezistență. În mod analog, raportul dintre alungirea maximă și cea nominală definește coeficientul de concentrare a deformațiilor,

$$\alpha_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_n} . \tag{2}$$

În cazul comportării elastice a materialului (respectînd legea lui Hooke), coeficienții de concentrare a eforturilor și deformațiilor sînt egali,

$$\alpha_k = \alpha_\sigma = \alpha_\varepsilon = \alpha_H , \tag{3}$$

în care simbolul H semnifică respectarea legii lui Hooke.

Pentru un material ideal — înțelegînd prin aceasta un material omogen, izotrop, făcînd abstracție de structura reală și care se deformează liniar în cursul solicitării — coeficientul de concentrarea eforturilor se determină pe baza teoriei elasticității. Valoarea sa depinde numai de forma concentratorului și de tipul solicitării, propunîndu-se diferite metode de calcul.

Pentru determinarea coeficientului de concentrare a eforturilor la arbori și platbande cu concentratori, Neuber [1] a propus relația (α_H se va simboliza în continuare folosind notația uzuală α_k) :

$$\alpha_k = \frac{C_1 + C_2 \frac{t}{a}}{1 + C_7 \frac{t}{a}} + \sqrt{\left(\frac{C_3 + C_4 \frac{t}{a}}{1 + C_7 \frac{t}{a}}\right)^2 + \frac{C_5 + C_6 \frac{t}{a}}{1 + C_8 \frac{t}{a} + C_9 \left(\frac{t}{a}\right)^2} \cdot \frac{t}{\rho}} . \tag{4}$$

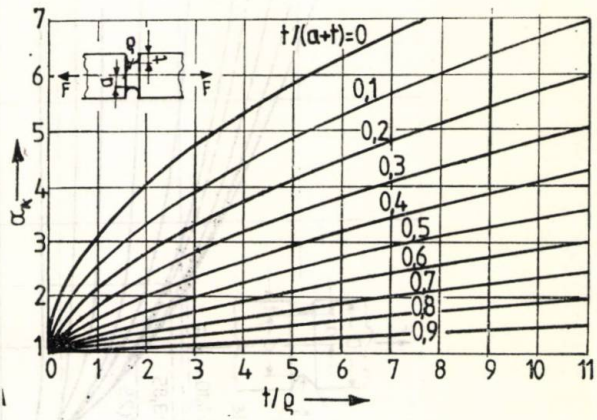


Fig. 2. — Variația coeficientului de concentrare a tensinilor cu geometria concentratorului pentru arbori solicitați la tracțiune.

Semnificația notațiilor t, a și ρ este prezentată pentru arbori supuși la tracțiune, în figura 2, iar valorile constantelor $C_1 \ldots C_9$ sînt prezentate în tabelul 1. De asemenea, în figura 2 se reprezintă grafic valorile coefici-

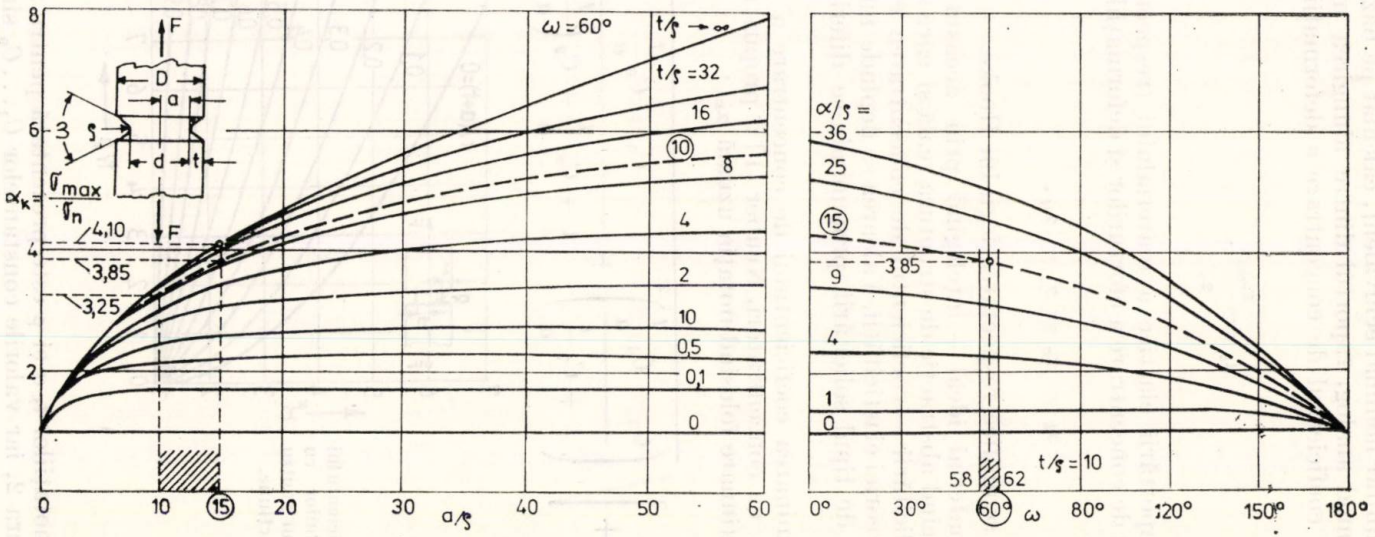


Fig. 3. — Diagrama de variație a coeficientului de concentrare a tensiunilor cu geometria concentratorului pentru arbori solicitați la tracțiune.

entului de concentrare a eforturilor la solicitarea de tracțiune, pentru diferitele forme de concentratori. Se observă că α_k depinde numai de a, t și ρ și crește cu creșterea raportului t/ρ și cu scăderea raportului $t/(a+t)$.

Tabelul 1

Valorile constantelor introduse în expresia (4) pentru solicitarea la tracțiune

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
0,85	−1,84	0,15	3,22	4,95	4,77	1,38	4,05	2,40

În lucrarea [2] s-a elaborat diagrama de determinare a coeficientului de concentrare a eforturilor, prezentată în figura 3, completată și cu influența unghiului flancurilor concentratorului, ω. Din diagramă se observă proporția în care influențează abaterile raportului a/ρ și ω asupra valorii coeficientului de concentrare a tensiunilor.

În lucrarea [3] se prezintă diagrama pentru determinarea grafică a coeficientului de concentrare a eforturilor, în fig ra 4 fiind redată diagrama de determinare a coeficientului de concentrare a eforturilor pentru piese circulare solicitate la tracțiune.

În lucrarea [4] se propune relația de calcul a coeficientului de concentrare a eforturilor, particularizată pentru piese cilindrice supuse la tracțiune:

$$\alpha_k = 1 + \frac{1}{\sqrt{\dfrac{0{,}25}{t/\rho} + \dfrac{(1 + a/\rho)^2}{(a/\rho)^3}}}. \qquad (5)$$

În lucrarea [5] se acceptă relația (5) de determinare a coeficientului de concentrare a eforturilor, corectată pentru raze de racordare $0{,}5\text{mm} \geqslant \rho < 1\text{mm}$ sub forma:

$$\alpha_k^{cor} = \frac{\alpha_k + \dfrac{180^\circ}{180^\circ - \omega} \cdot \dfrac{0{,}693}{\sqrt{\rho}}}{1 + \dfrac{180^\circ}{180^\circ - \omega} \cdot \dfrac{0{,}693}{\sqrt{\rho}}}. \qquad (6)$$

Pentru $\rho < 0{,}5$ mm, în relația (6) se introduce $\rho = 0{,}5$ mm.

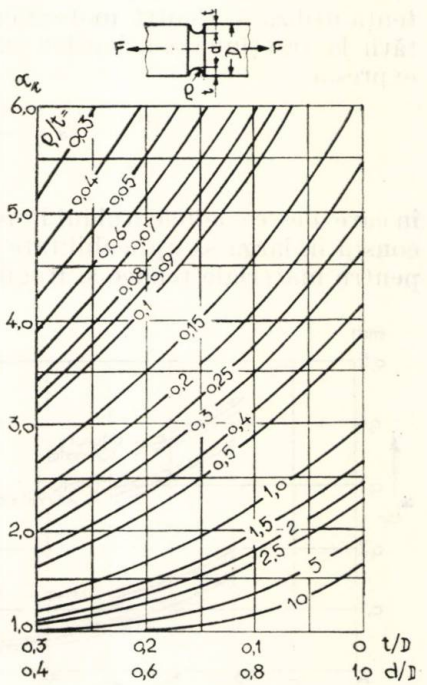


Fig. 4. — Diagramă de determinare a coeficientului de concentrare a tensiunilor în funcție de geometria concentratorilor pentru arbori solicitați la tracțiune.

În lucrarea [6] s-a elaborat o metodologie de analiză a concentrării eforturilor ținînd seama de structura reală a metalului, valabilă și la solicitări peste limita de elasticitate. Pentru a lua în considerare „efectul microstructural", la determinarea coeficientului de concentrare a eforturilor

se aplică teoria elasticității pentru un domeniu structural avînd o lungime fictivă ρ^*, care are semnificația unei constante de material, ceea ce conduce la introducerea unei raze fictive de racordare determinată cu relația

$$\rho_F = \rho + s\rho^*, \tag{7}$$

în care s este un factor dimensional. În locul coeficientului de concentrare a eforturilor determinat în ipoteza comportării liniare la deformare a materialului α_H dedus cu relațiile (4...6), se propune folosirea coeficientului de concentrare redus, $\overline{\alpha}_k$, definit de relația

$$\overline{\alpha}_k = \alpha_k \sqrt{\frac{\rho}{\rho_F}}. \tag{8}$$

Lungimea fictivă de calcul ρ^* depinde de proprietățile materialului, de tehnologia de execuție, de tipul solicitării ș. a., fiind prezentată în figura 5, iar coeficientul s depinde numai de tipul solicitării și de ipoteza de rezistență utilizată. Pentru ipoteza energiei de variație a formei, în cazul solicitării la tracțiune a arborilor cu concentrator circular, coeficientul s are expresia

$$s = \frac{5 - 2\mu + 2\mu^2}{2 - 2\mu + 2\mu^2}, \tag{9}$$

în care μ este coeficientul lui Poisson. Importanța practică a acestei metode constă în larga sa aplicabilitate la concentratori cu orice rază de curbură, pentru materiale tenace și fragile, pentru solicitări statice și variabile. La

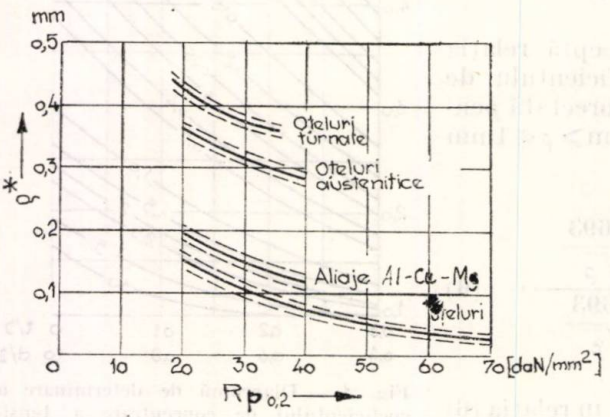


Fig. 5. — Lungimea fictivă de calcul pentru oțel în funcție de limita de curgere $R_{p0,2}$.

solicitări peste limita de curgere a materialului, variația coeficienților de concentrare a tensiunilor (1) și deformațiilor (2) în funcție de efortul unitar norminal este prezentată schematizat în figura 6 [15].

Pentru valori ale efortului unitar maxim la baza concentratorului inferioare limitei de curgere, coeficienții de concentrare a eforturilor și

deformațiilor sînt egali (relația 3). La depășirea limitei de curgere (depășirea domeniului de proporționalitate pe curba lui Hooke) α_σ scade și α_ε crește, ceea ce conduce la o reducere a vîrfurilor de tensiune de la baza

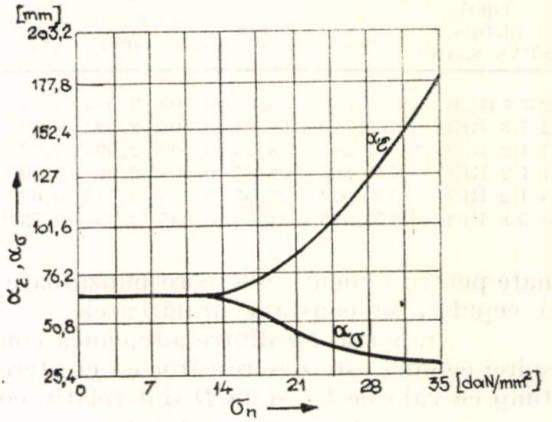


Fig. 6. — Variația coeficienților de concentrare a eforturilor și deformațiilor în funcție de efortul unitar mediu.

concentratorului, simultan cu încărcarea suplimentară a zonei centrale a secțiunii transversale (evidențiat ca efect macrostructural). În lucrarea [8] s-a stabilit că în domeniul plastic între cei trei coeficienți de concentrare a eforturilor există relația

$$\alpha_\sigma \alpha_\varepsilon = \alpha_H^2 . \tag{10}$$

În lucrarea [6] s-a elaborat o metodă grafică de determinare a coeficientului de concentrare a eforturilor în domeniul plastic, bazată pe relația (10), transformată, folosind relațiile (1) și (2), sub forma :

$$\sigma_{max}\varepsilon_{max} = \alpha_H^2 \sigma_n \varepsilon_n . \tag{11}$$

Fiind cunoscute $\alpha_k(\alpha_H)$, σ_n și ε_n (determinat pe curba caracteristică a materialului, fig. 7), rezultă că ecuația (11) reprezintă în coordonate $\sigma - \varepsilon$ o hiperbolă echilateră. Dacă efortul unitar nominal depășește valoarea limitei de curgere (punctul B, fig. 7), efortul unitar local maxim (σ_{max}) și alungirea locală maximă (ε_{max}) la baza concentratorului se determină ca reprezentînd coordonatele punctului B, parcurgînd traseul marcat cu săgeți $ADCB$ (fig. 7).

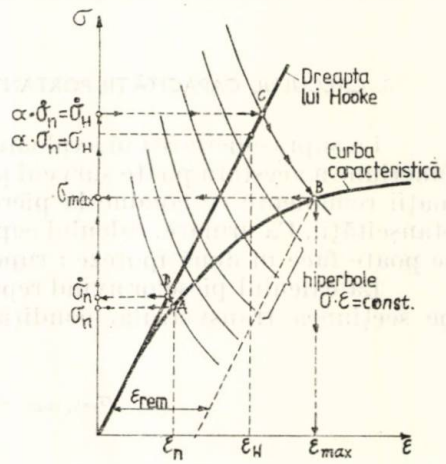


Fig. 7. — Determinarea eforturilor unitare la baza concentratorului de tensiuni pe curba caracteristică a materialului.

Pe baza metodelor expuse s-au determinat valorile coeficientului de concentrare a eforturilor pentru îmbinări filetate conice de tip normal (REGULAR), prezentate în tabelul 2. Din analiza acestor valori, determi-

Tabelul 2

Coeficienții de concentrare a eforturilor în îmbinările filetate conic de tip REGULAR
(Notații conform fig. 1)

Tipul filetului STAS 835-80	D mm	$2a$ mm	$\rho = r_f$ mm	$t = h$ mm	α_k					$\frac{t}{a}$	$\frac{t}{\rho}$
					[1]	[6]	]3]	[4]	[5]		
2 3/8 REG	60,080	56,08	0,508	2,993	5,34	5,09	5,15	5,04	3,07	0,099	5,892
2 7/8 REG	69,605	65,61	0,508	2,993	5,40	5,25	5,2	5,13	3,10	0,091	5,892
3 1/2 REG	82,293	78,29	0,508	2,993	5,52	5,36	5,25	5,23	3,15	0,076	5,892
4 1/2 REG	110,868	106,87	0,508	2,993	5,69	5,54	5,4	5,36	3,24	0,056	5,892
5 1/2 REG	132,944	127,95	0,635	3,742	5,67	5,54	5,4	5,36	3,36	0,058	5,893
6 5/8 REG	170,549	141,50	0,635	3,754	5,73	5,60	5,45	5,41	8,39	0,053	5,912

nate pentru dimensiunile corespunzătoare secțiunii primei spire angajate a cepului, se constată următoarele :

— raportul t/a dintre adîncimea concentratorului și raza de fund a spirei cepului este descrescător cu creșterea tipo-dimensiunii îmbinării, în timp ce valorile t/ρ și $2a/D$ sînt relativ constante ;

— valorile coeficientului de concentrare a eforturilor cresc cu creșterea tipo-dimensiunii îmbinării și au valori relativ ridicate ;

— diferitele metode de determinare a coeficientului de concentrare a eforturilor conduc la valori apropiate între ele, cu excepția metodei din lucrarea [5] ;

— metoda prezentată în lucrarea [6] conduce la observația că efectul de concentrare a tensiunilor crește odată cu creșterea limitei de curgere a oțelului ;

— metoda prezentată în lucrarea [5] conduce la valori mult mai mici ale coeficientului de concentrare față de celelalte metode.

3. CALCULUL CAPACITĂȚII PORTANTE A ÎMBINĂRILOR FILETATE CU UMĂR

La suprasolicitarea în exploatare a îmbinărilor cu umăr, scoaterea din funcțiune a acestora poate surveni prin rupere sau prin apariția unor deformații remanente ce conduc la pierderea preciziei filetului și la pierderea etanșeității. Ca urmare, calculul capacității portante a îmbinărilor cu umăr se poate face în două ipoteze : ruperea îmbinării și deformarea îmbinării.

La calculul pieselor avînd repartiția neunifomă a eforturilor unitare pe secțiunea transversală, condiția de rezistență este

$$\sigma_{ech,\,max} = \alpha \cdot \sigma_n = \frac{R}{c}, \tag{12}$$

în care R este caracteristica de rezistență a materialului ;

c — coeficientul de siguranță.

Dacă la materialele cu capacitate de deformare plastică se admite drept caracteristică de rezistență în relația (12) limita de curgere, materialul va fi utilizat necorespunzător deoarece efortul mediu pe secțiunea trans-

versală este mult inferior vîrfurilor de sarcină. Aceste materiale sînt capabile să reducă vîrfurile de sarcină prin curgeri locale, fără ca prin aceasta să existe riscul distrugerii piesei în ansamblu. Pe de altă parte, luarea în considerare a plastifierii complete a secțiunii transversale prezintă riscul ca deformațiile în punctele de solicitare maximă să devină necontrolabile, în special cînd gradul de neuniformitate a eforturilor pe secțiunea transversală este maxim. De aceea este necesară limitarea deformațiilor remanente în punctele de solicitare maximă la o anumită valoare, propusă 0,2% [3].

La filetele îmbinărilor cu umăr, această valoare este total acceptabilă, deoarece nu conduce la depășirea prescripțiilor de precizie a filetului. Astfel, dacă pasul filetului(5, 08 mm) crește cu 0,2%, aceasta reprezintă 0,0101 mm, adică 12,6% din valoarea cîmpului de toleranță la pas.

Pentru a efectua calculele capacității portante a îmbinării bazat pe admiterea unei alungiri remanente de 0,2%, se aplică metodologia din lucrarea [3], unde s-a introdus noțiunea de „limită de deformare", notată $R^*_{0,2}$, avînd semnificația unui efort unitar fictiv care s-ar dezvolta în piesă în ipoteza comportării elastice a materialului, ca efect al unei solicitări egale cu cea care conduce în realitate la producerea deformației remanente de 0,2%. Valoarea „limitei de deformare" este funcție de material și de forma constructivă a piesei. Pentru a obține o mărime independentă de natura materialului, limita de deformare se raportează la limita de curgere a materialului, obținînd

$$\delta_{0,2} = \frac{R^*_{0,2}}{R_c}. \tag{13}$$

Acest raport se poate determina la piesele cu concentrator de tensiuni cu relațiile aproximative [3]:

a) pentru oțeluri cu limită de curgere aparentă, R_c:

$$\delta_{0,2} \approx 1 + 0{,}95(\alpha_k - 1)\sqrt[4]{\frac{20}{R_c}}, \tag{14}$$

b) pentru oțeluri cu limită de curgere convențională (pentru o alungire prescrisă de 0,2%);

$$\delta_{0,2} \approx 1 + 0{,}75\,(\alpha_k - 1)\sqrt[4]{\frac{30}{R_{p0,2}}}. \tag{15}$$

Capacitatea portantă a îmbinării cu umăr, notată F, se determină pe baza relației (12) introducînd aria secțiunii transversale a cepului îmbinării, A_c și ținînd seama de relația (13):

$$F = \frac{\delta_{0,2} R_{0,2} A_c}{\alpha c}. \tag{16}$$

Valoarea coeficientului de siguranță se determină în funcție de modul de degradare a îmbinării: rupere sau deformare.

Coeficientul de siguranță la deformare este funcție de proprietățile plastice ale materialului, exprimate prin „alungirea la rupere", A_5. Se recomandă determinarea coeficientului de siguranță cu relația [10]:

$$c_{min} = 2 - \sqrt{\frac{A_5}{50}} > 1{,}25. \tag{17}$$

Valoarea coeficientului de siguranță se majorează ținînd seama de variațiile sarcinii de exploatare, de împrăștierea valorilor caracteristicilor de rezistență ale materialului etc., adoptînd

$$c = c_{min} c_1 c_2 \ldots c_n, \tag{18}$$

în care fiecare din coeficienți ia în considerare o anumită influență. Rezultă astfel :

a) $c_1 = 1, 1$, considerînd împrăștierea caracteristicilor mecanice în limitele a 10% ;

b) $c_2 = 1{,}2$, considerînd gradul de neuniformitate a solicitării și suprasarcinile în limitele a 20%.

Pe baza metodologiei expuse s-a determinat capacitatea portantă a îmbinărilor cu umăr de tip normal (REG), prezentată în tabelul 3, considerînd limita de curgere recomandată uzual pentru materialul acestora $R_{p\,0,2} = 882$ N/mm^2, (90 Kgf/mm^2).

Tabelul 3

Capacitatea portantă a îmbinărilor cu umăr de tip REGULAR

Tipul filetului	α_k	$\delta_{0,2}$	F [kN]
2 3/8 REG	5,34	3,34	579
2 7/8 REG	5,40	3,51	765
3 1/2 REG	5,52	3,57	1073
4 1/2 REG	5,69	3,67	1857
5 1/2 REG	5,67	3,66	2624
6 5/8 REG	5,73	3,69	2765

4. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A CAPACITĂȚII PORTANTE A ÎMBINĂRILOR CU UMĂR

Pentru verificarea experimentală a metodei de calcul a capacității portante a îmbinărilor cu umăr, s-a proiectat și realizat o îmbinare cu umăr de tip 4 1/2" REG astfel încît să poată fi solicitată pînă la distrugerea pe un stand de încercări. S-au executat trei perechi de îmbinări cep-mufă din oțel 41CrNi 12 (STAS 791—80), avînd limita de curgere reală, determinată ca medie a rezultatelor obținute prin șase încercări la tracțiune a epruvetelor, de circa 650 N/mm^2.

În scopul determinării atît a valorilor solicitării la care survine curgerea și ruperea îmbinărilor, cît și pentru stabilirea punctelor de solicitare maximă a cepului și mufei la încercarea la tracțiune, pe suprafața interi-

oară a cepului și la suprafața exterioară a mufei s-au aplicat traductori electrorezistivi de tip rozetă. Forma îmbinării și poziția traductorilor în cele trei experimentări sînt prezentate în figura 8.

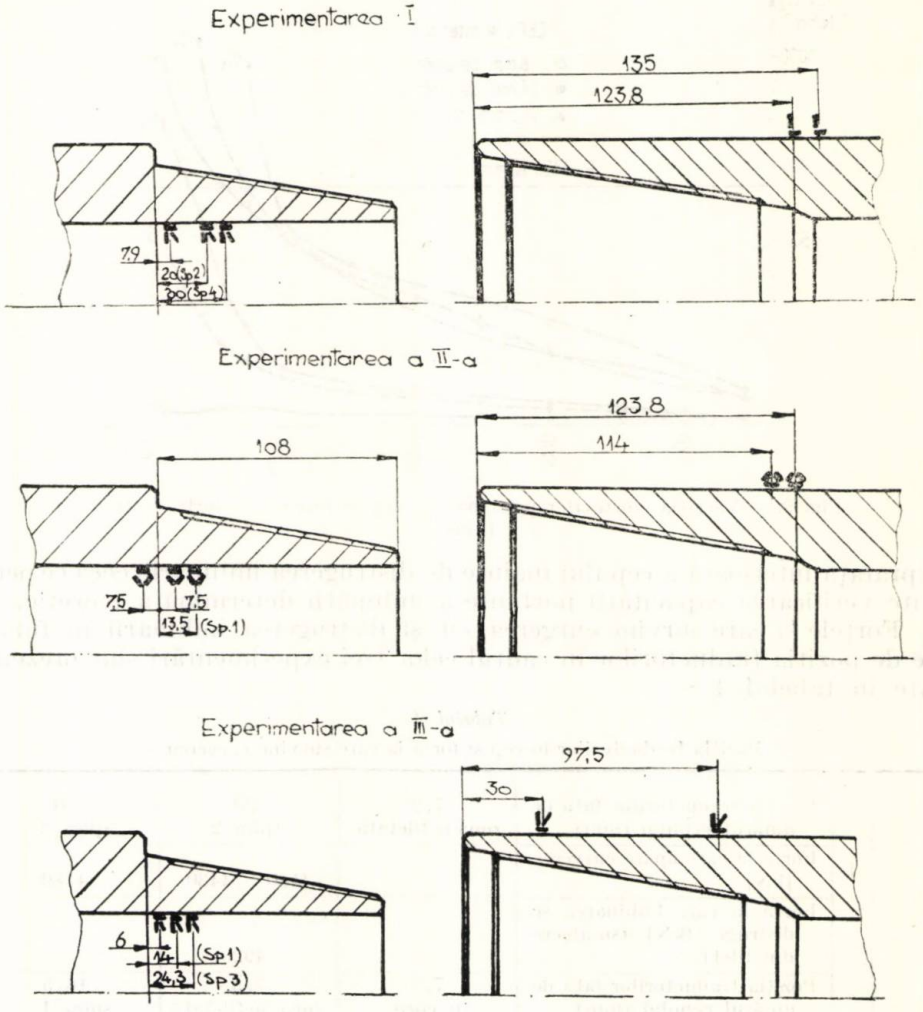


Fig. 8. — Forma îmbinării și poziția traductorilor în cazul experimentărilor.

Încercarea s-a efectuat la tracțiune, îmbinarea fiind înșurubată manual (fără forță de prestrîngere). Rezultatele măsurătorilor au fost prelucrate sub forma eforturilor unitare principale și a direcțiilor principale. Variația tensiunilor principale cu forța de tracțiune pentru cep și mufă este reprezentată în figurile 9 și 10 pentru experimentarea a III-a, iar variația tensiunilor principale în lungul axei filetului cepului și mufei, pentru diferite valori ale forței axiale, este reprezentată în figura 11, pentru experimentările a II-a și a III-a.

În cazul experimentărilor I și a II-a, distrugerea îmbinării s-a produs prin forfecarea filetului, iar în cazul experimentării a III-a prin ruperea cepului. În toate cazurile s-a atins valoarea limitei de curgere la

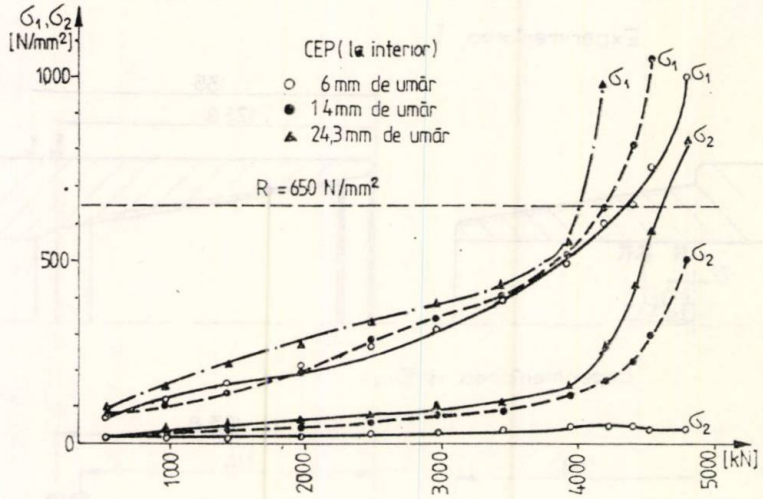


Fig. 9. — Variația eforturilor principale în cep în funcție de forța de tracțiune.

suprafața interioară a cepului înainte de distrugerea îmbinării, ceea ce permite verificarea capacității portante a îmbinării determinată teoretic.

Forțele la care survine curgerea, cît și distrugerea îmbinarii în funcție de poziția traductorilor în cadrul celor trei experimentări sînt prezentate în tabelul 4.

Tabelul 4

Poziția traductorilor în cep și forța la care survine curgerea

Experimentarea	I	Poziția traductorifor față de umăruf cepului (mm)	7,9 zona nefiletată	20 spira 2	30 spira 4
		Forța la care apare curgerea [kN]	—	4180...4430	4180
		Forța la care îmbinarea se distruge [kN] (smulgere din filet)		4920	
	II	Poziția traductorilor față de umărul cepului (mm)	7,5 în corp	7,5 zona nefiletată	16,5 spira 1
		Forța la care apare curgerea [kN]	4400...4480		4220...4400
		Forța la care îmbinarea se distruge [kN] (smulgere din filet)		5100	
	III	Poziția traductorilor față de umărul cepului (mm)	6 zona nefiletată	14 spira 1	24,3 spira 3
		Forța la care apare curgerea [kN]	4410	4426	3904
		Forța la care îmbinarea se distruge [kN] (ruperea cepului)		5098	

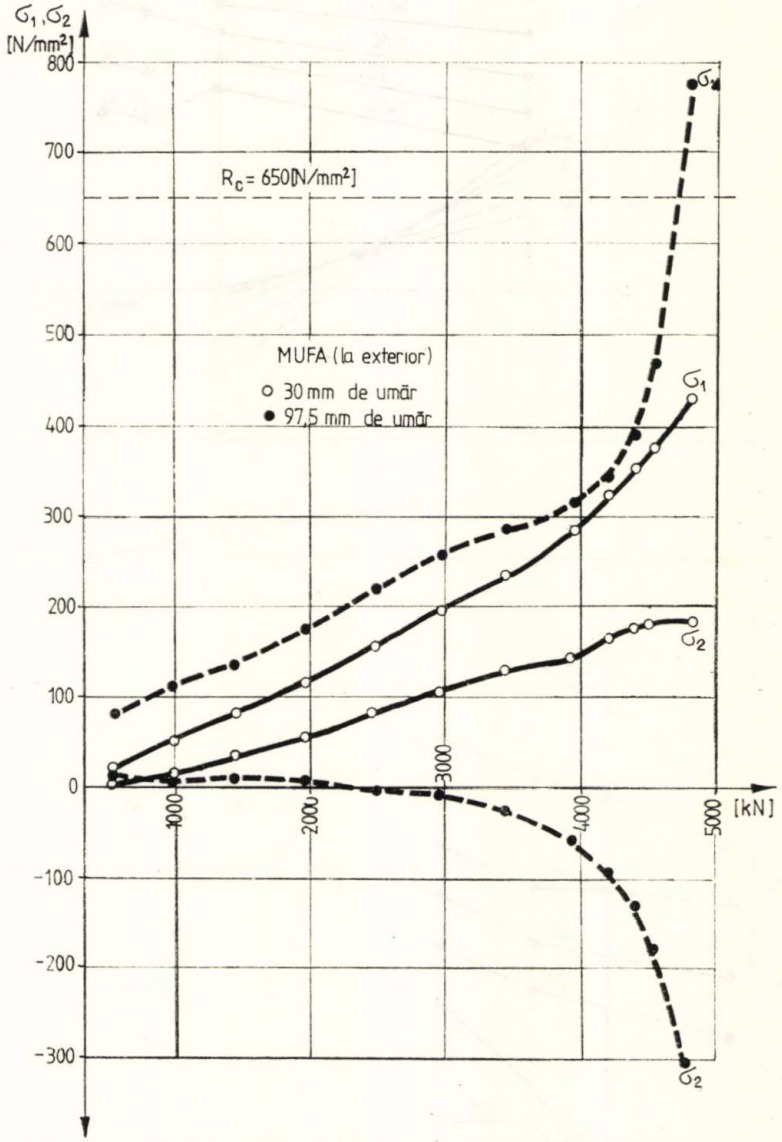


Fig. 10. — Variația eforturilor principale în mufă în funcție de forța de tracțiune.

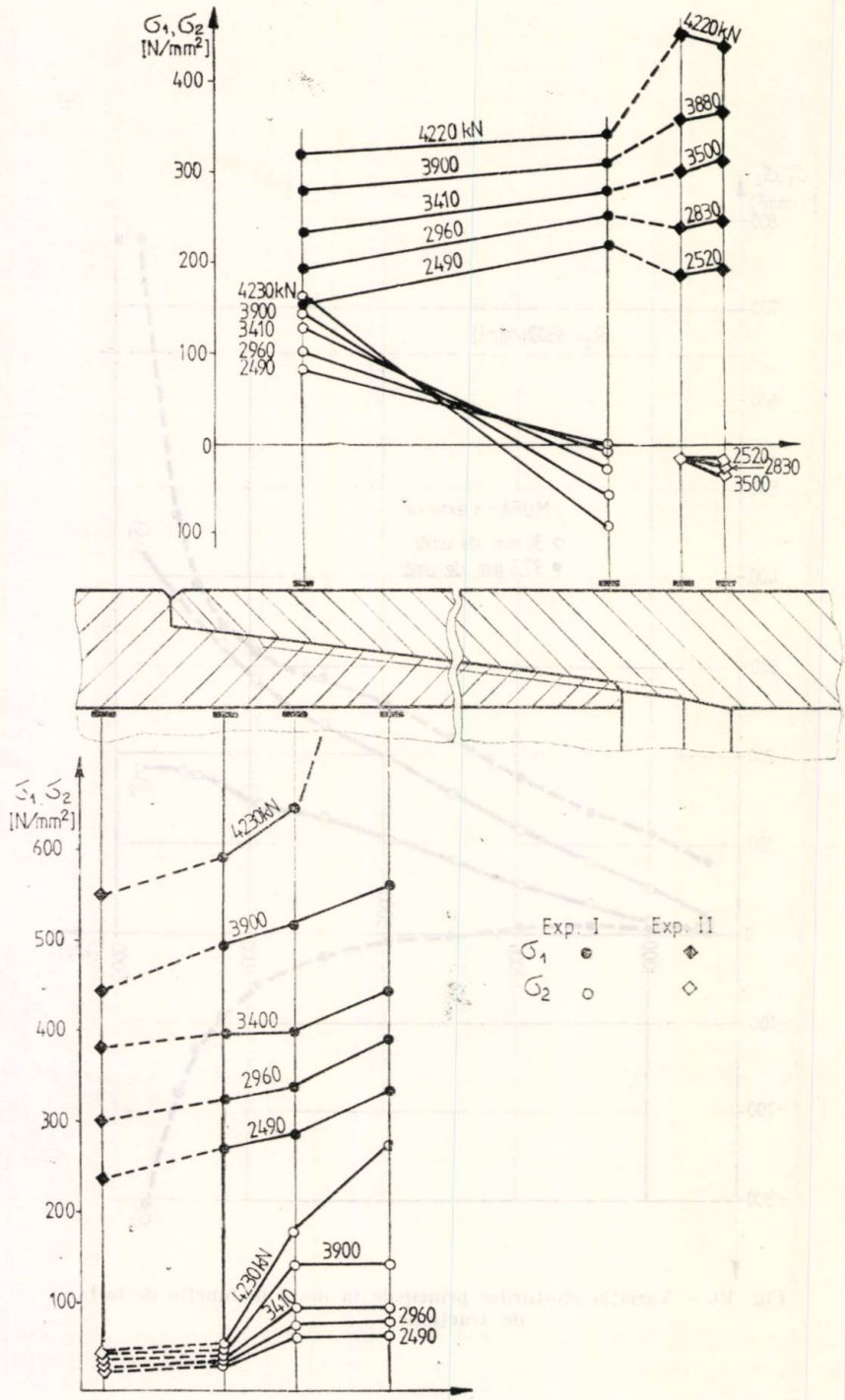


Fig. 11. — Variația tensiunilor principale în lungul axei cepului și mufei pentru diferite valori ale sarcinii axiale.

5. CONCLUZII

1) Capacitatea portantă la tracțiune a îmbinărilor s-a determinat luînd în considerare atît concentrarea tensiunilor datorită filetului, cît și comportarea materialului la depășirea limitei elastice în vecinătatea concentratorului de tensiuni.

2) Cele trei încercări la tracțiune ale îmbinărilor 4 1/2" REG au scos în evidență că efortul axial maxim se dezvoltă la suprafața interioară a cepului aproximativ la 25 mm de umăr, corespunzător celei de-a treia spire angajate.

3) Atingerea valorii limitei de curgere are loc la suprafața interioară a cepului în ordinea : spira *3*, spira *1* și zona nefiletată, la valori ale forței axiale prezentate în tabelul 4. Această observație concordă bine cu datele publicate în literatura de specialitate, [9]. Ținînd seama că ruperea cepului a intervenit în dreptul primei spire angajate, rezultă că atingerea limitei de curgere întîi în dreptul celei de-a treia spire la suprafața interioară a cepului are caracter local.

4) Eforturile principale, σ_1 și σ_2 sînt practic identice ca valoare și alură de variația în lungul axei filetului cu eforturile axiale și circumferențiale și nu se modifică sensibil cu creșterea forței de tracțiune.

5) Produsul dintre aria secțiunii transversale a cepului în golul primei spire angajate (64,61 cm^2) și valoarea limitei de curgere ($R_{p0,2} = 650$ N/mm^2) conduce la valoarea $F = 4200$ kN, identică cu valoarea forței axiale la care survine curgerea în dreptul primei spire angajate. De asemenea, produsul dintre aria secțiunii transversale a cepului și valoarea rezistenței la rupere (839 N/mm^2, determinată ca medie a 6 valori) conduce la valoarea forței de rupere de 5420 kN, comparabilă cu forța reală de rupere.

6) Pentru compararea rezultatelor teoretice și experimentale privind determinarea capacității portante a îmbinărilor cu umăr, se calculează capacitatea portantă a îmbinării 4 1/2" REG luînd în considerație limita de curgere $R_{p0,2} = 650$ N/mm^2, rezultînd $F = 1425$ kV. Ținînd seama că în calcule s-a admis un coeficient de siguranță de 2,02, capacitatea portantă teoretică în ipoteza admiterii unei deformații plastice remanente de 0,2% este de 2880 kN.

Din datele prezentate în tabelul 4 rezultă că în dreptul primei spire angajate se atinge limita de curgere la forța de tracțiune de 4199 kN pentru toate cele trei experimentări.

Comparînd rezultatele teoretice și experimentale, rezultă că sarcina limită determinată analitic este de circa 1,46 ori mai mică decît sarcina de curgere determinată experimental. Această diferență se explică prin faptul că la determinarea analitică a capacității portante deformația maximă în zona concentratorului de tensiuni s-a limitat la 0,2 %, în timp ce la încercarea la tracțiune deformația plastică crește progresiv depășind această valoare pînă la plastifierea întregii secțiuni, ceea ce în mod evident corespunde unei solicitări mai mari.

Rezultă că metodologia de calcul aplicată este acoperitoare, sarcina teoretică fiind mai mică decît forța reală la care survine curgerea îmbinării.

Primită la redacție la 11 noiembrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. J. BART, H. NEUBER, E. SCHNACK *Kerbfaktordiagramme nach numerischen Berechnungsverfahren*, Konstruktion **28**, *6* (1976)
2. K. WELLINGER M. PROGER, *Grösseneffekte beim Kerbzugversuch mit Stahl*, Materialprüfung **10**, *12* (1968).
3. * * * V. D. I. Richtlinien 2226, *Empfehlung für die Festigkeitsberechnung metallischer Bauteile*, V. D. I. Verlag, Düsseldorf, 1965.
4. C. PETERSEN, *Die Vorgänge im Zügig und Wechselnd beanspruchter Metallgefüge III.* Z. Metallkunde., **42**, *6* (1951).
5. * * * D. D. R. Standard 19340/03, *Dauerschwingfestigkeit*, Sept. 1974.
6. H. NEUBER, *Über die Berücksichtigung der Spannungskonzentration bei Festigkeitsberechnungen*, Konstruktion, **20**, 7 (1968).
7. L. BERTELE, *Zur Frage der Lebensdauervorhersage umlaufend gekerbter Stahlrundproben unter wiederholter zug-druck-beanspruchung*, Diss. T. U. München, 1969.
8. H. NEUBER, *Theory of Stress Concentration for Shear-Strained Prismatical Bodies With Arbitrary Nonlinear Stress-Strain Law*, Trans. of ASME (J. of Appl. Mech) **28** (1961).
9. V. HAUK, H. KOEHLER, *Untersuchungen an Gestänge-verbinder* 3 1/2" *IF Gestänge unter Statischer Überlagerter Torsions und Zugbeanspruchung*, Erdoel Z., **78**, Okt. (1962).

VARIAȚIA COEFICIENTULUI DE ADERENȚĂ ȘI DETERMINAREA VITEZEI AUTOVEHICULELOR DUPĂ URMELE DE FRÎNARE

de CH. VASILIU

Cu toate că în lucrările de specialitate sînt prezentați factorii care influențează mărimea coeficienților de aderență, dintre pneurile automobilelor și calea rutieră, totuși, indicarea modului de reținere a acesteia în calculele analitice ale fenomenului de frînare prezintă lacune, cu repercusiuni privind elucidarea circumstanțelor de producere a accidentelor de circulație rutieră.
În lucrare, după prezentarea factorilor amintiți, se propun soluții de determinare a vitezei autovehiculelor după urmele de frînare, ținînd seama de variabilitatea coeficienților de aderență.

1. GENERALITĂȚI

În marea majoritate a accidentelor grave de circulație se constată — pe suprafața căii rutiere — urme accentuate de frînare, ceea ce denotă că, aproape în exclusivitate, la frînările de urgență, se ajunge la blocarea roților frînate, fenomen ce influențează asupra aderenței pneurilor.

Practica arată că experții tehnici, în astfel de cazuri, sînt interesați să determine viteza autovehiculului înainte de coliziune sau înainte de începerea frînării, folosind pentru aceasta distanța de oprire, determinată după urmele de frînare, imprimate pe partea carosabilă a căii rutiere; în relațiile matematico-mecanice, cu ajutorul cărora se răspunde la acest obiectiv al expertizelor tehnice, este folosit în mod normal, coeficientul de aderență dintre pneurile roților autovehiculului și calea rutieră. În folosirea acestui coeficient se presupune că acesta este constant în timpul frînării, adică este independent de viteză și de greutatea autovehiculului; el este preluat din tabele în care mărimea sa are valori medii, în funcție de natura și starea căii rutiere [1 ; 2 ; 3]; este adevărat că unii autori [3] recomandă ca valorile să fie controlate în condițiile concrete ale producerii accidentului.

În manuale de specialitate străine [4] se dau liste mai lungi cu detalierea diferitelor condiții ale șoselelor și ale suprafeței acestora, luînd în considerare pantele și curbele.

Într-o lucrare recentă, apărută la noi în țară [5] referitoare la expertiza tehnică auto, sînt prezentate valorile coeficientului de aderență, în funcție de natura căii rutiere, ca în tabelul 1.

Acest mod de a alege o valoare pentru coeficientul de aderență, numai după condițiile de drum, implică unele riscuri de a deforma prezentarea realității fenomenului, cu implicații — uneori grave — asupra fundamentării hotărîrilor. Neglijarea multitudinii factorilor, cu influența lor diferențiată care intervin în fenomenul aderării pneurilor — de diferite tipuri — cu căile rutiere, de diferite naturi și stări, aderare care se produce în diferite condiții de mediu și mișcare, nu poate fi apreciată decît ca o mare simplificare a fenomenului, ipotezele folosite fiind, în mare parte, lipsite de realism.

Asupra acestui mod de considerare a coeficientului de aderență, au mai fost relevate rezerve, analizîndu-se influența variației coeficientului

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 5, 1982, P. 545–560

Tabelul 1

Mărimea coeficienților de aderență [5]

Natura căii rutiere	Starea căii	
	uscată	umedă
Beton sau beton asfaltic nou	0,7—0,8	0,5—0,6
Asfalt tratat cu criblură	0,6—0,7	0,4—0,5
Asfalt lustruit	0,5—0,6	0,35—0,45
Piatră cubică	0,4—0,7	0,3—0,4
Piatră de rîu	0,4—0,6	0,3—0,4
Piatră spartă	0,4—0,5	0,4—0,5
Pămînt bătătorit	0,5—0,6	0,3—0,4
Nisip	0,5—0,6	0,6—0,7
Zăpadă	0,2—0,3	0,1—0,2
Polei	0,1—0,15	—

de aderență asupra capacității de frînare a automobilului [6]. Aspectele esențiale ale feomenului aderenței pneurilor autovehiculelor vor fi analizate, cu referire specială la determinarea vitezei vehiculelor după urmele de frînare, necesară efectuării expertizelor tehnice auto.

2. COEFICIENTUL DE ADERENȚĂ ȘI FACTORII CARE INFLUENȚEAZĂ MĂRIMEA SA

2.1. COEFICIENTUL DE ADERENȚĂ

Este unanim acceptat că raportul dintre forța tangențială maximă la roată (dezvoltată în pata de contact dintre pneu și cale), egală cu forța de aderență F_{ad}, și reacțiunea normală căii Z_r, asupra roții, să fie denumit coeficient de aderență φ:

$$\varphi = \frac{F_{r\,max}}{Z_r} = \frac{F_{ad}}{Z_r}. \qquad (1)$$

Forța de aderență, care ia naștere în timpul rulării roților pe cale, este rezultată din însumarea a doi termeni : forța de adeziune, de natură moleculară și forța de histerezis, de natură vîscoelastică.

Coeficientul de adeziune este preponderent pe suprafețe netede și uscate, iar coeficientul de histerezis este preponderent pe suprafețe rugoase și umede.

Cercetările întreprinse asupra coeficientului de aderență pe diferite drumuri și în diferite condiții, au dat posibilitatea stabilirii factorilor care influențează mărimea coeficientului de aderență, precum și modul și gradul de influențare a acestora.

Investigațiile — în acest domeniu — din ultimii 10—15 ani, au demonstrat că la studierea comportării unui autovehicul în timpul frînării, trebuie să se ia în considerație o multitudine de factori deoarece, în afară de comportarea specifică a pneurilor în timpul rulării, automobilul este un mobil suplu, cu ținută dianmică și caracteristici proprii în timpul mișcării decelerate ; construcțiile moderne de automobile prevăd dispozitive

de asistență în sistemul de frînare, repartitoare de presiune pentru evitarea sau diminuarea blocajului roților, toate în scopul de a mări eficacitatea frînării.

În cele ce urmează ne vom limita la aspectele ce se încadrează în subiectul propus spre prezentare, aspecte de esențială importanță pentru investigarea amintită. În acest scop, factorii care influențează mărimea și variația coeficientului de aderență vor fi grupați în :

— factori dependenți de calea rutieră,
— factori dependenți de autovehicul,
— factori dependenți de mișcarea autovehiculului.

2.2. FACTORI DEPENDENȚI DE CALEA RUTIERĂ

Natura și rugozitatea stratului superficial de acoperire al căii au o influență determinantă asupra coeficientului de aderență. Totodată, starea de umiditate și de curățenie a suprafeței căii influențează puternic asupra mărimii coeficientului de aderență ; pe căile cu suprafețe netede, starea de umiditate micșorează cu 30...50% coeficientul de aderență. Suprafețele umede, însă rugoase, ale căror proeminențe produc — în contact cu pneul — zone de frecare uscată, sînt mai favorabile aderenței, în timp ce suprafețele netede (asfaltice) și lustruite, care mențin o peliculă de apă (prin adeziune) între suprafețele de contact cu pneul, au o influență nefavorabilă.

Mărimea coeficientului de aderență se reduce considerabil în cazul prezenței pe suprafețele carosabile netede a prafului fin și mijlociu (1...5 μm) sau chiar a nisipului fin (0,01...0,25 mm), mai ales cînd este umed, mărind considerabil pericolul de accidente.

Eventuale pelicule de murdărie de pe șosea, fac ca la începutul unei ploi (mai ales ploile moderate) coeficientul de aderență să scadă considerabil (apariția stratului de mîzgă), pentru ca după stabilirea unei pelicule numai din apă, coeficientul să capete valoarea corespunzătoare unei șosele umede [1]. S-a constatat, de asemenea, că în timpul exploatării căilor rutiere, cu acoperiri din beton și beton asfaltic, mărimea coeficientului de aderență se modifică, în funcție de uzura stratului superior al suprafeței carosabile, astfel :

— în prima fază, coeficientul de aderență scade, datorită ușoarei refulări a liantului către suprafața căii (rugozitatea scade) ;

— în a doua fază, coeficientul de aderență crește, deoarece pelicula de liant este îndepărtată progresiv de traficul rutier (rugozitatea crește) ;

— în a treia fază, cea mai lungă în timp, coeficientul de aderență scade progresiv, potrivit lustruirii rugozităților superficiale, provocată de uzarea treptată a stratului superior al căii rutiere (micșorarea distanței dintre microparticulele dure).

Aceste variații ale aderenței pneurilor pe căile rutiere moderne, provocate de traficul rutier, se manifestă în special asupra coeficientului de aderență la alunecare φ_a, după blocarea roților automobilului.

Încercări experimentale, efectuate pe o autostradă cu un trafic de mare intensitate (2500 autovehicule în 24 ore), partea carosabilă fiind acoperită cu beton astfaltic, au evidențiat influența uzurii căii asupra variației coeficientului de aderență, în funcție și de viteza automobilului [7]. În figura

1, sînt reprezentate rezultatele determinărilor coeficientului de aderență la alunecare, φ_a, în trei stadii de uzură a stratului de acoperire a părții carosabile a autostrăzii. Deplasarea curbei *1*, paralelă cu ea însăși în poziția *2* (scăderea coeficientului φ_a, fără modificarea înclinării), se datorește lustruirii vîrfurilor particulelor minerale dure, iar modificarea pantei curbei la stadiul *3* se explică prin micșorarea golurilor dintre particulele minerale (care au crescut în suprafață, prin uzare) și astuparea lor datorită traficului.

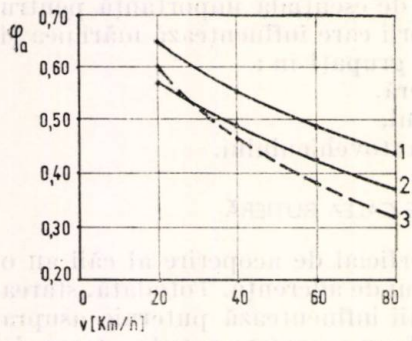


Fig. 1

Se poate conclude că prin uzare, coeficientul de aderență al șoselelor moderne scade.

În tabelul 2 se prezintă mărimea coeficienților de aderență la alunecare, φ_a, în funcție de natura și starea căii rutiere, după indicațiile academicianului prof. dr. Alfred Jante, din Republica Democrată Germană [8].

Tabelul 2

Mărimea coeficienților la aderență la alunecare [8]

Suprafața căii rutiere — curată —	Starea căii	
	uscată	umedă
Beton, 2 ani vechime	0,74	0,71
Beton, 5 ani vechime, murdar	0,68	0,64
Beton-asfaltic	0,80	0,76
Calipuri de lemn	0,79	0,48
Pietriș	0,61	0,57
Pămînt bătătorit	0,65	0,52

2.3. FACTORI DEPENDENȚI DE AUTOVEHICUL

Mărimea coeficienților de aderență depinde, între altele și de tipul și construcția anvelopei (profilul, rigiditatea pneului), de presiunea interioară din pneu și de încărcarea verticală a roților. Folosirea anvelopelor cu coama profilată conduce la o creștere de pînă la 30% a coeficientului de aderență, față de cel obținut la pneuri cu profile uzate. Mai ales pe drumuri umede, lamelele pneurilor produc zone de frecare uscată, favorabile aderenței; în același timp canalele dintre profile ajută la evacuarea apei de pe suprafața de contact (un pneu — la 90 km/h, și pe ploaie mijlocie — evacuează 3....4 l de apă pe secundă). Rigiditatea pneului, fiind legată de deformațiile cauciucului, influențează coeficientul de frecare prin histerezis. De asemenea, elasticitatea pneului face ca odată cu creșterea alunecării sau a patinării pînă la 20%, să crească și coeficientul de aderență, datorită măririi numărului de elemente de contact cu drumul, care alunecă simultan pe acesta.

Pneurile au o ținută la frecare în contact cu calea rutieră, ce depinde mult de compoziția cauciucului și de construcția pneului. Această variație

în comportarea pneurilor, din punct de vedere al aderenței, a fost sesizată încă din 1932, cînd Allgaier remarca variația coeficientului de aderență între diferitele pneuri [9]. Încercări mai recente, efectuate pe beton-asfaltic, cu nouă pneuri diferite, de construcție radială, de aceeași dimensiune și montate pe același automobil, au relevat diferențe apreciabile de comportarea la frînare. În tabelul 3, sînt redate valorile medii ale coeficienților de aderență — longitudinal și lateral — pentru pneurile încercate

Tabelul 3

Variația coeficientului mediu de aderență, la pneuri diferite [10]

Marca pneului	longitudinal		transversal	
	uscat	umed	uscat	umed
Michelin	0,795	0,652	0,745	0,615
Bridgestone	0,795	0,592	0,713	0,600
Yokohama	0,795	0,531	0,713	0,574
Semperit	0,828	0,619	0,741	0,621
Uniroyal	0,845	0,619	0,724	0,590
Dunlop	0,851	0,638	0,724	0,615
Goodyear	0,851	0,616	0,724	0,615
Continental	0,864	0,714	0,713	0,625
Pirelli	0,870	0,602	0,724	0,615

[10]. Se constată că între mărimile coeficienților de aderență — în direcție longitudinală — sînt diferențe ce ajung pînă la 9,5%, iar în direcție laterală — pînă la 4,5%, pe căi asfaltate uscate, iar pe căi umede de 34,5%, respectiv de 8,8%; pe căile umede influența sculpturii de pe coama pneului este mai evidentă.

Coeficientul de aderență este influențat de presiunea interioară a pneului; micșorarea presunii la un pneu care rulează pe cale dură, conduce la mărirea suprafeței de contact și la o creștere, relativ redusă, a coeficientului de aderență. Pe căi cu suprafețe dure și umede, creșterea presiunii interioare conduce la mărirea aderenței, datorită măririi presiunii pe cale și, în consecință, a evacuării peliculei de apă dintre banda de rulare și calea rutieră. În timpul opririlor de urgență (accidente), creșterea temperaturii suprafeței pneurilor, datorită acumulării de căldură în straturile superficiale (cauciucul este rău conducător de căldură) poate provoca modificări substanțiale ale mărimii coeficientului de aderență. În figura 2 se prezintă variația coeficientului de frecare al cauciucului în funcție de temperatură [11].

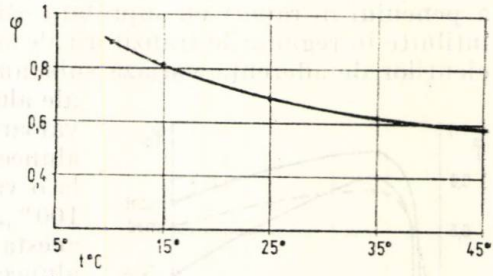


Fig. 2

Coeficientul de aderență variază cu încărcarea verticală a roții, scăzînd cu creșterea încărcării; această variație este destul de redusă pentru ca, practic, mărimea coeficientului de aderență să poată fi considerată con-

stantă. Dar autovehiculele se comportă diferit în timpul frînărilor de urgenţă, conducînd la distanţe de oprire, pentru anumită viteză dată, mult diferite între ele.

Aşa cum s-a mai arătat, autoturismele moderne au prevăzute dispozitive contra blocării roţilor la frînare bruscă, unele au sisteme de suspensie, cu efecte asupra performanţelor de frînare sau care modifică presiunile din sistemul de frînare, diminuînd influenţa transferului de greutate şi a variaţiilor de încărcătură. Astfel, apar aşa-numiţii coeficienţi aparenţi de aderenţă, în funcţie de tipul şi construcţia automobilului. Mărimile unor atari coeficienţi de aderenţă, bazaţi pe distanţele de oprire a patru autoturisme [12], sînt redate în tabelul 4. Viteza iniţială de încercare la frînare a autovehiculelor a fost de 112,654 km/h (70 mille/oră), iar încercările s-au efectuat pe beton-asfaltic uscat.

Tabelul 4

Mărimea coeficientului de aderenţă la vehicule diferite [12]

Vehiculul	φ
Citroën SM	0,92
Mercedes-Benz 450 S.L.C.	0,80
Chevrolet-Monte Carlo	0,73
Thunderbird	0,72

2.4. FACTORI DEPENDENŢI DE MIŞCAREA AUTOVEHICULULUI

2.4.1. Mişcarea relativă dintre pneu şi cale

În regim de frînare, datorită elasticităţii cauciucului, pneul, în zona de contact cu calea, se deformează tangenţial, influenţînd favorabil asupra aderenţei.

Dacă forţa de frînare devine prea mare, are loc o alunecare relativă a peneului în raport cu suprafaţa căii rutiere. În astfel de cazuri, curent întîlnite în regimurile tranzitorii ale mişcării automobilelor, mărimea coeficienţilor de aderenţă variază substanţial cu alunecarea. La procente mici ale alunecării, coeficientul creşte pînă la o valoare maximă φ, corespunzătoare unei alunecări de 17...22%, scăzînd apoi pînă la o valoare minimă pentru alunecarea de 100%, adică la blocarea roţilor frînate; acesta este coeficientul de aderenţă la alunecare sau coeficientul de frecare la alunecare a pneului, φ_a.

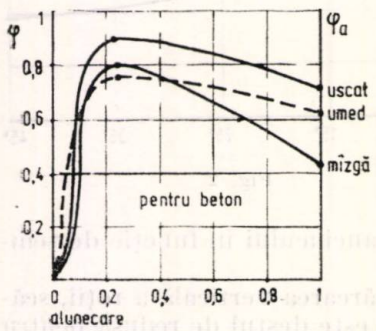


Fig. 3

În figura 3 se prezintă variaţia coeficientului de aderenţă în funcţie de alunecare, pentru o cale din beton, în trei stări: uscată, umedă, precum şi murdară şi umedă (cu mîzgă) [8].

Se constată că la blocarea roților, în cazul reprezentat de diagramele din figura 3, coeficientul de aderență la alunecare are valori mult diminuate față de valorile maxime, după starea suprafeței căii, astfel:

$\varphi_a = 0{,}78\ \varphi$ pentru beton uscat,
$\varphi_a = 0{,}85\ \varphi$ pentru beton umed,
$\varphi_a = 0{,}55\ \varphi$ pentru beton cu mîzgă.

Urmele de frînare continui de pe suprafețele carosabile indică o frînare cu blocarea roților, în astfel de cazuri — des întîlnite — trebuind să se folosească coeficienții de aderență la alunecare: $\varphi_a < \varphi$.

2.4.2. Viteza de circulație a automobilului

În timpul mișcării frînate a automobilului, apare o frecare dinamică între pneu și calea rutieră, cea mai mare parte a energiei pierdute repartizîndu-se între adeziune, alunecare (tîrîre), deformarea pneului și desprinderea de materie (de pe coama pneului și de pe suprafața șoselei).

Mărimea coeficienților de aderență, influențată de factorii anterior prezentați, descresc odată cu creșterea vitezei de circulație a automobilului. Descreșterea este mai accentuată pe drumurile umede; micșorarea, în acest caz, poate atinge 30 ... 50%, la viteze cuprinse între 20...65 km/h și este mai puțin accentuată la viteze mai mari [13]. De asemenea, se constată o variație diferită a valorii maxime φ, a coeficienților de aderență, față de cea a coeficientului de aderență la alunecare, φ_a (fig. 4). În această figură este reprezentată variația coeficienților φ (curba *1*) și φ_a (curba *2*), în funcție de viteză, pe o șosea din beton asfaltat, determinată prin metoda „roții a cincea" [14]. La această determinare experimentală, valorile maxime ale coeficientului de aderență φ corespund unei alunecări $a = 0{,}12...0{,}17$.

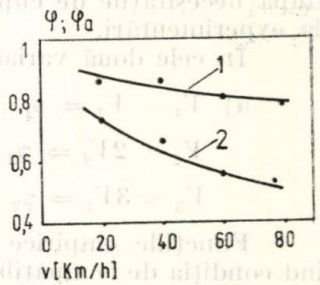


Fig. 4

Se constată că în condițiile unei șosele din beton asfaltat, în stare uscată, coeficientul de aderență la alunecare este $\varphi_a = 0{,}74$ la viteza de 20 km/h, pentru ca la viteza de 80 km/h să scadă la $\varphi_a = 0{,}52$, deci o scădere de 30%.

3. DETERMINAREA ANALITICĂ A VITEZEI AUTOVEHICULELOR

3.1. PREZENTAREA ANALITICĂ A VARIAȚIEI COEFICIENȚILOR DE ADERENȚĂ

Mărimea coeficienților de aderență se determină numai experimental, în condițiile în care acțiunea factorilor influenți urmează a fi evidențiați. Dacă factorii rutieri și factorii tehnici (dependenți de autovehicul) sînt menținuți în același stadiu în tot timpul experimentării, mărimea coeficienților de aderență depinde numai de viteza de circulație.

Datele rezultatelor experimentale sînt prezentate tabelar și grafic. Curbele reprezintă variația coeficientiului de aderență, pentru o anumită acoperire și stare a căii rutiere, un anumit pneu (construcție, presiune

etc.), în funcție de viteza de deplasare a automobilului; astfel de grafice sînt în figurile 1 și 3.

O analiză bibliografică a cercetărilor din domeniu, conduce la concluzia că majoritatea — dacă nu totalitatea — curbelor de variație a mărimii coeficienților de aderență în funcție de viteza de circulație, reprezintă ramuri de parabole convexe, cu ordonate în originea axelor de coordonate, curbe care nu intersectează axa absciselor (nu avem aderență nulă).

Funcția empirică, care să concorde cu curbele amintite, ar corespunde unei funcții de gradul doi, cu trei constante, de forma:

$$\varphi(V) = \alpha + \beta V + \gamma V^2 \tag{2}$$

în care φ este mărimea coeficientului de aderență;

V — viteza autovehiculului.

Pentru evaluarea constantelor, α, β și γ, se folosește metoda punctelor selecționate, alegîndu-se trei puncte caracteristice de pe graficul de variație.

Pentru comoditatea calculului, vitezele se exprimă în km/h, iar pentru alegerea celor trei abscise se poate folosi o progresie aritmetică cu rația $r = \Delta V = V_1$, sau o progresie geometrică cu rația $q = \Delta V = 2V_1$, după necesitățile de cuprindere a valorilor extreme ale vitezelor folosite la experimentări.

În cele două variante, punctele selecționate vor fi:

a) $V_1 = V_1 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_1$,
$V_2 = 2V_1 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_2$,
$V_3 = 3V_1 \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_3$,

b) $V_1 = V_1 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_1$,
$V_2 = 2V_1 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_2$,
$V_3 = 4V_1 \Rightarrow \varphi_3 = \varphi_3$.

Funcțiile empirice se pot prezenta sub formă de determinant, scriind condiția de compatibilitate a unui sistem de patru ecuații cu trei necunoscute:

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} \varphi & 1 & V & V^2 \\ \varphi_1 & 1 & V_1 & V_1^2 \\ \varphi_2 & 1 & 2V_1 & 4V_1^2 \\ \varphi_3 & 1 & 3V_1 & 9V_1^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \Delta_b = \begin{vmatrix} \varphi & 1 & V & V^2 \\ \varphi_1 & 1 & V_1 & V_1^2 \\ \varphi_2 & 1 & 2V_1 & 4V_1^2 \\ \varphi_3 & 1 & 4V_1 & 16V_1^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Rezolvînd determinanții, se deduc funcțiile analitice căutate:

a) pentru cazul folosirii progresiei aritmetice:

$$\varphi = (3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3) - \frac{5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3}{2V_1} V + \frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{2V_1^2} V^2; \tag{4}$$

b) pentru cazul folosirii progresiei geometrice;

$$\varphi = \frac{8\varphi_1 - 6\varphi_2 + \varphi_3}{3} - \frac{4\varphi_1 - 5\varphi_2 + \varphi_3}{2V_1} V + \frac{2\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3}{6V_1^2} V^2. \tag{5}$$

Cele trei constante ale funcțiilor emprice căutate vor fi, deci :

a) pentru primul caz (progresie aritmetică) ;

$$\alpha = 3\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3;\ \beta = -\frac{5\varphi_1 - 8\varphi_2 + 3\varphi_3}{2V_1};\ \gamma = \frac{\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3}{2V_1^2}, \quad (6)$$

b) pentru cazul doi (progresie geometrică) :

$$\alpha = \frac{8\varphi_1 - 6\varphi_2 + \varphi_3}{3};\ \beta = -\frac{4\varphi_1 - 5\varphi_2 + \varphi_3}{2V_1};\ \gamma = \frac{2\varphi_1 - 3\varphi_2 + \varphi_3}{6V_1^2}. \quad (7)$$

Viteza corespunzătoare valorii minime a coeficientul de aderență, se determină din relația

$$\frac{d\varphi}{dV} = \beta + 3\gamma V = 0, \quad (8)$$

de unde

$$V_{\varphi min} = -\frac{\beta}{2\gamma}. \quad (9)$$

Această viteză trebuie să fie mai mică decît vitezele maxime de circulație ale autovehiculelor, astfel încît tangentele la parabolă să aibă valori negative (zona folosită a curbei să fie descrescătoare, deoarece aderența variază invers cu mărimea vitezei).

3.2. FUNCȚIILE ANALITICE ALE ADERENȚEI PENTRU ȘOSELELE MODERNE

Pentru determinarea funcțiilor analitice care descriu variația mărimii coeficienților de aderență, este necesar să avem la dispoziție graficele de variație a acestora în funcție de viteza de circulație, sau datele obținute în timpul încercărilor experimentale prezentate tabelar. Acest mod de prezentare este din ce în ce mai folosit în lucrările de specialitate.

În tratatul de Dinamica autovehiculelor al prof. dr. ing. Manfred Mitschke [15] se prezintă sub formă grafică variația coeficienților de aderență și de aderență la alunecare, în funcție de viteza de circulație, pentru diferite căi rutiere moderne și diferite stări ale acestora (fig. 5). Graficele au fost trasate după măsurătorile din 1968 ale Institutului pentru tehnică auto din Braunschweig folosindu-se la încercări pneuri-diagonale, de dimensiuni cuprinse între 6,40 —13 și 6,00 —15, la o sarcină pe roată de 375 kp.

Pentru fiecare condiție urmărită, sînt prezentate plaje de variație a mărimii coeficienților, deoarece au fost încercate mai multe pneuri de aceeași sau de diferite fabricații.

În general, se conclude că :

— totdeauna coeficientul de aderență (17 —22% alunecare) este mai mare decît coeficientul de aderență la alunecare (100% alunecare) ;

— valorile coeficienților de aderență depind și scad puternic în ordinea : uscat, umed, zăpadă, ghiață ;

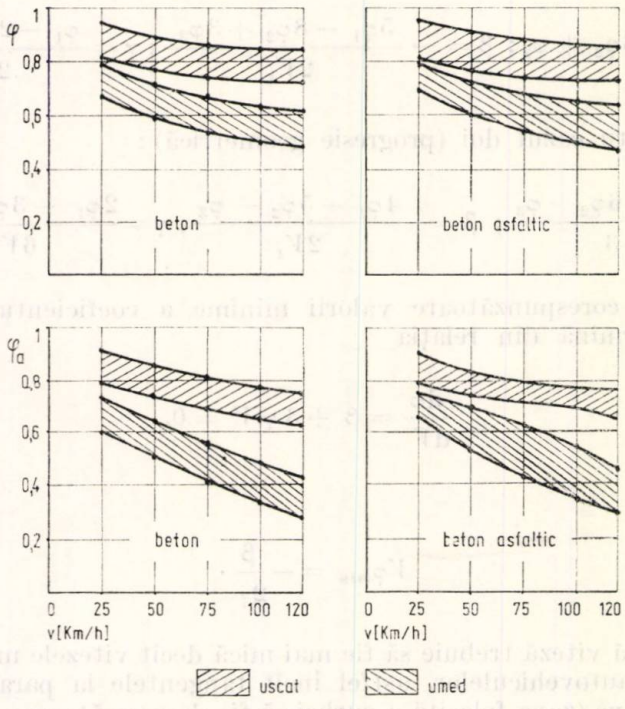


Fig. 5

— coeficienții de aderență depind de viteza de circulație.

Din prelucrarea graficelor de variație prezentate în figura 5, valorile maxime și minime ale coeficienților de aderență sînt redate în tabelul 5, iar valorile medii în tabelul 6.

Pentru determinarea constantelor α, β și γ, ale termenilor funcțiilor analitice, se vor folosi valorile medii date în tabelul 6.

Astfel, pentru o șosea din beton, în stare uscată, vom determina — drept exemplu — constantele amintite pentru ecuația ce descrie variația coeficientului de aderență la alunecare, folosind atît progresia aritmetică, cît și cea geometrică a vitezelor de circulație.

Pentru progresia aritmetică vom alege : $V_1 = 25$ km/h, $\varphi_1 = 0{,}86$; $V_2 = 50$ km/h, $\varphi_2 = 0{,}805$; $V_3 = 75$ km/h, $\varphi_3 = 0{,}76$.

Pentru progresia geometrică se va schimba numai :

$$V_3 = 100 \text{ km/h}, \quad \varphi_3 = 0{,}71.$$

Constantele termenilor funcției analitice se vor calcula cu ajutorul relațiilor 6 și 7, ecuațiile căpătînd forma :

— cazul a) :

$$\varphi(V) = 0{,}925 - 28 \cdot 10^{-4} V + 8 \cdot 10^{-6} V^2, \qquad (10)$$

Tabelul 5

Valorile maxime și minime ale coeficientului de aderență, la șoselele moderne, în funcție de viteză [15]

	φmax					φmin					$\varphi a\ max$					$\varphi a\ min$				
V	25	50	75	100	120	25	50	75	100	120	25	50	75	100	120	25	50	75	100	120
Beton cu ciment																				
uscat																				
0,94	0,90	0,86	0,84	0,84	0,81	0,78	0,76	0,74	0,72	0,93	0,87	0,82	0,78	0,75	0,79	0,74	0,70	0,64	0,62	
umed																				
0,80	0,72	0,67	0,64	0,62	0,67	0,60	0,54	0,50	0,47	0,74	0,65	0,56	0,48	0,41	0,60	0,53	0,44	0,36	0,28	
Beton asfaltic																				
uscat																				
0,96	0,92	0,89	0,87	0,85	0,81	0,77	0,74	0,73	0,72	0,90	0,85	0,80	0,78	0,75	0,79	0,76	0,73	0,69	0,65	
umed																				
0,80	0,75	0,70	0,66	0,63	0,70	0,61	0,55	0,50	0,47	0,76	0,70	0,63	0,54	0,43	0,66	0,54	0,43	0,35	0,28	

— cazul b):

$$\varphi(V) = 0{,}92 - 25 \cdot 10^{-4}V + 4 \cdot 10^{-6}V^2. \quad (11)$$

Teoretic, ecuațiile 8 și 9 ar fi trebuit să aibă aceeași constantă și aceiași coeficienți pentru variabila independentă; cele două funcții descriu, însă, aproape corect, din punct de vedere practic, variația coeficientului

Tabelul 6

Valorile medii ale coeficientului de aderență la șoselele moderne, în funcție de viteză

Natura căii rutiere	Starea	φ	φ_{med}					$\varphi_{a\ med}$				
		V	25	50	75	100	120	25	50	75	100	120
Beton cu ciment	uscat		0,875	0,840	0,810	0,790	0,780	0,860	0,805	0,760	0,710	0,685
	umed		0,735	0,660	0,605	0,570	0,545	0,670	0,590	0,500	0,420	0,345
Beton-asfaltic	uscat		0,885	0,845	0,815	0,800	0,785	0,845	0,805	0,765	0,735	0,700
	umed		0,750	0,680	0,625	0,580	0,550	0,710	0,620	0,530	0,445	0,355

de aderență la alunecare, diferențele rezultate fiind insignifiante. Astfel, calculînd coeficientul de aderență la alunecare, la viteza de circulație de 120 km/h (dată experimental în tabelul 6), se obține: o valoare mai mare cu 0,019, cînd se folosește relația 8, și o valoare mai mică cu 0,007, cînd se folosește relația 9, ceea ce reprezintă o eroare de 2,8% pentru primul caz, și de 1% pentru cazul al doilea, confirmîndu-se afirmația noastră.

Încercări pentru determinarea coeficientului de aderență la alunecare, pe căi rutiere normale (uzate), au fost efectuate și de către Catedra de specialitate de la Institutul politehnic București, împreună cu Institutul de studii și cercetări transporturi București, rezultatele obținute fiind publicate [16] în vederea folosirii lor de către specialiști. În tabelul 7 se prezintă un extras cu valorile coeficientului de aderență la alunecare, pentru diferite tipuri de drum și viteze diferite, obținute în urma încercărilor.

Tabelul 7

Valorile medii ale coeficientului de aderență la alunecare, pe căi rutiere uzate [16]

Natura căii	Starea	V (km/h)				
		20	30	40	50	60
Beton asfaltic	uscat	0,682	0,630	0,605	0,565	0,533
	umed	0,553	0,545	0,406	0,332	0,267
Piatră cubică	uscat	0,520	0,436	0,384	—	—
	umed	0,506	0,332	0,267	0,224	0,180
Drum pietruit	uscat	0,543	0,530	0,503	0,456	0,430
Pavaj bolovani	uscat	0,440	0,410	0,360	—	—

Folosind aceste date, pentru viteze dispuse în progresie aritmetică (singura posibilă în cazul nostru), pentru o șosea uzată și umedă, din beton asfaltic, vom avea: $V_1 = 20$ km/h, $\varphi_1 = 0{,}533$; $V_2 = 40$ km/h, $\varphi_2 = 0{,}406$; $V_3 = 60$ km/h, $\varphi_3 = 0{,}267$.

Calculînd constantele termenilor funcției analitice cu ajutorul relației 6, ecuația va căpăta forma:

$$\varphi_a(V) = 0{,}648 - 54{,}5 \cdot 10^{-4} V - 15 \cdot 10^{-6} V^2. \tag{12}$$

În acest mod pot fi determinate funcțiile care reprezintă variația coeficienților de aderență cu viteza de circulație.

3.3. DETERMINAREA VITEZEI AUTOVEHICULELOR

Ținînd sema de cele arătate mai sus, decelerația medie a autovehiculelor în timpul frînării va depinde de aderență și de viteza de circulație, după o relație de forma

$$d_m = \varphi_m g = g(\alpha + \beta V + \gamma V^2). \tag{13}$$

Valoarea medie a coeficientului de aderență se dertermină folosind relația mediei, de forma:

$$\varphi_m = \frac{1}{V_i - V_c} \int_{V_c}^{V_i} \varphi(V) \mathrm{d}V, \tag{14}$$

care, ținînd seama de relația (2), devine

$$\varphi_m = \frac{1}{V_i - V_c} \int_{V_c}^{V_i} (\alpha + \beta V + \gamma V^2) \mathrm{d}V, \tag{15}$$

din care se obține, prin integrare,

$$\varphi_m = \alpha + \frac{1}{2} \beta (V_i + V_c) + \frac{1}{3} \gamma (V_i^2 + V_i V_c + V_c^2). \tag{16}$$

Viteza la începutul frînării va fi dată de relația

$$V_i^2 = V_c^2 + 26 \varphi_m g S_f, \tag{17}$$

în care V_c este vietza la coliziune, exprimată în km/h, care se determină în funcție de alte elemente constatate la efectuarea expertizei (deformații, distrugeri, rotiri etc.);

φ_m este coeficientul de aderență mediu;

S_f — spațiul efectiv de frînare, în m.

Introducînd în această relație expresia (16) a coeficientului mediu de aderență și ordonînd termenii după puterile lui V_i, se obține :

$$\left(1-\frac{26}{3}\gamma g S_f\right)V_i^2-\left(13\beta+\frac{26}{3}\gamma V_c\right)gS_fV_i-\left[\left(1+\frac{26}{3}\gamma g\,S_f\right)V_c^2+\right.$$

$$\left.+13\,\beta\,gS_fV_c+26\,\alpha\,g\,S_f\right]=0, \tag{18}$$

o ecuație de gradul doi, din a cărei rezolvare rezultă viteza la începutul frînării autovehiculului, exprimată în km/h.

Dacă frînarea s-a produs în pantă, atunci decelerația medie este dată de relația :

$$d_m=g\left[\alpha+\frac{1}{2}\beta(V_i-V_c)+\frac{1}{3}\gamma(V_i^2+V_iV_c+V_c^2)\right]\cos\alpha_p\pm pg, \tag{19}$$

în care α_p este unghiul de pantă ;

p — panta (exprimată în valori zecimale).

Prin introducerea expresiei (19) în relația (17), se obține ecuația :

$$\left(1-\frac{26}{3}\gamma g\,S_f\cos\alpha_p\right)V_i^2-\left(13\beta+\frac{26}{3}\gamma V_c\right)gS_f\cos\alpha_pV_i-$$

$$-\left[\left(1+\frac{26}{3}\gamma g\,S_f\cos\alpha_p\right)V_c^2+13\,\beta gS_f\cos\alpha_pV_c+\right.$$

$$\left.+26\alpha g\,S_f\cos\alpha_p\mp 26p\right]=0, \tag{20}$$

care, rezolvată, conduce la determinarea vitezei inițiale.

Dacă se urmărește mișcarea frînată pînă la oprirea autovehiculului, relația (17) ia forma

$$V_i^2=26\,\varphi_m\,g\,S_f, \tag{21}$$

iar ecuațiile, a căror rezolvare determină viteza inițială, vor fi de forma :

— pentru șosele orizontale :

$$\left(1-\frac{26}{3}\gamma\,g\,S_f\right)V_i^2-13\beta\,g\,S_fV_i-26\alpha g\,S_f=0, \tag{22}$$

— pentru șosele în pantă ;

$$\left(1-\frac{26}{3}\gamma gS_f\cos\alpha_p\right)V_i^2-13\beta g\,S_f\cos\alpha_pV_i-26(\alpha g\,S_f\cos\alpha_p\mp p)=0. \tag{23}$$

4. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A VITEZEI AUTOVEHICULELOR

Pentru determinarea experimentală, a decelerației medii, a timpului și a spațiului de frînare, elemente cu ajutorul cărora se poate calcula viteza inițială a autovehiculului, se folosesc decelerografe (de tip „Moto-Meter" [17]), care redau grafic variația decelerației și a forței la pedală, în funcție de timp.

Rezultatul unei astfel de determinări experimentale, asupra eficacității frînării autoturismului Renault 14 TS (similar cu Dacia 1310), care are un motor de 1360 cm³, cu 4 cilindri, este prezentat grafic în figura 6; frînele la acest autoturism sînt cu disc în față și cu tambur în spate, cu dispozitiv de asistență și cu circuit dublu, precum și cu repartitor de presiune pentru roțile din spate [18].

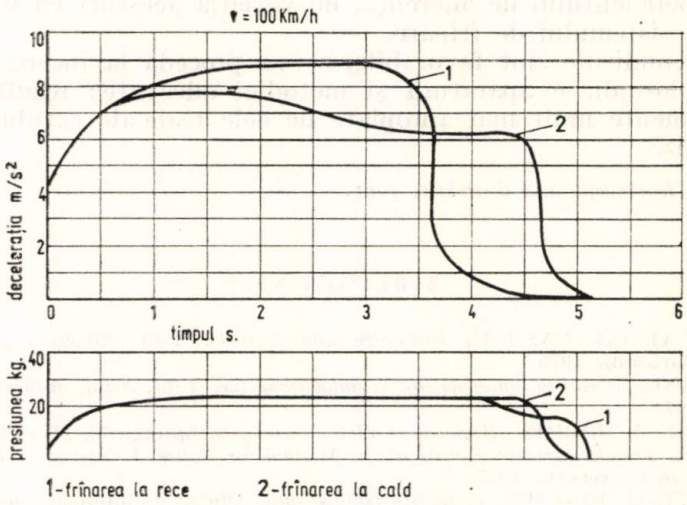


Fig. 6

La încercări (efectuate de J. P. Joyeux) s-a presat pe pedală cu 25 kg, în vederea obținerii eficacității maxime, pînă la limita de blocare a roților.

La prima încercare, cînd frînele erau „reci", s-a obținut o decelerație medie de 7,8 m/s², pe o durată totală de 3,56 secunde, frînindu-se de la viteza de 100 km/h, pînă la oprire; distanța de oprire a fost de 55,20 m. Pe durata frînării intensive (după atingerea valorii maxime a forței de frînare), decelerația medie a fost de 8,1 m/s², reprezentînd astfel o eficacitate de 81 % (în materie de frînare la autovehicule, decelerația de 9,81 m/s² este considerată maximală, eficacitatea fiind în acest caz de 100 %).

După efectuarea a încă nouă frînări similare succesive, s-au efectuat măsurători la cea de-a zecea încercare experimentală, denumită „frînare la cald". S-a obținut o decelerație medie de 6,2 m/s², pe o durată totală de 4,48 s; distanța de oprire a fost de 64,60 m. Pe durata frînării intensive, decelerația medie a fost de 7 m/s², reprezentînd o eficacitate de 70 %.

S-a înregistrat deci o pierdere de eficacitate de 11%, la „frînarea la cald", față de „frînarea la rece", obținîndu-se un bun rezultat. Viteza inițială a autovehiculelor, încercate după această metodă, este reprezentată, la scară, de către suprafața de sub curba de variație a decelerației, valoarea acesteia determinîndu-se prin planimetrare. În cazul prezentat, fiind determinate mărimile decelerației medii și a timpului de frînare, viteza inițială este dată de produsul acestor elemente, caracteristice ale capacității de frînare.

5. CONCLUZII

Determinarea analitică a vitezei autovehiculelor după urmele de frînare, va trebui să țină seama de complexul de factori ce influențează mărimea coeficientului de aderență, de variația acestuia cu viteza și de eficacitatea sistemului de frînare.

Cînd condițiile sînt favorabile, se va proceda la încercări experimentale, folosindu-se aparatură și metodici adecvate; rezultatele vor conține elemente mult mai apropiate de cele reale ale cazului cercetat prin expertiză.

Primită la redacție la 2 decembrie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. C. GHIULAI, CH. VASILIU, *Dinamica autovehiculelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1975.
2. M. GORIANU, *Mecanica automobilelor și autoblindatelor*, Edit. Acad. Militare, București, 1974.
3. J. COLLINS, J. MORRIS, *Highway Collision Analysis*, Springfield, III: Thomas, 1937.
4. J. BAKER, *Traffic Accident Investigation, Manual for Police*, Evanston, III: Northwestern University, 1957.
5. C. DURLUȚ, H. IONESCU, *Expertiza tehnică auto*, Oficiul de informare documentară a M. A. T. M. C. G. F., București, 1980.
6. CH. VASILIU, *Influența variației coeficientului de aderență asupra paremetrilor capacității de frînare a automobilului*, St. cerc. mec. apl., *1* (1972).
7. K. SCHULTZE, L. BECKMANN, *Die Griffigkeit nasser Strassendecken bei verschiedenen Geschwindigkeiten*, A. T. Z., *7* (1963).
8. A. JANTE, *Zur Theorie des Kraftwagens*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
9. E. ALLGAIER, *Coeficient of Friction between Pneumatic Tires and Road Surfaces*, unpublished M. S. thesis, Ames, Iowa, 1932.
10. J. DINKEL, *Radial Tire Comparison Test*, Road and Track, **XXIII**, *12* (1972).
11. W. KUMMER; H. MEYER, *Rubber and Tire Friction*, Eng. Res. Publ. **B-80** (1960), Pennsylvania State University.
12. ANON., *Mercedes-Benz 450 SLC*, Car and Driver, **18**, *12* (1973).
13. R. COQUAND, *Routes*, Livre II, Edit. Eyrolles, Paris, 1965.
14. G. KUELBERG, *Method and equipement for continous measuring of the coeficient of friction at incipient Skid*, Highway Research Board Bull., **348** (1962).
15. M. MITSCHKE, *Dynamik der Kraftfahrzeuge*, Springer,-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
16. CH. VASILIU, GH. FRĂȚILĂ, A. RĂDULESCU, I. GHIȚĂ, *Cercetări experimentale privind coeficientul de aderență la alunecare*, Rev. Transporturi auto, navale și aeriene, *8* (1972).
17. CH. VASILIU, TR. CANȚĂ *Influența eficacității frînelor asupra parametrilor capacității maxime de frînare a autovehiculelor*, Stud. cerc. mec. apl., *1* (1982).
18. — Colecția L'auto Journal, 1981.

STUDIUL VIBRAȚIILOR TRANSVERSALE ȘI LONGITUDINALE ALE CABLURILOR DE COMPENSARE LA INSTALAȚIILE DE EXTRACȚIE

de ILIE CONSTANTINESCU, CIPRIAN BOLOG
Institutul de mine Petroșani

În lucrare se face studiul dinamic al cablurilor de compensare de la o instalație de extracție în vederea stabilirii cauzelor care produc scoaterea prematură din funcțiune a acestora.
Pentru determinarea cît mai corectă a tensiunilor dinamice, care apar în cablurile instalațiilor de extracție, s-a ținut cont de legile cinematice de mișcare ale capetelor acestor cabluri, cît și de oscilațiile transversale și longitudinale ale acestora.
La sfîrșitul lucrării, se fac recomandări pentru evitarea fenomenelor dăunătoare ce pot apărea în cablurile de compensare ale instalațiilor de extracție și care reduc durata de funcționare a acestora.

1. INTRODUCEREA ȘI SISTEMATIZAREA DATELOR CUNOSCUTE

La multe instalații de extracție s-a observat o scoatare prematură din funcționare a unor cabluri de compensare. Studiul dinamic al cablurilor de compensare pentru stabilirea cauzelor care produc acest fenomen nedorit face obiectul prezentei lucrări.

În vederea stabilirii cît mai corecte a tensiunilor dinamice care apar în cablurile instalațiilor de extracție trebuie să ținem cont atît de legile cinematice de mișcare ale capetelor acestor cabluri, cît și de oscilațiile transversale și longitudinale ale cablului respectiv. Deși distribuția tensiunilor statice în cablu aparent nu interesează, întrucît se efectuează un studiu în regim dinamic al acestuia, totuși în scrierea ecuațiilor oscilațiilor precum și a tensiunilor dinamice intervin atît tensiunile statice, cît și alți parametri statici.

S-au luat în studiu cinci instalații de extracție din care patru cu schip (acestea sînt cele care interesează propriu-zis) și una cu colivii (întrucît experimentările în situ sînt infinit mai complicate în lipsa unui punct de acces pentru experimentator care să se deplaseze odată cu cablul, schipul neputînd fi folosit în acest scop). Menționăm faptul că toate cele cinci instalații folosesc același tip de cablu de compensare, astfel încît verificarea experimentală a cablului teoretic pentru una din ele atrage în mod logic concluzia veridicității calculului teoretic și pentru celelalte patru instalații.

2. ASPECTE STATICE (CURBELE DE ECHILIBRU ȘI TENSIUNILE STATICE)

Se știe că un fir greu cu greutatea specifică liniară g[daN/m] suspendat în două puncte A și B are drept curbă de echilibru lănțișorul de ecuație :

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a},$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41. NR. 5, 1982, P. 561–577

față de axele din figura (1). Cunoașterea parametrului a al lănțișorului permite atît determinarea poziției de echilibru, cît și cunoașterea tensiunii statice în orice punct M al acestui fir:

$$T_s = qy = qa \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \tag{1}$$

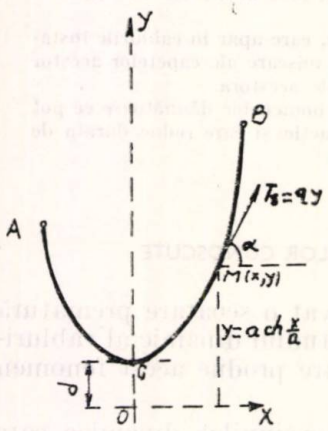


Fig. 1

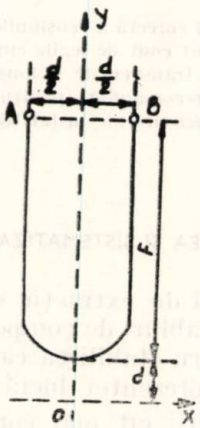


Fig. 2

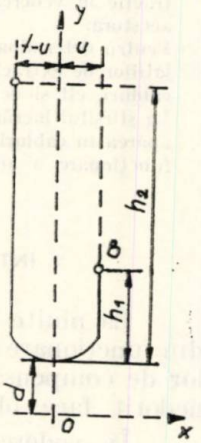


Fig. 3

Lungimea arcului CM de la punctul de minim C la un punct oarecare $M(x, y)$ se calculează cu formula

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2}\, \mathrm{d}x = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Din aceste relații se deduce

$$T_s = q\sqrt{a^2 + s^2}. \tag{2}$$

Unghiul făcut de tensiunea din M cu orizontala rezultă, după cum se știe, din ecuația:

$$\operatorname{tg} \alpha = y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \frac{s}{a},$$

din care deducem

$$\sin \alpha = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}}. \tag{3}$$

Calculul parametrului a a fost efectuat pentru fiecare instalație de extracție în două situații extreme: a) schipurile A și B au aceiași înălțime (fig. 2), iar apoi b) un schip la încărcare și celălalt la descărcare (fig. 3) valorile lui a în orice poziție a schipurilor fiind intermediare între valorile extreme găsite în cazurile a) și b).

Cazul a). Scriind că lănțișorul verifică coordonatele punctelor A și B, obținem relația

$$a + f = a \operatorname{ch} \frac{d}{2a}$$

din care se obține forma iterativă:

$$a_{n+1} = \frac{d}{2 \operatorname{arg\,ch} \left(1 + \frac{f}{a_n}\right)}.$$

Nr. crt. al instalației	f [m]	d [m]	h_1 [m]	h_2 [m]	Cazul a) a [m]	Cazul b) a [m]	u [m]
1	350	1,53	26	674	0,0848258	0,0926153	0,5834300
2	249	2,25	24	474	0,1372427	0,0948178	0,5908040
3	200	2,21	18	382	0,1308246	0,0983126	0,5808861
4	184	2,25	16	352	0,1432788	0,0997739	0,5763730
5	197	1,35	55	340	0,0793075	0,0834754	0,5982584

Cazul b). Scriind că lănțișorul verifică coordonatele punctelor A și B, obținem relațiile:

$$a + h_1 = a \operatorname{ch} \frac{u}{a},$$

$$a + h_2 = a \operatorname{ch} \frac{d - u}{a}.$$

Prin eliminarea lui u rezultă

$$\frac{d}{a} = \operatorname{arg\,ch} \left(1 + \frac{h_1}{a}\right) + \operatorname{arg\,ch} \left(1 + \frac{h_2}{a}\right),$$

de unde deducem forma iterativă:

$$a_{n+1} = \frac{d}{\operatorname{arg\,ch} \left(1 + \frac{h_1}{a_n}\right) + \operatorname{arg\,ch} \left(1 + \frac{h_2}{a_n}\right)}.$$

După calculul lui a prin iterație, de mai sus, u rezultă din relația

$$u = a \operatorname{arg\,ch} \left(1 + \frac{h_1}{a}\right).$$

Cu ajutorul iteraţiilor şi a relaţiei precedente s-au conceput şi rulat pe un calculator TI–53 programele corespunzătoare.

Variaţiile foarte mici ale parametrului a între cele două situaţii extreme a) şi b) ne permit utilizarea în orice poziţie a schipurilor, a valorii sale medii.

Vom studia un aspect din rezistenţa materialelor, pe care-l vom folosi ulterior şi anume : relaţia ce există între valorile a două forţe axiale diferite care întind succesiv o aceeaşi porţiune de fir şi alungirea specifică „relativă" între cele două stări.

Fie o lungime l_0 dintr-un fir de secţiune transversală A şi modulul de elasticitate E, nesolicitat de forţe axiale. Dacă se întinde firul cu o forţă axială N_1 (starea 1), acesta va ajunge la lungimea :

$$l_1 = l_0 + \Delta l_1 = l_0(1 + \varepsilon_1) = l_0\left(1 + \frac{\sigma_1}{E}\right) = l_0\left(1 + \frac{N_1}{EA}\right).$$

Dacă se întinde firul cu o forţă axială N_2 (starea 2), acesta va ajunge la lungimea

$$l_2 = l_0\left(1 + \frac{N_2}{EA}\right).$$

Vom numi alungire specifică relativă expresia :

$$\varepsilon_r = \frac{l_2 - l_1}{l_1},$$

care, cu ajutorul relaţiilor de mai sus, devine

$$\varepsilon_r = \frac{l_0\left(1 + \frac{N_2}{EA}\right) - l_0\left(1 + \frac{N_1}{EA}\right)}{l_0\left(1 + \frac{N_1}{EA}\right)} = \frac{N_2 - N_1}{N_1 + EA}.$$

Rezultă relaţia căutată :

$$N_2 = N_1 + (N_1 + EA)\,\varepsilon_r. \tag{4}$$

3. VIBRAŢIILE TRANSVERSALE ALE CABLURILOR CU CAPETE FIXE

Din cablul vertical OA de lungime h, având capetele fixe O şi A (fig. 4) separăm un element MM' de lungime dx care apare în figura 5 în două situaţii : în echilibru static (MM') şi în timpul oscilaţiilor transversale ale cablului (M_1M_1'). Ecuaţia de echilibru static a elementului MM',

$$\bar{T}_s + d\bar{T}_s - \bar{T}_s + \bar{q}\,dx = 0, \tag{5}$$

proiectată pe axa Ox a sistemului fix Oxy, conduce la ecuația

$$\mathrm{d}T_s - q\,\mathrm{d}x = 0,$$

în care T_s este tensiunea statică în punctul $M(x_0)$ dată de relația

$$T_s = qx + T_0.$$

Ecuația de mișcare a elementului M_1M_1', de masă $\mathrm{d}m = \frac{q}{g}\,\mathrm{d}x$, este

$$\bar{T} + \mathrm{d}\bar{T} - \bar{T} - \bar{q}\,\mathrm{d}x = \bar{a}\,\mathrm{d}m \tag{6}$$

și proiectată pe axele Ox și Oy conduce la ecuațiile :

$$\mathrm{d}(T\cos\beta) - q\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{d}(T\sin\beta) = \ddot{v}\,\mathrm{d}m,$$

în care T este tensiunea dinamică, iar $v(x,\ t)$ deplasarea transversală.

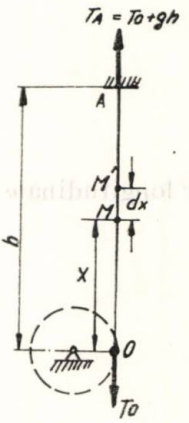


Fig. 4

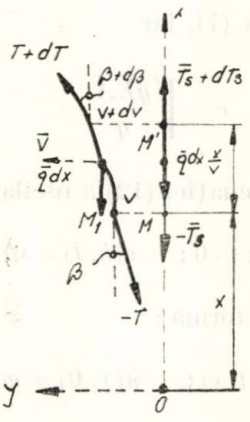


Fig. 5

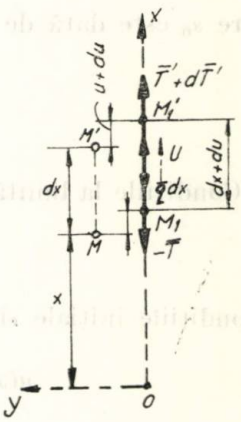


Fig. 6

Se deduce în final după cîteva calcule elementare ecuația diferențială a vibrațiilor transversale :

$$[(s_0 + gx)\,v']' - \ddot{v} = 0, \text{ în care } s_0 = \frac{g}{q}\,T_0. \tag{7}$$

Condițiile la limită fiind

$$v(0,\ t) = 0\,; \qquad v(h,\ t) = 0, \tag{8}$$

iar condițiile inițiale fiind de forma :

$$v(x,\ 0) = f(x)\,; \qquad \dot{v}(x,\ 0) = g(x), \tag{9}$$

în care $f(x)$ dă poziția inițială, iar $g\ (x)$ vitezele inițiale.

3.1. VIBRAȚIILE LONGITUDINALE ALE CABLURILOR CU CAPETE FIXE

În figura 6 elementul MM' este în echilibru static (la fel ca în figura 5), iar M_1M_1' este o poziție arbitrară a acestui element în timpul oscilațiilor longitudinale ale cablului. Elementele MM' și M_1M_1' care sînt în realitate coliniare au fost desenate în figura 6, astfel încît, să fie pusă clar în evidență deplasarea longitudinală $u(x, t)$. Ecuația de mișcare a elementului M_1M_1' este

$$\bar{T} + \mathrm{d}\bar{T} - \bar{T} + \bar{q}\,\mathrm{d}x = \bar{a}\,\mathrm{d}m, \tag{10}$$

prin proiectare pe axa fixă Ox conduce la ecuația :

$$\mathrm{d}T - q\,\mathrm{d}x = \ddot{u}\,\frac{q}{g}\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Se obține în final ecuația vibrațiilor longitudinale :

$$[(s_0 + c^2 + gx)\,u']' - \ddot{u} = 0, \tag{12}$$

în care s_0 este dată de relația (7), iar

$$c = \sqrt{\frac{gEA}{q}}. \tag{13}$$

Condițiile la limită ale ecuației (12) a oscilațiilor longitudinale sînt :

$$u(0, t) = 0\,; \qquad u(h, t) = 0, \tag{14}$$

iar condițiile inițiale sînt de forma :

$$u(x, 0) = f(x)\,; \qquad \dot{u}(x, 0) = g(x). \tag{15}$$

3.2. VIBRAȚIILE TRANSVERSALE ALE CABLURILOR VERTICALE CU UN CAPĂT MOBIL

Aceste vibrații se pot studia tot cu ajutorul figurilor 4 și 5, în care se va considera capătul A(schipul) în mișcare verticală cu accelerația $\bar{a}_c$, elementul M_1M_1' avînd o accelerație absolută cu două componente : accelerația relativă orizontală $\ddot{v}$ și accelerația de transport verticală $a_{cx} = \pm a_c$ (proiecția vectorului a_c pe Ox). În consecință, ecuația de mișcare (3), proiectată pe axele fixe Ox și Oy, conduce la ecuațiile :

$$\mathrm{d}(T\cos\beta) - q\,\mathrm{d}x = a_{cx}\,\frac{q}{g}\,\mathrm{d}x, \tag{16}$$

$$\mathrm{d}(T\sin\beta) = \ddot{v}\,\frac{q}{g}\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Se obține în final ecuația vibrațiilor transversale :

$$\{[s_0 + (g + a_{cx})\, x]v'\}' - \ddot{v} = 0. \tag{18}$$

Condițiile la limită sînt :

$$v(0, t) = 0\,; \quad v(h, t) = 0, \tag{19}$$

iar condițiile inițiale sînt de forma :

$$v(x, 0) = f(x)\,; \quad \dot{v}(x, 0) = g(x). \tag{20}$$

3.3. VIBRAȚIILE LONGITUDINALE ALE CABLURILOR VERTICALE CU UN CAPĂT MOBIL

Aceste vibrații se pot studia cu ajutorul figurilor 4 și 6 unde se va considera capătul A (schipul) în mișcare verticală cu accelerația $\bar{a}_c$, elementul M_1M_1' avînd o accelerație absolută compusă din două componente verticale : accelerația de transport a_{cx} și accelerația relativă $\ddot{u}$ datorită vibrațiilor longitudinale (deplasării elastice).

În consecință, ecuația de mișcare (10) proiectată pe Ox conduce la ecuația :

$$\mathrm{d}T - q\,\mathrm{d}x = (\ddot{u} + a_{cx})\,\frac{q}{g}\,\mathrm{d}x, \tag{21}$$

care se mai scrie :

$$\frac{g}{q}\,T' - g - \ddot{u} = a_{cx}. \tag{22}$$

Se obține în final ecuația

$$[(s_0 + c^2 + gx)\,u']' - \ddot{u} = a_{cx}. \tag{23}$$

Condițiile la limită sînt

$$u(0,\ t) = 0\,; \quad u(h,\ t) = 0, \tag{24}$$

iar condițiile inițiale sînt de forma :

$$u(x, 0) = f(x)\,; \quad \dot{u}(x, 0) = g(x). \tag{25}$$

3.4. VIBRAȚIILE TRANSVERSALE ALE CABLURILOR DE COMPENSARE CU CAPETE FIXE ȘI LIBERE ÎN JOMP

În figura 7 s-a reprezentat un asemenea cablu cu capetele fixe A și B (schipuri). Din el s-a separat un arc elementar MM' de lungime ds aflat la coordonata curbilinie s față de punctul minim c al lănțișorului.

Acest element de masă $\mathrm{d}m = \frac{q}{g}\,\mathrm{d}s$ este reprezentat în figura 8 în două situații:

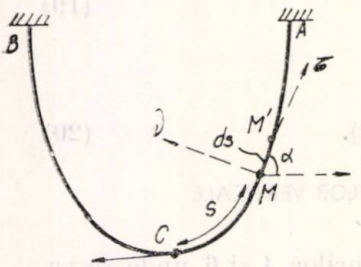


Fig. 7

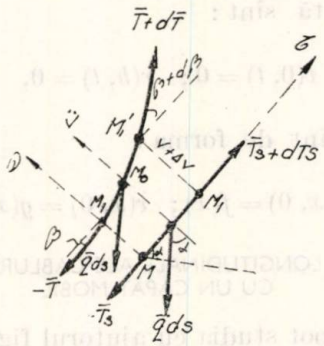


Fig. 8

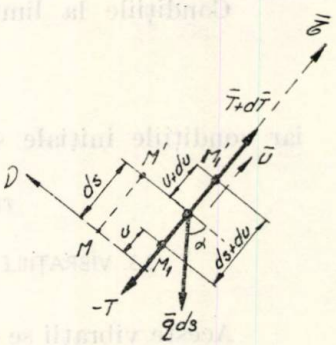


Fig. 9

întii în echilibrul static (poziția MM'), apoi în timpul vibrației transversale (poziția M_1M_1'). S-au considerat axele tangentă și normală principală ale triedului lui Frenet atașat curbei fixe de echilibru static. Deplasarea transversală este $V(s, t)$. Se observă că ecuația de echilibru static proiectată pe axa tangentei este

$$\mathrm{d}T_s - q \sin\alpha\,\mathrm{d}s = 0. \tag{26}$$

Scriem acum ecuația vectorială a mișcării elementului M_1M_1':

$$\bar{T} + \mathrm{d}\bar{T} - \bar{T} + \bar{q}\,\mathrm{d}s = \bar{a}\,\mathrm{d}m \tag{27}$$

și o proiectăm pe cele două axe din figura 8

$$\mathrm{d}(T\cos\beta) - q\sin\alpha\,\mathrm{d}s = 0, \tag{28}$$

$$\mathrm{d}(T\sin\beta) - q\cos\alpha\,\mathrm{d}s = \ddot{v}\,\frac{q}{g}\,\mathrm{d}s. \tag{29}$$

Se obține ecuația

$$(g\sqrt{a^2+s^2}\,v')' - \ddot{v} = \frac{ga}{\sqrt{a^2+s^2}}. \tag{30}$$

Condițiile la limită sînt:

$$v(-l, t) = 0\,; \quad v(l, t) = 0, \tag{31}$$

în care s-a notat cu $2l$ lungimea cablului de compensare.
Condițiile inițiale sînt:

$$v(s, 0) = f(s)\,; \quad \dot{v}(s, 0) = g(s). \tag{32}$$

3.5. VIBRAȚIILE LONGITUDINALE ALE CABLURILOR DE COMPENSARE CU CAPETE FIXE ȘI LIBERE ÎN JOMP

În figura 9 s-a reprezentat elementul ds în echilibru static ($M\ M'$) și în timpul oscilației longitudinale ($M_1 M_1'$), acestea fiind în realitate coliniare. Deplasarea longitudinală a punctului M este $u(s, d)$. Ecuația vectorială a mișcării,

$$\bar{T} + d\bar{T} - \bar{T} + \bar{q}\, ds = \bar{a}\, dm, \tag{33}$$

proiectată pe axa tangentei, conduce la ecuația

$$dT - q \sin \alpha\, ds = \ddot{u} \frac{q}{g} ds, \tag{34}$$

care se mai scrie :

$$\frac{g}{q} T' - g \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} - \ddot{u} = 0. \tag{35}$$

Deci se obține ecuația

$$[(g \sqrt{a^2 + s^2} + c^2)\, u']' - \ddot{u} = 0. \tag{36}$$

Condițiile la limită sînt :

$$u(-l, t) = 0\,; \quad u(l, t) = 0, \tag{37}$$

iar condițiile inițiale sînt de forma

$$u(s, 0) = f(s)\,: \qquad \dot{u}(s, 0) = g(s). \tag{38}$$

3.6. VIBRAȚIILE TRANSVERSALE ALE CABLURILOR DE COMPENSARE CU CAPETE MOBILE ȘI LIBERE ÎN JOMP

Aceste vibrații se pot studia cu ajutorul figurii 8 în care, însă, avem două modificări esențiale : triedul lui Frenet, atașat în M curbei de echilibru, devine un sistem mobil (schipurile A și B se mișcă) și în consecință accelerația $\ddot{v}$ este acum accelerație relativă nu absolută ca mai înainte. Ecuația vectorială a unui punct M_0 aflat în mișcare relativă se scrie, după cum se știe, sub forma

$$\bar{R}_{EXT} + \bar{R}_{LEG} + \bar{F}_{tr} + \bar{F}_{co} = m\bar{a}_r, \tag{39}$$

în care, pe lîngă rezultanta forțelor exterioare și de legătură, mai apar două forțe inerțiale datorate mișcării sistemului de referință mobil :

$$\bar{F}_{tr} = -m\bar{a}_{tr} = -m[\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})], \tag{40}$$

numită forță de transport, și

$$\bar{F}_{co} = -m\bar{a}_{co} = -2m\bar{\omega} \times \bar{v}_r, \tag{41}$$

numită forța Coriolis.

În relația (40) a_0 este o accelerație de translație a originii sistemului mobil (în cazul nostru egală cu accelerația a_c a schipurilor). Ceilalți doi termeni din paranteza pătrată a relației (40) fiind în ordine : accelerația tangențială a_t și accelerația normală a_n a punctului M_0 datorate mișcării de rotație a sistemului mobil, cu viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε. Factorul v_r din relația (41) este viteza relativă ($\dot{v}$ în cazul nostru). În cele ce urmează vom neglija cele două componente ale forței de transport datorate rotației triedului lui Frenet și forța Coriolis.

Ecuația devine :

$$\bar{T} + \mathrm{d}\bar{T} - \bar{T} + \bar{q}\,\mathrm{d}s - \bar{a}_c\,\mathrm{d}m = \bar{a}_r\,\mathrm{d}m, \tag{42}$$

care prin proiectare pe axe conduce la ecuațiile :

$$\mathrm{d}(T\cos\beta) - q\sin\alpha\,\mathrm{d}s - a_{c\tau}\frac{q}{g}\,\mathrm{d}s = 0, \tag{43}$$

$$\mathrm{d}(T\sin\beta) - q\cos\alpha\,\mathrm{d}s = \ddot{v}\,\frac{q}{g}\,\mathrm{d}s. \tag{44}$$

În final se obține ecuația

$$[(g\sqrt{a^2+s^2} + a_{c\tau}\cdot s)\,v']' - \ddot{v} = g\frac{a}{\sqrt{a^2+s^2}}. \tag{45}$$

Condițiile la limită sînt :

$$v(l, t) = 0\,; \qquad v(-l, t) = 0, \tag{46}$$

iar condițiile inițiale sînt de forma

$$v(s, 0) = f(s)\,; \qquad \dot{v}(s, 0) = g(s). \tag{47}$$

3.7. VIBRAȚIILE LONGITUDINALE ALE CABLURILOR DE COMPENSARE CU CAPETE MOBILE ȘI LIBERE ÎN JOMP

Aceste vibrații se pot studia cu ajutorul figurii 9 cu aceleași două specificații : triedul lui Frenet devine mobil și accelerația u devine deci accelerație relativă, a_r. Neglijînd ca și mai înainte cele două componente ale forței de transport datorate rotației triedului lui Frenet precum și forța Coriolis, ecuația de mișcare (39) se reduce la forma (42), care, prin proiectare pe axa tangentei, conduce la

$$\mathrm{d}T - q\sin\alpha\,\mathrm{d}s - a_{c\tau}\frac{q}{g}\,\mathrm{d}s = \ddot{u}\,\frac{g}{q}\,\mathrm{d}s \tag{48}$$

sau, se mai scrie

$$\frac{g}{q}\,T' - g\,\frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}} - \ddot{u} = a_{c\tau}. \tag{49}$$

Se obține ecuația

$$[(g\sqrt{a^2+s^2}+c^2)u']' - \ddot{u} = a_{cr}, \tag{50}$$

condițiile la limită sînt :

$$u(l, t) = 0\,; \qquad u(-l, t) = 0, \tag{51}$$

iar condițiile inițiale sînt de forma :

$$u(s, 0) = f(s)\,; \qquad \dot{u}(s, 0) = g(s). \tag{52}$$

Datorită valorilor foarte mici ale parametrului a pentru toate instalațiile de extracție se poate face aproximarea :

$$\sqrt{a^2+s^2} \simeq a + s. \tag{53}$$

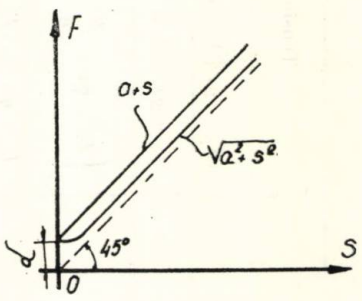


Fig. 10

Utilizînd aproximarea (53) vom sistematiza acum în tabelul (1) cele opt ecuații de mișcare stabilite împreună cu expresiile tensiunilor dinamice respective.

Ultimele patru linii ale tabelului 1 s-au obținut din precedentele patru prin înlocuirea cunoscută : $a = T_0/q$, T_0 fiind tensiunea statică din punctul de minim C al lănțișorului (fig. 7). În tot tabelul s-au păstrat notațiile :

$$s_0 = \frac{g}{q} T_0\,; \qquad c = \sqrt{\frac{gEA}{q}}\,; \qquad \left.\begin{matrix} a_{cx} \\ a_{cr} \end{matrix}\right\} = \pm\, a_c. \tag{54}$$

Astfel, s-a pus în evidență analogia perfectă între ecuațiile vibrațiilor longitudinale ale celor două tipuri de cabluri (2 cu 6) și (4 cu 8), analogia aproape perfectă între ecuațiile vibrațiilor transversale ale celor două tipuri de cabluri (1 cu 5) și (3 cu 7) și analogia perfectă a tensiunilor dinamice pentru toate vibrațiile celor două tipuri de cabluri (1 cu 5 ; 2 cu 6 ; 3 cu 7 și 4 cu 8).

În primul rînd facem mențiunea că forțele de transport și Coriolis sînt nule în cazul cablurilor verticale sau al schipurilor fixe. În studiul vibrațiilor cablurilor libere în jomp cu schipuri mobile s-au neglijat următoarele două componente ale forței de transport :

$$\bar{F}_t = -(\bar{\varepsilon} \times \bar{r})\, dm, \tag{55}$$

$$\bar{F}_n = -\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})\, dm = \omega^2 \bar{r}\, dm, \tag{56}$$

precum și forța Coriolis

$$\bar{F}_{co} = -2\bar{\omega} \times \bar{v}_r\, dm. \tag{57}$$

Tabelul 1

Tipul cablului	Regimul dinamic	Tipul vibrației	Nr. crt.	Ecuația vibrației	Tensiunea dinamică T
Cablu vertical	Schipuri fixe	transv.	1	$[(s_0 + gx)\, v']' - \ddot{v} = 0$	$(T_0 + gx)\sqrt{1 + v'^2}$
		long	2	$[(s_0) + c^2 + gx)\, u']' - \ddot{u} = 0$	$T_0 + gx + (T_0 + gx + EA)\, u'$
	Schipuri mobile	transv.	3	$\{[(_0s + (g + a_{cx})\, x]\, v'\}' - \ddot{v} = 0$	$\left(T_0 + qx + \frac{q}{g} - a_{cx}x\right)\sqrt{1 + v'^2}$
		long	4	$[(s_0 + c^2 + gx)\, u']' - \ddot{u} = a_{cx}$	$T_0 + qx + (T_0 + qx + EA)\, u'$
Cablu liber în jomp	Schipuri fixe	transv.	5	$[g\,(a + s)\, v']' - \ddot{v} = g\frac{a}{a+s}$	$q\,(a + s)\sqrt{1 + v'^2}$
		long	6	$\{[g\,(a + s) + c^2]\, u'\}' - \ddot{u} = 0$	$q\,(a + s) + [q\,(a + s) + EA]\, u'$
	Schipuri mobile	transv.	7	$\{[g\,(a + s) + a_{c\tau}\, s]\, v'\}' - \ddot{v} = g\frac{a}{a+s}$	$q\left(a + s + \frac{a_{c\tau}}{g} \cdot S\right)\sqrt{1 + v'^2}$
		long.	8	$\{[g\,(a + s) + c^2]\, 'u\}' - \ddot{u} = a_{c\tau}$	$q\,(a + s) + [q\,(a + s) + EA]\, u'$
Cablu liber în jomp	Schipuri fixe	transv.	5	$[(s_0 + gs)\, v']' - v'' = g\frac{a}{a+s}$	$(T_0 + qs)\sqrt{1 + v'^2}$
		long.	6	$[(s_0 + c^2 + gs)\, \ddot{u}']' - \ddot{u} = 0$	$T_0 + qs + (T_0 + qs + EA)\, u'$
	Schipuri mobile	transv.	7	$\{[(s_0 + (g + a_{c\tau})\, s]\, v'\}' - \ddot{v} = g\frac{a}{a+s}$	$\left(T_0 + qs + \frac{q}{g}\, a_{c\tau}\, s\right)\sqrt{1 + v'^2}$
		long.	8	$[s(_0 + c^2 - gs)\, u']' - \ddot{u} = a_{c\tau}$	$T_0 + qs + (T_0 + qs + EA)\, u'$

Pentru cazul mișcării schipurilor cu viteza v_c ca în figura 11 s-au prezentat în această figură sensul vitezei unghiulare și al accelerației unghiulare la rotația triedului lui Frenet. Graficul variației acestor două mărimi în funcție de poziția pe curba de echilibru static a originii O este dat de

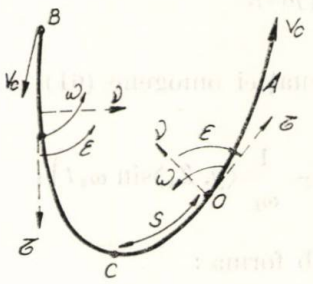


Fig. 11

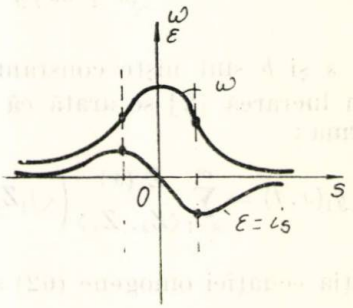


Fig. 12

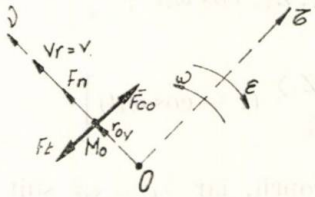
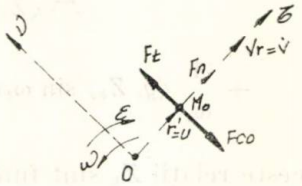


Fig. 13



Eig. 14

figura 12, unde se observă că viteza și accelerația unghiulară au valori semnificative, dar în zona buclei de întoarcere a cablului în jomp ele fiind practic nule pe porțiunile în care cablul este aproximativ vertical (cea mai mare parte a lungimii cablului). Cînd sensul mișcării schipurilor se inversează, figurile 11 și 12 vor trebuie rotit cu 180° în jurul axului vertical ce trece prin C, respectiv O. Pentru cazul luat în considerare în figurile 11 și 12 sensurile componentelor $\bar{F}_n$ și $\bar{F}_t$ ale forței de transport și al forței Coriolis F_{co} au fost reprezentate în figura 13 pentru vibrațiile transversale și în figura 14 pentru vibrațiile longitudinale. Menționăm faptul că forța $\bar{F}_n$ are sensul din aceste figuri pentru orice poziție între A și B, forța $\bar{F}_t$ are sensul din aceste figuri pentru orice poziție între C și A și sens contrar pentru orice poziție între C și B, iar în C are valoarea nulă. Forța $\bar{F}_{co}$ își schimbă alternativ sensul o dată cu schimbarea sensului vitezei relative (adică odată cu schimbarea sensului mișcării în timpul vibrațiilor respective). Valorile acestor forțe sînt:

$$F_t = \varepsilon r \, \mathrm{d}m, \tag{58}$$

$$F_r = \omega^2 r \, \mathrm{d}m, \tag{59}$$

$$F_{co} = 2\omega \, V_r \, \mathrm{d}m \tag{60}$$

și se vede deci că ele influențează mișcările vibrațiilor doar în zona relativ mică a buclei, în rest ele sînt practic nule. Din acest motiv ele au fost neglijate în calculele făcute mai înainte.

4. REZOLVAREA ECUAȚIILOR VIBRAȚIILOR CABLURILOR DE COMPENSARE

Se observă că toate ecuațiile din tabelul 1 sînt de forma:

$$[(s + bx)\, y']' - \ddot{y} = \begin{cases} 0, & (61) \\ p(x), & (62) \end{cases}$$

în care s și b sînt niște constante.

În lucrarea [2] se arată că soluția ecuației omogene (61) se scrie sub forma:

$$y_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k(x)}{\langle Z_k, Z_k \rangle} \left(\langle f_1 Z_k \rangle \cos \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \langle g, Z_k \rangle \sin \omega_k t \right), \tag{63}$$

iar soluția ecuației omogene (62) se scrie sub forma:

$$y_F(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k(x)}{\langle Z_k, Z_k \rangle} \left[\langle f, Z_k \rangle \cos \omega_k t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\omega_k} \langle g, Z_k \rangle \sin \omega_k t + \frac{\langle P, Z_k \rangle}{\omega_k^2} (1 - \cos \omega_k t) \right]. \tag{64}$$

În aceste relații Z_k sînt funcțiile proprii, iar $\lambda_k = \omega_k^2$ sînt valorile proprii ale operatorului

$$H = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[(s + bx) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right], \tag{65}$$

a cărui ecuație de valori proprii este:

$$-[(s + bx)\, Z']' = \lambda_Z. \tag{66}$$

Funcțiile f și g precizează condițiile inițiale:

$$y(x, 0) = f(x);\ \dot{y}(x, 0) = g(x), \tag{67}$$

iar prin $\langle\ \rangle$ am notat produsul scalar în spațiul Hilbert al operatorului pozitiv și autoadjunct H.

Se vede că pentru a scrie relațiile (63) și (64) este necesară definirea produsului scalar astfel încît operatorul H să aibă proprietățile menționate, iar apoi rezolvarea problemei de valori proprii (66) care se mai scrie:

$$(s + bx) Z'' + b Z' + \lambda Z = 0 \tag{68}$$

sau încă

$$Z'' + \frac{b}{s + bx} Z' + \frac{\lambda}{s + bx} Z = 0, \tag{69}$$

cu schimbarea de variabilă :

$$x_0 = \frac{s}{b} + x, \tag{70}$$

ecuația (69) se scrie :

$$Z'' + \frac{1}{x_0} Z' + \frac{\lambda}{b x_0} Z = 0. \tag{71}$$

În lucrarea [1] p. 457 se arată că soluția generală a ecuației

$$Z'' + \frac{a}{x_0} Z' + \left(b_1 x_0^m + \frac{C}{x_0^2} \right) Z = 0 \tag{72}$$

este

$$Z(x) = x^{0\,\frac{1-a}{2}} Z_\nu \left(\frac{2\sqrt{b_1}}{m+2} x_0^{\frac{m+2}{2}} \right), \tag{73}$$

$$\nu = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4C}}{m+2},$$

$$Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \tag{74}$$

J și Y fiind funcțiile lui Bessel de prima și a doua speță. Ecuația (71) este cazul particular al ecuației (72), în care

$$a = 1\,; \quad b_1 = \frac{\lambda}{b}\,; \quad m = -1\,; \quad c = 0, \tag{75}$$

caz în care soluția (73) devine

$$Z(x) = Z_0 \left(2 \sqrt{\frac{\lambda}{b} x_0} \right) = Z_0 \left[2 \sqrt{\frac{\lambda}{b} \left(\frac{s}{b} + x \right)} \right]. \tag{76}$$

Pentru ecuațiile 1, 2, 3, și 4 din tabelul 1 condițiile la limită sînt :

$$Z(0) = 0\,; \quad Z(h) = 0, \tag{77}$$

iar pentru ecuațiile 5, 6, 7, și 8 din tabelul 1 condițiile la limită sînt :

$$Z(-1) = 0\,; \quad Z(1) = 0. \tag{78}$$

Trecînd peste unele faze destul de laborioase de calcul, vom sistematiza în tabelul 2 datele necesare rezolvării problemei de valorii proprii (66) și scrierii soluțiilor 63 și 64.

Tabelul 2

Nr. crt.	S b	Funcții proprii $Z_k(x)$	Ecuația caracteristică	Produsul scalar	Observații
1	$\frac{g}{q}T_0$ g	$J_0\left[2\sqrt{\frac{\lambda_k}{b}\left(\frac{s}{b}+x\right)}\right] - \frac{J_0\left(\frac{2}{b}\sqrt{\lambda_k s}\right)}{Y_0\left(\frac{2}{b}\sqrt{\lambda_k s}\right)} \cdot Y_0\left[2\sqrt{\frac{\lambda_k}{b}\left(\frac{s}{b}+x\right)}\right]$	$J_0\left(\mu\sqrt{1+\frac{bh}{s}}\right) \cdot Y_0(\mu) = Y_0\left(\mu\sqrt{1+\frac{bh}{s}}\right) \cdot J_0(\mu)$	$\langle u, v\rangle = \int_0^h uv\,dx$	$\mu = \frac{2}{b}\sqrt{\lambda s}$ $\lambda_k = \omega_k^2$
2	$\frac{g}{q}(T_0+EA)$ g				
3	$\frac{g}{q}T_0$ $g\pm a_c$				
4	$\frac{g}{q}(T_0+EA)$ g				
5	ga g	$J_0\left[2\sqrt{\frac{\lambda_k}{b}\left(\frac{s}{b}+s\right)}\right]$	$J_0(\mu)=0$	$\langle u, v\rangle = \int_{-\frac{s}{b}}^{l} uv\,ds$	$\mu = 2\sqrt{\frac{\lambda}{b}\left(\frac{s}{b}+l\right)}$ $\lambda_k = \omega_k^2$
6	$ga+\frac{g}{q}EA$ g				
7	ga $g\pm ac$				
8	$ga+\frac{g}{q}EA$ g				

Primele cinci rădăcini ale primei ecuații caracteristice se găsesc în lucrarea [6] p. 233, iar primele 20 de rădăcini ale celei de-a doua ecuații caracteristice sînt tabelate în aceeași lucrare la p. 227.

CONCLUZII ȘI PROPUNERI

Pentru determinarea tensiunilor dinamice ne folosim de ultima coloană a tabelului 1. De la bun început se vede că toate aceste tensiuni cresc cu x și, respectiv, cu s. Deci zonele de tensiune maximă sînt porțiunile de sub schip. Cîteva calcule numerice au scos în evidență următoarele două aspecte : în primul rînd tensiunile dinamice datorate oscilațiilor longitudinale sînt simțitor mai mari decît cele datorate oscilațiilor transversale ale aceluiași cablu, iar în al doilea rînd cablul cu capătul de jos fixat are amplitudiniile oscilațiilor mai mici decît cele ale cablului lăsat liber în jomp.

Un alt aspect demn de remarcat este faptul că în zona buclei, datorită oscilațiilor transversale cuplate cu cele longitudinale (cuplare datorită în special efectului forțelor de transport și Coriolis), se întîlnesc multe zone care au adeseori raze de curbură foarte mici. De aici rezultă o foarte rapidă deteriorare a țesăturii acestor cabluri care se execută din fir mai moale. Fenomenul s-a observat la mai multe exploatări care au fost obligate să schimbe prematur cablurile de compensare din cauza unor astfel de „deșirări".

Fenomenele dăunătoare cablurilor de compensare sînt : 1) oscilațiile longitudinale (cablul suferă cîte un șoc la fiecare aplicare bruscă a unei accelerații sau frînări) care pot produce ruperea unor fire în special în zona a cîtorva zeci de metri sub vasele de extracție și 2) oscilațiile transversale cu cele longitudinale în zona buclei, care pot produce ruperea prin oboseală atît a firelor cablului, cît mai cu seamă a firelor țesăturii.

Primul fenomen poate fi evitat prin montarea în jompul puțului a unui tambur de întoarcere, care să se sprijine pe cele două cabluri de compensare, axul său putînd aluneca între două perechi de ghidaje verticale pentru a menține contactul cu cablurile de compensare în timpul oscilațiilor longitudinale ale acestora și ale cablurilor de extracție. Fiecare din cele două capete ale axului tamburului de întoarcere ar trebui prevăzut cu cîte un arc care să-l împingă în jos pe direcția ghidajelor, rolul său fiind și de a amortiza oscilațiile verticale ale tamburului și a-i mări aderența la cablu.

Forța suplimentară care se crează în cablu datorită greutății tamburului și a forței de compresiune a arcurilor este chiar bine venită întrucît face să crească aderența cablurilor de extracție pe organul de înfășurare. Investițiile necesare realizării și montării unor astfel de tamburi sînt relativ mici și ar fi pe deplin justificate prin creșterea fiabilității și a siguranței în funcționare a cablurilor de compensare.

Primită la redacție la 11 aprilie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. C. BOLOG, Referat de doctorat nr. 2. Constanța, 1975.
2. I. CONSTANTINESCU, C. BOLOG, *Mecanică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
3. R. CRISTESCU, *Analiza funcțională*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1965.
4. Y. CHEN, *Vibrations Theoretical Methods*, Addison, Wesley Publishing Co., Inc. Massachusetts. U.S.A., 1966.
5. S. H. GOULD, *Variational Methods for Eigenvalue Problems*, Univ. of Toronto Press, 1971.
6. R. L. KETTER, S. P. PROWEL, *Modern Methods in Vibrations*, Macmillan Co. New York, 1967.

DETERMINAREA PROFILULUI TEORETIC AL ELECTRODULUI SCULĂ LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ A PIESELOR DE CONFIGURAȚIE COMPLEXĂ

de V. CHIUJDEA
Comitetul de Stat pentru Energia Nucleară, București—Măgurele
I. ROȘU
Institutul de fizică și tehnologia materialelor, București—Măgurele

Pornind de la modalitatea de definire a profilelor de configurație complexă, exprimate numeric sau prin racordări de cercuri, în lucrare se prezintă metodologia de obținere cu ajutorul calculatorului electronic a conturului teoretic al electrodului sculă folosit la prelucrarea electrochimică a paletelor de turbine. În funcție de geometria profilului, precizia de prelucrare și condițiile concrete de lucru, în articol se analizează și se stabilesc limitele de aplicare a teoriei „cos α" și a teoriei potențialului, aceasta din urmă recomandîndu-se a fi folosită la calculul profilelor de precizie ridicată și pentru unghiuri de închidere mai mari de 60°.

Puternica dezvoltare din ultimele decenii a unor ramuri de vîrf ale industriei constructoare de mașini din țara noastră, cum sînt aeronautica și producția de turbogeneratoare, a condus la creșterea ponderii pieselor de complexitate ridicată (palete, rotori de turbine etc.) și la folosirea pe scară largă în producție a oțelurilor și aliajelor anticorozive și refractare, greu prelucrabile prin așchiere și cu consum ridicat de scule și energie. În aceste condiții se impune extinderea cercetărilor privind realizarea profilului activ al paletelor de turbine prin procedeul electrochimic, care poate asigura indici tehnico-economici ridicați.

În scopul obținerii în condiți eficiente a electrozilor sculă ce asigură prelucrarea electrochimică a profilului activ al paletelor la precizia adimensională și de formă prescrisă, au fost efectuate cercetări [1—3] pentru determinarea profilului teoretic al electrodului sculă în funcție de profilul paletei și de cinematica prelucrării, cu introducerea unor corecții experimentale pentru fiecare tip de profil în parte.

Aplicarea teoriei „cos α" pentru determinarea profilului teoretic al electrodului sculă este limitată de unghiul de închidere a profilului și de precizia de prelucrare. În lucrarea de față se prezintă metodologia de obținere a profilului teoretic al electrodului sculă în funcție de modul de definire al profilului, direcția de avans a sculei, unghiul de închidere a profilului și toleranța profilului. Astfel, au fost întocmite programe de calcul numeric al profilului și se indică pentru fiecare caz în parte limitele de aplicare a teoriei „cos α" sau a teorei potențialului [4], aceasta din urmă fiind recomandabilă pentru unghiuri mari de închidere a profilului și pentru precizii ridicate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 5, 1982, P. 578—594

1. DETERMINAREA PROFILULUI TEORETIC AL SCULEI PENTRU PIESE CU PROFIL DEFINIT PRIN RACORDĂRI DE CERCURI

Folosirea racordărilor de cercuri pentru definirea profilului pieselor prelucrate electrochimic prezintă avantajul comparării ușoare a profilului teoretic obținut prin toate „cos α", cu cel dedus prin teoria mai exactă a potențialului. În plus, profilele de configurație complexă pot fi aproximate prin racordări de cercuri cu precizia dorită dacă lungimea fiecărui arc de cerc este suficient de mică.

1.1. CALCULUL ELEMENTELOR GEOMETRICE ALE PROFILULUI PIESEI

Presupunem că profilul Γ al piesei este definit prin racordarea unui număr arbitrar n de arce de cerc $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ (fig. 1). Raportăm profilul piesei la un sistem arbitrar de axe ortogonale XOY. Notăm cu $C_k(A_k,$

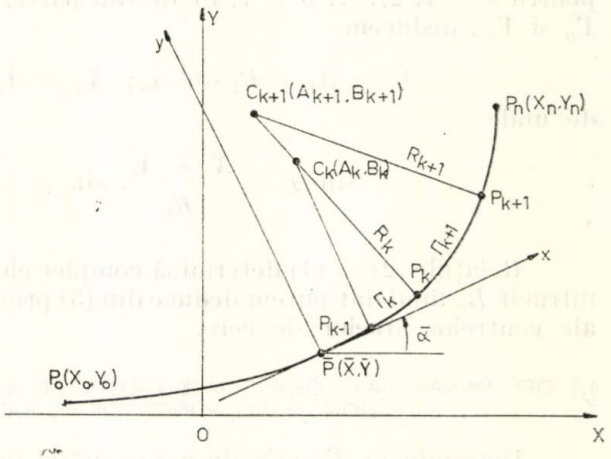


Fig. 1. — Geometria unui profil de piesă definit prin racordări de cercuri.

B_k) centrul arcului de cerc Γ_k, cu $P_{k-1}(X_{k-1}, Y_{k-1})$ și $P_k(X_k, Y_k)$ extremitățile arcului, iar prin R_k raza sa. Notăm de asemenea prin α unghiul pe care axa OY îl face cu normala la profilul piesei dirijată către intrados, iar cu α_k valoarea lui α corespunzătoare lui P_k.

Considerăm date extremitățile profilului piesei, adică punctele $P_0(X_0, Y_0)$ și $P_n(X_n, Y_n)$, razele cercurilor $R_1, R_2, \ldots, R_n$, abscisele centrelor $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și una din ordonatele centrelor, de exemplu B_p.

Ne propunem să determinăm mai întîi celelalte elemente geometrice ale profilului, adică ordonatele celorlalte centre, coordonatele punctelor de racordare și unghiurile $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dintre OY și normalele la profil în punctele $P_0, P_1, \ldots, P_n$.

Ecuațiile parametrice ale arcului de cerc Γ_k sînt

$$X = A_k + R_k \sin \alpha, \quad Y = B_k - R_k \cos \alpha, \quad \alpha \in [\alpha_{k-1}, \alpha_k]. \tag{1}$$

Impunînd condiția ca punctul de racordare $P_k(X_k, Y_k)$ să aparțină ambelor arce Γ_k și Γ_{k+1}, iar centrele acestor arce să se afle pe normala în P_k la profil, obținem:

$$X_k = A_{k+1} + R_{k+1} \sin \alpha_k = A_k + R_k \sin \alpha_k,$$

$$Y_k = B_{k+1} - R_{k+1} \cos \alpha_k = B_k - R_k \sin \alpha_k,$$

de unde rezultă

$$\sin \alpha_k = -\frac{A_{k+1} - A_k}{R_{k+1} - R_k}, \tag{2}$$

$$B_{k+1} = B_k + (B_{k+1} - R_k) \cos \alpha_k, \tag{3}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Pe de altă parte, aplicînd relațiile (1) arcelor Γ_0 și Γ_n, deducem

$$X_0 = A_1 + R_1 \sin \alpha_0; \quad X_n = A_n + R_n \sin \alpha_n,$$

de unde

$$\sin \alpha_0 = \frac{X_0 - A_1}{R_1}, \quad \sin \alpha_n = \frac{X_n - A_n}{R_n}. \tag{4}$$

Relațiile (2) — (4) determină complet elementele geometrice căutate, întrucît B_p fiind dat putem deduce din (3) prin recurență celelalte ordonate ale centrelor arcelor de cerc.

1.2. DETERMINAREA AXELOR ASOCIATE DIRECȚIEI DE AVANS A SCULEI ȘI A NOILOR COORDONATE ALE PUNCTELOR DE RACORDARE

Determinăm direcția de avans astfel încît să fie paralelă cu bisectoarea unghiului format de normalele duse la profilul piesei în extremitățile P_0 și P_n ale acestuia. Așa cum se vede din figura 2, aceasta revine la a găsi un punct $\bar{P}(\bar{X}, \bar{Y})$ pe profilul Γ al piesei, în care tangenta la profil să facă unghiuri egale cu tangentele în P_0 și P_n, adică $\bar{\alpha} - \alpha_0 = \alpha_n - \bar{\alpha}$, unde $\bar{\alpha}$ este unghiul normalei la Γ în P cu axa OY. Prin urmare

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2}. \tag{5}$$

Presupunem că $\bar{\alpha} \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m]$, adică $\bar{P}$ aparține arcului Γ_m. Din (1) deducem atunci că P are coordonatele

$$\bar{X} = A_m + R_m \sin \bar{\alpha}, \qquad \bar{Y} = B_m - R_m \cos \bar{\alpha}. \tag{6}$$

Alegem tangenta și normala la Γ în $\bar{P}$ drept noi axe de coordonate x și y (fig. 1). Legătura dintre noile și vechile coordonate ale unui punct

curent $P(x, y)$ de pe Γ este dată de relațiile

$$x = (X - \bar{X}) \cos \bar{\alpha} + (Y - \bar{Y}) \sin \bar{\alpha},$$

$$y = -(X - \bar{X}) \sin \bar{\alpha} + (Y - \bar{Y}) \cos \bar{\alpha}.$$

În particular, noile coordonate (a_k, b_k) ale centrului C_k al arcului Γ_k sînt

$$a_k = (A_k - \bar{X}) \cos \bar{\alpha} + (B_k - \bar{Y}) \sin \bar{\alpha},$$

$$b_k = -(A_k - \bar{X}) \sin \bar{\alpha} + (B_k - \bar{Y}) \cos \bar{\alpha},$$

sau, încă, ținînd seama de (66),

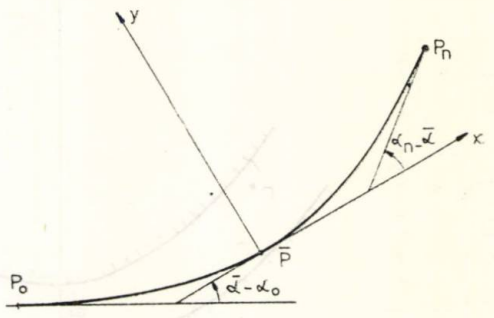


Fig. 2. — Determinarea axelor asociate direcției de avans.

$$a_k = (A_k - A_m) \cos \bar{\alpha} + (B_k - B_m) \sin \bar{\alpha},$$

$$b_k = -(A_k - A_m) \sin \bar{\alpha} + (B_k - B_m) \cos \bar{\alpha} + R_m. \tag{7}$$

În sfîrșit, notînd cu $\theta = \alpha - \bar{\alpha}$ unghiul pe care îl face normala la Γ în punctul curent $P(x, y)$ cu axa, $\bar{P}y$, iar cu $\theta_k = \alpha_k - \bar{\alpha}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, valorile lui θ corespunzătoare extremităților arcelor de cercuri, obținem ecuațiile parametrice ale arcului Γ_k:

$$x = a_k + R_k \sin\theta\,; \; y = b_k - R_k \cos\theta, \; \theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]. \tag{8}$$

1.3. DETERMINAREA PROFILULUI TEORETIC AL SCULEI PRIN TEORIA „COS α"

Conform teoriei aproximative „cos α", punctul curent $P(x, y)$ al profilului Γ al piesei se obține prin dizolvarea produsă de un punct corespunzător $P^*(x^*, y^*)$ al profilului Γ^* al sculei, situat pe normala în P la Γ și astfel încît, în situația staționară, interstițiul $a(\theta)$ dintre P^* și P să fie

$$a(\theta) = \frac{a_f}{\cos\theta}, \tag{9}$$

unde a_f este interstițiul frontal dintre piesă și sculă, corespunzător direcției de avans (fig. 3). Se consideră $a_f > 0$ pentru prelucrarea intradosului și $a_f < 0$ pentru prelucrarea extradosului.

Notînd cu $r_k(\theta)$ distanța de la centrul C_k la punctul $P^* \in \Gamma_k$, obținem din (9)

$$r_k(\theta) = R_k - \frac{a_f}{\cos\theta}. \tag{10}$$

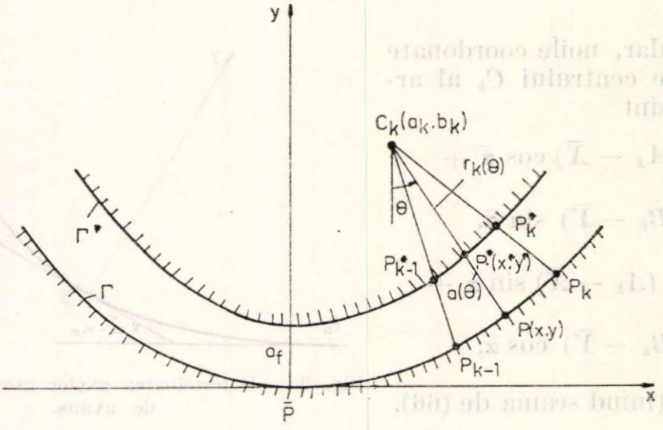


Fig. 3. — Determinarea profilului teoretic al sculei.

Ecuațiile parametrice ale arcului Γ_k^* al profilului teoretic al sculei sînt deci

$$x^* = a_k + r_k(\theta)\sin)\theta\,;\; y^* = b_k - r_k(\theta)\cos\theta, \tag{11}$$

sau încă

$$x^* = a_k + R_k \sin\theta - a_f \operatorname{tg}\theta,\; y^* = b_k - R_k\cos\theta + a_f, \tag{12}$$

pentru $\theta \in [Q_{k-1},\ \theta_k]$, $k = 1, \ldots, n$.

Relațiile (12) determină complet profilul teoretic al sculei, dacă este dat interstițiul frontal a_f și se definește profilul piesei prin racordări de cercuri. După cum vom vedea, teoria „cos α" poate fi aplicată cu bune rezultate pentru valori nu prea mari ale lui $|\theta|$.

1.4. DETERMINAREA PROFILULUI TEORETIC AL SCULEI PRIN TEORIA POTENȚIALULUI

După cum a arătat Lawrence [4], profilul teoretic al sculei poate fi determinat cu precizie mai mare, chiar pentru valori absolute ale unghiului θ apropiate de 90°, folosind teoria potențialului electrostatic. El a arătat că potențialul V trebuie să satisfacă ecuația lui Laplace

$$\Delta V = 0 \tag{13}$$

în interiorul domeniului cuprins între profilele Γ și Γ* ale piesei și sculei, precum și condițiile la limită

$$V|_\Gamma = \text{const.},\; V|_{\Gamma^*} = \text{const.},\; \frac{1}{\cos\theta}\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_\Gamma = \text{const.}, \tag{14}$$

unde $\partial V/\partial n$ este derivata potențialului după direcția normalei la Γ, iar θ este unghiul dintre normala la Γ și direcția de avans. Lawrence [4] a rezolvat exact această problemă la limită în cazul cînd piesa are un profil circular și a dat și o metodă numerică de rezolvare aproximativă prin diferențe finite, pentru cazul cînd Γ este o curbă convexă oarecare netedă pe porțiuni.

În cele ce urmează vom extinde soluția lui Lawrence la cazul profilelor Γ definite printr-o racordare de arce de cerc. În acest scop vom presupune în plus că segmentele $P_k^* P_k$ ce unesc punctele de racordare de pe Γ cu punctele corespunzătoare lor de pe Γ^* sînt dirijate aproximativ după linii de curent.

Vom rezolva problema la limită (13), (14), pentru patrulaterul curbiliniu $P_{k-1}^* P_k^* P_k P_{k-1}$, alegînd coordonatele polare (r, θ) cu centrul în C_k. Avem atunci, cu notațiile din §1.3,

$$r_k(\theta) \leqslant r \leqslant R_k, \qquad \theta_{k-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_k.$$

Ecuația (13) se scrie în coordonate polare

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

și admite soluția generală

$$V(r, \theta) = \left(Ar + \frac{B}{r}\right)(C\cos\theta + D\sin\theta).$$

Impunînd prima și ultima condiție (14) pe Γ, adică pentru $r = R_k$, rezultă

$$V(r, \theta) = A\left(r - \frac{R_k^2}{r}\right)\cos\theta. \tag{15}$$

Dar, conform relației $(14)_2$, V trebuie să fie constant pe profilul sculei, deci

$$\left[r_k(\theta) - \frac{R_k^2}{r_k(\theta)}\right]\cos\theta = \text{const. pe } \Gamma^* \tag{16}$$

pentru $k = 0, 1, \ldots, n$. În particular, presupunînd ca mai sus că punctul $\theta = 0$, corespunzător direcției de avans, se găsește pe arcul Γ_m, obținem din (16) condiția

$$\left[\frac{R_k^2}{r_k(\theta)} - r_k(\theta)\right]\cos\theta = 2c, \tag{17}$$

unde am notat

$$c = \frac{1}{2}\left[\frac{R_m^2}{r_m(0)} - r_m(0)\right].$$

Dar $r_m(0) = R_m - a_f$ și deci constanta c este dată de

$$c = \frac{1}{2}\left[\frac{R_m^2}{R_m - a_f} - R_m + a_f\right] = \frac{a_f(2 - a_f/R_m)}{2\,(1 - a_f/R_m)}. \tag{18}$$

Pe de altă parte, din (17) deducem că $r_k(\theta)$ trebuie să satisfacă ecuația

$$r_k^2(\theta) + \frac{2c}{\cos\theta}\, r_k(\theta) - R_k^2 = 0,$$

care admite soluția pozitivă

$$r_k(\theta) = -\frac{c}{\cos\theta} + \sqrt{\frac{c^2}{\cos^2\theta} + R_k^2}, \qquad \theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]. \tag{19}$$

Înlocuind acest rezultat în (11), găsim că ecuațiile parametrice ale lui Γ_k^* sînt

$$\begin{aligned} x^* &= a_k + (\sqrt{c^2 + R_k^2\cos^2\theta} - c)\,\mathrm{tg}\,\theta, \\ y^* &= b_k - \sqrt{c^2 + R_k^2\cos^2\theta} + c. \end{aligned} \tag{20}$$

Aceste relații determină împreună cu (18) profilul teoretic al sculei, prezis prin teoria potențialului, dacă este dat interstițiul minim a_f și dacă se definește profilul piesei prin racordări de cercuri.

1.5. CALCULUL ERORII RELATIVE A PROFILULUI OBȚINUT PRIN TEORIA „COS α" FAȚĂ DE TEORIA POTENȚIALULUI

Ne propunem să determinăm acum eroarea relativă a teoriei „cos α" față de teoria potențialului și unghiul maxim θ_{max} pînă la care poate fi aplicată teoria „cos α" pentru un nivel prescris al erorii relative.

Notăm soluțiile (10) și (19) date de cele două teorii cu indicii superiori C (cosinus) și P(potențial), pentru a le putea deosebi și trecem la raze polare adimensionale împărțind cu R_k, adică

$$\frac{r_k^C(\theta)}{R_k} = 1 - \frac{\lambda_k}{\cos\theta}, \tag{21}$$

$$\frac{r_k^P(\theta)}{R_k} = -\frac{c_k}{\cos\theta} + \sqrt{\frac{c_k^2}{\cos^2\theta} + 1}, \tag{22}$$

unde

$$\lambda_k = \frac{a_f}{R_k}, \quad c_k = \frac{c}{R_k} = \frac{(a_f/R_k)(2 - a_f/R_m)}{2(1 - a_f/R_m)}. \tag{23}$$

Definim eroarea relativă a teoriei „cos α" față de teoria potențialului prin

$$\varepsilon(\theta) = \frac{r_k^P(\theta) - r_k^C(\theta)}{R_k}, \tag{24}$$

sau încă, ținînd seama de (21) — (23),

$$\varepsilon(\theta) = \sqrt{\frac{c_k^2}{\cos^2\theta} + 1} - 1 - \frac{q_k}{\cos\theta}, \tag{25}$$

unde

$$q_k = c_k - \lambda_k = \frac{a_f}{R_k} \frac{a_f/R_m}{2(1 - a_f/R_m)}. \tag{26}$$

Se poate arăta că $\varepsilon(\theta)$ crește odată cu $|\theta|$ și că $\varepsilon(\theta) > 0$, cu excepția unghiurilor foarte apropiate de 0°. Neglijînd acest interval foarte restrîns și impunînd condiția $|\varepsilon(\theta)| \leqslant \varepsilon_0$, unde ε_0 este eroarea relativă maximă admisă, obținem din (25)

$$\sqrt{\frac{c_k^2}{\cos^2\theta} + 1} - 1 - \frac{q_k}{\cos\theta} \leqslant \varepsilon_0. \tag{27}$$

Putem rezolva această inecuație în raport cu θ, obținînd o condiție de forma

$$0 \leqslant |\theta| \leqslant \theta_{max} \tag{28}$$

care delimitează domeniul de aplicabilitate al teoriei „cos α" pentru o eroare relativă maximă prescrisă. În acest scop rescriem (27) sub forma echivalentă

$$\sqrt{px^2 + 1} - 1 - x \leqslant \varepsilon_0, \tag{29}$$

unde am introdus notațiile

$$x = \frac{q_k}{\cos\theta} > 0, \quad p = \left(\frac{c_k}{q_k}\right)^2 = \left[\frac{2 - a_f/R_m}{a_f/R_m}\right]^2. \tag{30}$$

Soluția inecuației (29) este $0 < x \leqslant x_1$, unde

$$x_1 = \frac{1 + \varepsilon_0 + \sqrt{1 + p\varepsilon_0 (2 + \varepsilon_0)}}{p - 1}. \tag{31}$$

Ținînd seama de expresia lui x, obținem condiția

$$\cos \theta \geqslant \frac{q_k}{x_1},$$

ceea ce conduce la inegalitatea (28) cu

$$\theta_{max} = \arccos \frac{q_k}{x_1}. \tag{32}$$

În cazul unei racordări de n arce de cerc, vom lua $k = 1$ sau $k = n$ în (32) deoarece, așa cum am mai menționat, $\varepsilon(\theta)$ crește cu $|\theta|$, deci valoarea maximă a erorii se va obține totdeauna pentru unul din arcele extreme.

În particular, dacă profilul piesei este definit printr-un singur arc de cerc de rază R, formulele de mai sus se simplifică, pentru că $R_k = R_m = R$, iar din (26) și (32) se obține

$$\theta_{max} = \arccos \frac{\lambda^2}{2(1 - \lambda)x_1}, \tag{33}$$

Tabelul 1

Calculul valorii θ_{max} în funcție de parametrul $\lambda = a_f/R$ și de eroarea relativă admisă $\varepsilon_0 = \varepsilon/R$

λ	θ_{max} în grade penru $\varepsilon_0 =$									
	0,00002	0,00004	0,00006	0,00008	0,00010	0,00020	0,00040	0,00060	0,00080	0,00100
−0,020	23,84	31,58	36,60	40,30	43,20	52,07	60,22	64,46	67,21	69,18
−0,018	26,03	34,13	39,28	43,01	45,91	54,63	62,46	66,47	69,06	70,90
−0,016	28,63	37,07	42,31	46,04	48,91	57,39	64,82	68,59	70,99	72,69
−0,014	31,75	40,48	45,75	49,45	52,25	50,37	67,33	70,80	73,00	74,56
−0,012	35,53	44,46	49,68	53,27	55,96	63,61	69,99	73,13	75,10	76,50
−0,010	40,17	49,14	54,19	57,59	60,11	67,11	72,82	75,58	77,31	78,51
−0,008	45,94	54,66	59,37	62,48	64,74	70,92	75,83	78,16	75,61	80,62
−0,006	53,20	51,21	65,35	68,03	69,94	75,06	79,03	80,88	82,02	82,81
−0,004	62,44	69,04	72,30	74,35	75,80	79,59	82,44	83,75	84,55	85,10
−0,002	74,34	78,47	80,41	81,60	82,43	84,54	86,09	86,78	87,20	87,49
0,002	74,31	78,45	80,39	81,59	82,42	84,53	86,08	86,78	87,20	87,49
0,004	62,35	68,97	72,24	74,30	75,75	79,55	82,41	83,73	84,53	85,08
0,006	53,05	61,08	65,24	67,92	69,84	74,98	78,97	80,83	81,98	82,77
0,008	45,73	54,46	59,19	62,31	64,58	70,79	75,73	78,08	79,53	80,55
0,010	39,91	48,88	53,94	57,36	59,89	66,93	72,67	75,46	77,19	78,41
0,012	35,22	44,15	49,38	52,98	55,68	63,36	69,80	72,96	74,95	76,35
0,014	31,31	40,12	45,39	49,09	51,90	60,07	67,08	70,58	72,80	74,37
0,016	28,27	36,66	41,89	45,63	48,50	57,02	64,51	68,31	70,73	72,46
0,018	25,64	33,68	38,81	42,54	45,44	54,19	62,08	66,14	68,75	70,62
0,020	23,43	31,10	36,09	39,78	42,68	51,58	59,78	64,06	68,84	68,84

unde $\lambda = a_f/R$, iar x_1 este dat de (31), cu $p = (2/\lambda - 1)^2$. De exemplu, pentru $a_f = -0{,}4$ mm (prelucrare pe extrados), $R = 20$ mm și o eroare maximă admisă $\varepsilon = 0{,}02$ mm, obținem succesiv $\lambda = -0{,}02$, $\varepsilon_0 = \varepsilon/R = 0{,}001$, $p = 10201$, $x_1 = 0{,}00055$, $\theta_{max} = 69°{,}18$.

Pentru ilustrare au fost indicate în tabelul 1 valorile lui θ_{max} calculate pentru diferite valori ale raportului $\lambda = a_f/R$ și ale erorii relative maxime admise $\varepsilon_0 = \varepsilon/R$, care acoperă practic toată plaja de interes practic la prelucrarea pieselor de profil circular. De asemenea, am reprezentat în figura 4 profilul unei piese circulare, precum și profilele teoretice ale sculei prezise de teoria „cos α" (linii punctate) și de teoria potențialului

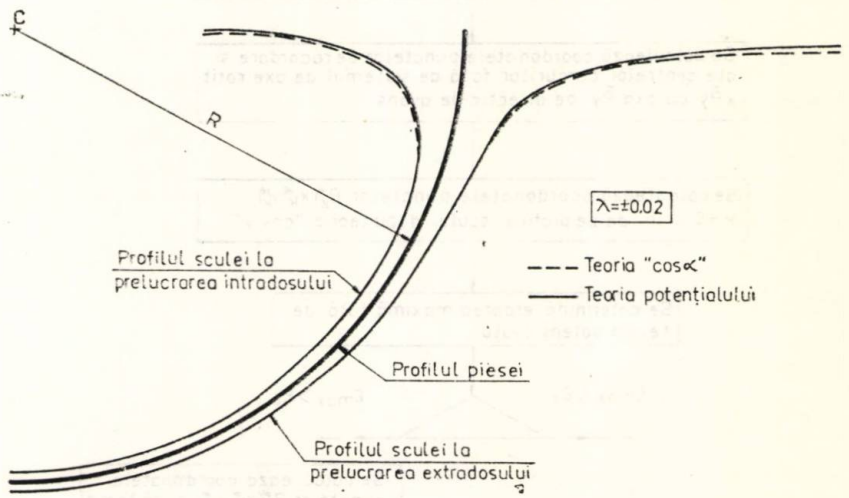


Fig. 4. — Profilul teoretic al sculei prezis prin teoria potențialului (linie continuă) și teoria „cos α" (linie întreruptă) în cazul unei palete cu profil constant.

(linii continue) în cazul prelucrării intradosului, respectiv a extradosului, pentru $\lambda = a_f/R = \pm 0{,}02$. Se observă o bună concordanță între cele două teorii pentru $|\theta| < 60°$, așa cum arată de altfel și rezultatele din tabelul 1, care indică o eroare maximă relativă de numai $4 \cdot 10^{-4}$ pentru $|\lambda| = 0{,}02$ și $|\theta| \simeq 60°$.

Revenind la cazul mai general al racordărilor de cercuri, am reprezentat în figura 5 organigrama de sistem a obținerii elementelor geometrice ale profilului piesei, determinării direcției de avans și preciziei profilului teoretic al sculei prin teoria „cos α", iar dacă $|\theta| > \theta_{max}$ prin teoria potențialului. În paragraful 3 vor fi prezentate rezultatele numerice obținute pentru două cazuri practice folosind un program FORTRAN corespunzător acestei organigrame.

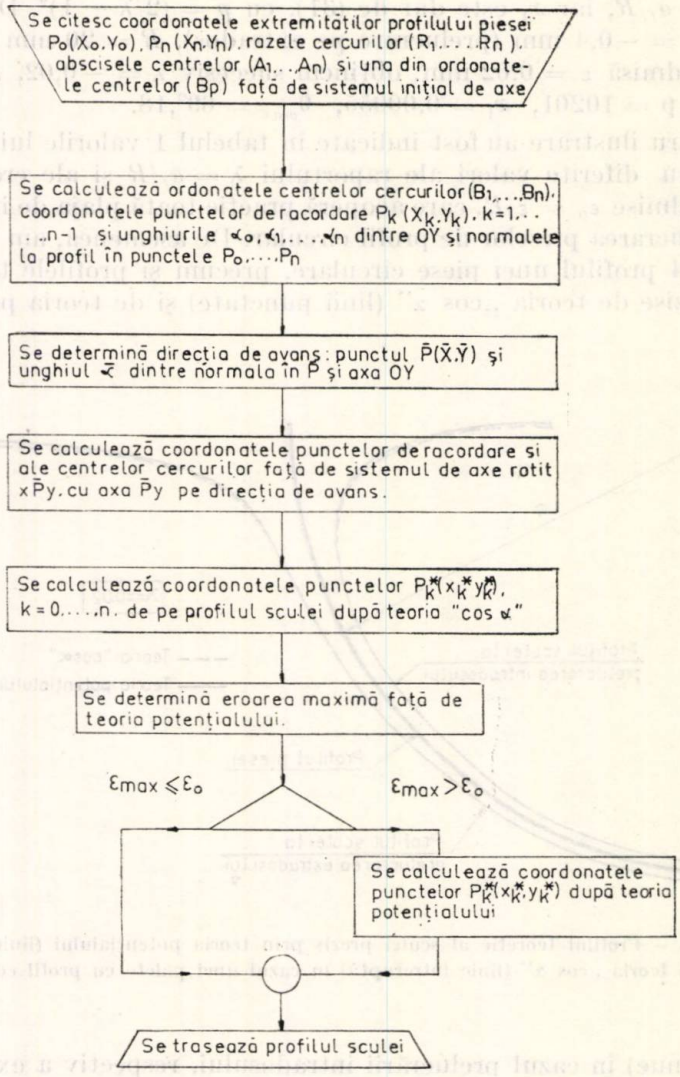


Fig. 5. — Organigrama de sistem pentru determinarea profilului sculei pentru piese cu profil definit prin racordări de cercuri.

2. DETERMINAREA PROFILULUI TEORETIC AL SCULEI PENTRU PIESE CU PROFIL DEFINIT NUMERIC

2.1. DETERMINAREA AXELOR ASOCIATE DIRECȚIEI DE AVANS A SCULEI ȘI A NOILOR COORDONATE ALE PUNCTELOR PROFILULUI PIESEI

În cazul pieselor cu profil alegic, se aleg un număr $n+1$ de puncte P_0, P_1, ..., P_n pe profilul piesei (nu neapărat echidistante) și se indică coordonatele lor (X_k, Y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, față de un sistem arbitrar de axe rectangulare. Pantele tangentelor la profilul Γ al piesei se pot calcula

numeric folosind formulele din calculul cu diferențe finite:

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{Y_1 - Y_0}{X_1 - X_0}, \quad \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{X_n - X_{n-1}},$$
$$\operatorname{tg}\alpha_k = \frac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{X_{k+1} - X_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{34}$$

Putem determina direcția de avans impunînd din nou condiția ca ea să fie paralelă cu bisectoarea unghiului format de normalele la profilul piesei în punctele P_0 și P_n. Obținem atunci, ca în paragraful 1. 2,

$$\operatorname{tg}\bar{\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2}. \tag{35}$$

Prin interpolare putem determina apoi coordonatele $(\bar{X}, \bar{Y})$ ale punctului $\bar{P}$ al profilului situat pe direcția de avans.

Alegem tangenta și normala la Γ în $\bar{P}$ drept noi axe de coordonate x și y (fig. 6). Noile coordonate ale punctelor P_k vor fi date de relațiile

$$x_k = (X_k - \bar{X})\cos\bar{\alpha} + (Y_k - \bar{Y})\sin\bar{\alpha},$$
$$y_k = -(X_k - \bar{X})\sin\bar{\alpha} + (Y_k - \bar{Y})\cos\bar{\alpha}. \tag{36}$$

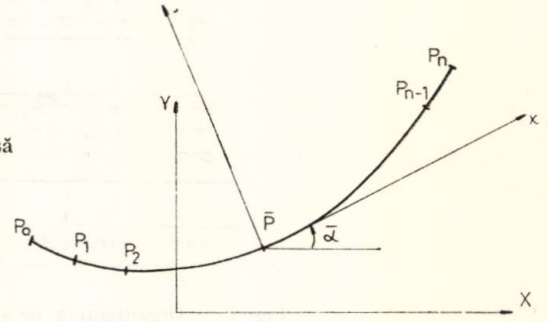


Fig. 6. — Geometria unui profil de piesă variabil alegic.

2.2. DETERMINAREA PROFILULUI TEORETIC AL SCULEI PRIN TEORIA „COS α"

Normala la profilul Γ al piesei în punctul P_k face unghiul θ_k cu axa Oy, unde

$$\theta_k = \alpha_k - \bar{\alpha}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{37}$$

Conform teoriei „cos α", interstițiul dintre P_k și punctul corespunzător P_k^* de pe profilul sculei este $a_f/\cos\theta_k$. Folosind atunci relații tri-

gonometrice simple, rezultă imediat coordonatele (x_k^*, y_k^*) ale punctului P_k^* :

$$x_k^* = x_k - a_f \operatorname{tg} \theta_k \quad y_k^* = y_k + a_f, \tag{38}$$

ceea ce determină profilul teoretic al sculei.

În figura 7 a fost indicată organigrama de sistem pentru determinarea profilului teoretic al sculei pentru piese cu profil variabil alegic, organigramă ce a stat la baza elaborării programului de calcul în limbaj FORTRAN.

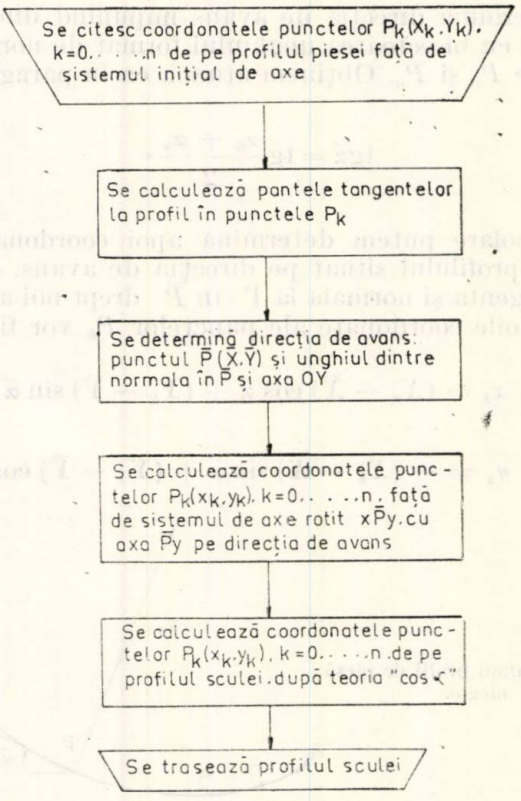


Fig. 7. — Organigrama de sistem pentru determinarea profilului sculei pentru piese cu profil variabil alegic (dat numeric).

3. REZULTATE NUMERICE

3.1. PALETĂ CU PROFIL INTRADOS CONSTANT (CIRCULAR) ȘI PROFIL EXTRADOS VARIABIL LEGIC (DAT PIN RACORDĂRI DE CERCURI)

Ca prim exemplu de aplicare a rezultatelor de mai sus am considerat paleta reprezentată în figura 8, al cărei profil intrados este un cerc de rază $R = 26{,}4$ mm și al cărei profil extrados este definit prin racordarea a

trei cercuri de raze $R_1 = 36$ mm, $R_2 = 14{,}84$ mm și $R_3 = 100$ mm. Aplicînd metodologia expusă în paragraful 1, a fost elaborat un program de calcul în limbaj FORTRAN cu ajutorul căruia s-au obținut mai întîi parametrii geometrici ai intradosului și extradosului indicați în tabelele 2, respectiv 3. Alegîndu-se interstițiul frontal $a_f = 0{,}3$ mm pentru intrados și

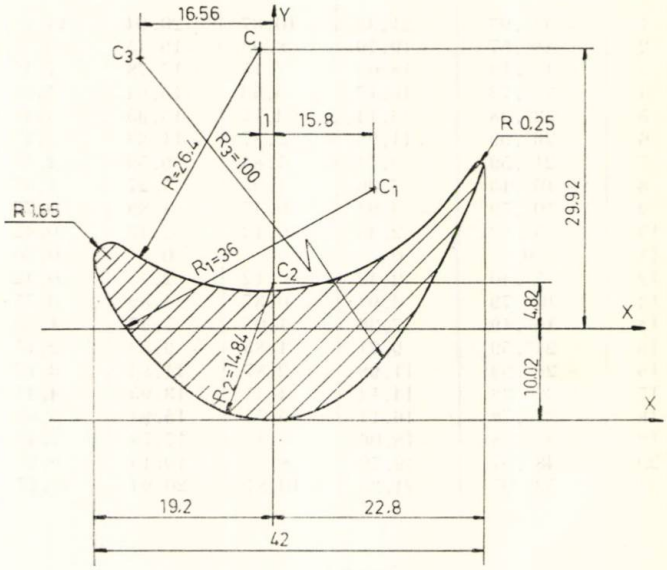


Fig. 8. — Paletă cu intrados de profil constant și extrados de profil variabil legic (definit prin racordarea a trei arce de cerc).

Tabelul 2

Parametrii geometrici ai intradosului cu profil constant al paletei din figura 8

k	A_k	B_k	R_k	α_k	X_k	Y_k	a_k	b_k	θ_k	x_k	y_k
0	—	—	—	—43°58	—19,2	10,79	—	—	—53°97	—21,35	10,87
1	—1	29,92	26,4	64°36	22,8	18,50	0	26,4	53°97	21,35	10,87

Tabelul 3

Parametrii geometrici ai extradosului cu profil legic al paletei din figura 8

k_s	A_k	B_k	R_k	α_k	X_k	Y_k	a_k	b_k	θ_k	x_k	y_k
0	—	—	—	—76°,46	—19,2	20,49	—	—	—71°,24	—19,63	18,72
1	15,8	28,92	36	—48°,30	—11,08	4,97	14,45	30,30	—43°,07	—10,13	4,00
2	0	14,84	14,84	53°,62	11,95	6,04	0	14,84	58°,85	12,70	7,17
3	—68,56	65,35	100	66°,01	22,8	24,69	—72,88	58,89	71°,24	21,81	26,73

$a_f = -0{,}3$ mm pentru extrados, au fost calculate apoi coordonatele punctelor $P_k^*(x_k^*, y_k^*)$ de pe profilul teoretic al sculei cu ajutorul teoriei „cos α". Rezultatele obținute sînt indicate în tabelele 4 și 5.

Tabelul 4

Calculul numeric al profilului teoretic al sculei la prelucrarea intradosului cu profil constant al paletei din figura 8

p	θ_p	x_p	y_p	x_p^*	y_p^*
1	−53°,97	−21,35	10,87	−20,94	11,17
2	−48°,57	−19,79	8,93	−19,45	9,23
3	−43°,18	−18,06	7,15	−17,78	7,45
4	−37°,78	−16,17	5,53	−15,94	5,83
5	−32°,38	−14,14	4,11	−13,95	4,41
6	−26°,99	−11,98	2,87	−11,83	3,17
7	−21°,59	− 9,71	1,85	− 9,59	2,15
8	−16°,19	− 7,36	1,05	− 7,27	1,35
9	−10°,79	− 4,94	0,47	− 4,89	0,77
10	− 5°,40	− 2,48	0,12	− 2,45	0,42
11	0	0	0	0	0,30
12	5°,40	2,48	0,12	2,45	0,42
13	10°,79	4,94	0,37	4,89	0,77
14	16°,19	7,36	1,05	7,27	1,35
15	21°,59	9,71	1,85	9,59	2,15
16	26°,99	11,98	2,87	11,83	3,17
17	32°,38	14,14	4,11	13,95	4,41
18	37°,78	16,17	5,55	15,94	5,83
19	43°,18	18,06	7,15	17,78	7,45
20	48°,57	19,79	8,93	19,45	9,23
21	53°,97	21,35	10,87	20,94	11,17

Tabelul 5

Calculul numeric al profilului teoretic al sculei la prelucrarea extradosului cu profil variabil legic al paletei din figura 8.

p	θ_p	x_p	y_p	x_p^*	y_p^*
1	−71°,24	−19,63	17,82	−18,75	19,02
2	−64°,12	−17,94	14,58	−17,32	14,88
3	−56°,99	−15,74	10,69	−15,28	10,99
	−49°,87	−13,07	7,10	−12,72	7,40
5	−42°,74	−10,07	3,94	− 9,79	4,24
6	−35°,62	− 8,64	2,78	− 8,43	3,08
7	−28°,49	− 7,08	1,80	− 6,92	2,10
8	−21°,37	− 5,41	1,02	− 5,29	1,32
9	−14°,24	− 3,65	0,46	− 3,58	0,76
10	− 7°,12	− 1,84	0,11	− 1,80	0,41
11	0	0	0	0	0,30
12	7°,13	1,84	0,11	1,80	0,41
13	14°,25	3,65	0,46	3,58	0,76
14	21°,37	5,41	1,02	5,29	1,32
15	28°,50	6,08	1,80	6,92	2,10
16	35°,62	8,64	2,78	8,43	3,08
17	42°,75	10,07	3,94	9,80	4,24
18	49°,87	11,35	5,28	10,99	5,58
19	57°,00	12,45	6,76	11,98	7,06
20	64°,12	17,09	15,24	16,47	15,54
21	71°,24	21,81	26,73	20,93	27,04

Cu ajutorul formulei (25) a fost calculată apoi eroarea relativă maximă față de teoria potențialului, corespunzătoare unghiului de închidere a profilului. Întrucît s-a obținut

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon(53,°97) = 7,8 \times 10^{-2} \text{ pentru intrados,}$$

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon(-71°,24) = 7,2 \times 10^{-2} \text{ pentru extrados,}$$

adică erori relative cu totul admisibile în practica curentă, nu a mai fost folosit un calcul suplimentar al profilului teoretic al sculei prin formulele rezultate din teoria potențialului.

3.2. PALETĂ CU PROFIL VARIABIL ALGEBRIC (DAT NUMERIC)

Ca al doilea exemplu a fost considerată paleta cu profil alegic reprezentată în figura 9. Definirea profilului s-a făcut prin indicarea coordonatelor a cîte 11 puncte situate pe intrados (P_0, P_1, ..., P_{10}) și pe extrados (P'_0, P'_1, ..., P'_{10}) față de sistemul de axe notat XOY. În primele trei coloane ale tabelelor 6 și 7 sînt indicate valorile coordonatelor acestor puncte precum și pantele tangentelor corespunzătoare la profil, calculate cu formulele (34). Aplicînd apoi relația (35) a fost determinat $\bar{\alpha}$, iar din tabelele 6 și 7 s-au obținut prin interpolare liniară coordonatele $\bar{X}$ și $\bar{Y}$ ale punctului $\bar{P}$ situat pe direcția de avans. Au rezultat astfel pentru extrados:

$$\bar{\alpha} = -5°,90;$$

$$\bar{X} = -46,74 \text{ mm};$$

$$\bar{Y} = -10,45 \text{ mm};$$

iar pentru intrados:

$$\bar{\alpha} = -4°,83;$$

$$\bar{X} = -44,80 \text{ mm};$$

$$\bar{Y} = -4,79 \text{ mm}.$$

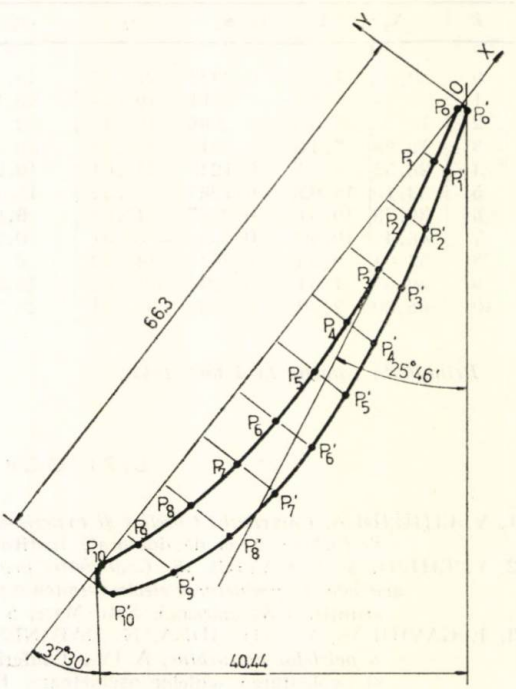


Fig. 9. — Paletă cu profil variabil alegic.

În continuare au fost calculate cu ajutorul relațiilor (36) — (38) noile coordonate (x_k, y_k) ale punctelor P_k, unghiurile θ_k și coordonatele (x_k^*, y_k^*) ale punctelor corespunzătoare P_k^* de pe profilul teoretic al sculei, valori indicate de asemenea în tabelele 6 și 7.

Tabelul 6

Calculul numeric al profilului teoretic al sculei la prelucrarea intradosului paletei cu profil variabil din figura 9

k	$-X_k$	$-Y_k$	tg α_k	α_k	x_k	y_k	θ_k	x_k^*	y_k^*
0	0,80	0,0	0,1955	11,06	43,43	8,48	15,89	43,35	8,78
1	6,63	1,14	0,1846	10,46	37,72	6,85	15,29	37,64	7,15
2	13,26	2,30	0,1735	9,84	31,21	5,14	14,67	31,13	5,44
3	19,89	3,44	0,1448	8,24	24,70	3,44	13,07	24,63	3,74
4	26,52	4,22	0,1086	6,20	18,16	2,11	11,03	18,10	2,41
5	33,15	4,88	0,0596	3,41	11,61	0,89	8,24	11,56	1,19
6	39,78	5,01	−0,0121	− 0,69	5,01	0,20	4,14	4,99	0,50
7	46,41	4,72	−0,1078	− 6,16	− 1,62	−0,07	− 1,33	− 1,61	0,23
8	53,04	3,58	−0,2353	−13,24	− 8,32	0,51	− 8,41	− 8,28	0,81
9	59,67	1,60	−0,3297	−18,24	− 9,12	2,42	−13,41	− 9,05	2,73
10	63,90	0,0	−0,3783	−20,72	−19,45	3,16	−15,89	−19,36	3,46

Tabelul 7

Calculul numeric al profilului teoretic al sculei la prelucrarea extradosului paletei cu profil variabil alegic din figura 9

k	$-X_k$	$-Y_k$	tg α_k	α_k	x_k	y_k	θ_k	x_k^*	y_k^*
0	0,0	1,00	0,3922	21°,41	45,49	14,10	27°,31	45,65	13,80
1	6,63	3,60	0,3514	19°,36	39,16	10,83	25°,26	39,31	10,53
2	13,26	5,56	0,2896	16°,15	32,78	8,10	22°,05	32,90	7,80
3	19,89	7,44	0,2413	13°,58	26,37	5,65	19°,48	26,47	5,35
4	26,52	8,86	0,1946	11°,01	19,92	3,56	16°,91	20,01	3,26
5	33,15	10,02	0,1267	7°,22	13,44	1,72	13°,12	13,51	1,42
6	39,78	10,54	0,0287	1°,64	6,90	0,52	7°,54	6,94	0,22
7	46,41	10,40	−0,0965	− 5°,51	0,29	− 0,02	0°,39	0,30	−0,32
8	53,04	9,26	−0,2534	−14°,22	− 6,42	0,43	− 8°,32	− 6,46	0,13
9	59,67	7,04	−0,4947	−26°,32	−13,54	1,93	−20°,42	−13,65	1,63
10	66,30	2,70	−0,6546	−33°,21	−20,28	5,59	−27°,31	−20,44	5,29

Primită la redacție la 5 mai 1982

BIBLIOGRAFIE

1. V. CHIUJDEA, *Contribuții teoretice și experimentale la prelucrarea electrochimică a paletelor de turbine*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1980.
2. V. CHIJDEA, I. GAVRILAȘ, *Contribuții privind calculul și construcția electrozilor sculă monobloc la prelucrarea electrochimică a paletelor de turbine*, Prima Sesiune tehnico-științifică Sătmăreană, Satu Mare, 5—7 oct. 1979, vol. 1, p. 37—41.
3. I. GAVRILAȘ, V. CHIUJDEA, N. MARINESCU, *Scule pentru prelucrarea electrochimică a paletelor de turbine*, A IV-a Conferință Republicană de proiectarea, tehnologia și exploatarea sculelor aşchietoare, Brașov 1977, p. 161—164.
4. P. LAWRENCE, *Production of tool and workpiece shapes*, ISEM, V, 1979, Elveția, p. 101—104.

REZULTATE EXPERIMENTALE ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR NEPERMANENTE DIN SISTEMELE HIDRAULICE SUB PRESIUNE. II

de MIHAIL POPESCU
Institutul de cercetări hidrotehnice, București

În partea a II-a a lucrării se prezintă și se analizează rezultatele experimentale obținute pe o instalație complexă de laborator privind studiul mișcărilor lent variabile și al mișcărilor nepermanente din domeniul de trecere între mișcările rapid și lent variabile, din sistemele hidraulice sub presiune.
Experimentările de laborator s-au efectuat pe schemele hidraulice I și II prevăzute cu castel de echilibru sau rezervor de aer, precum și în variantele castel de echilibru cu diafragmă și rezervor de aer cu rezistență hidraulică asimetrică.

1. REZULTATE EXPERIMENTALE ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR LENT VARIABILE (OSCILAȚIE ÎN MASĂ)

S-au efectuat experimentări cu aceeași gamă de debite de regim permanent folosită la studiul mișcărilor rapid variabile [3]. S-a reprodus pe cale experimentală și s-a măsurat fenomenul de oscilație în masă pe schemele hidraulice fundamentale I și II, prevăzute cu instalații de protecție de tip castel de echilibru sau rezervor cu pernă de aer sub presiune (rezervor de aer).

În acest articol, ne vom referi și la figurile cuprinse în prima parte a lucrării [3], folosind notațiile 1—I, 2—I,... 12—I.

1.1. SCHEMA HIDRAULICĂ I, CU CASTEL DE ECHILIBRU (I—A)

Schema este prezentată în figurile 2—I și 4—I.

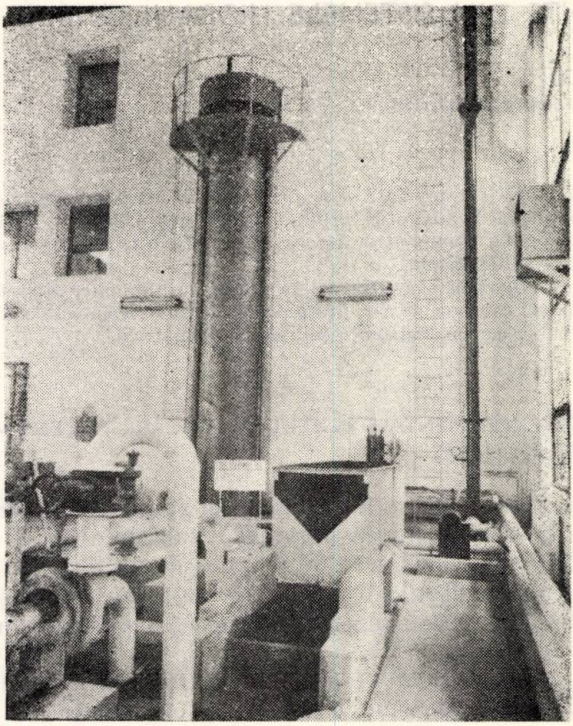
Castelul de echilibru din cadrul instalației experimentale ($H = 10{,}5$ m; $D = 200$ mm) este prevăzut la partea superioară cu o miră gradată de lungime 3 m, iar la partea inferioară cu un manometru de 2 atm. Mira permite citirea directă a nivelului instantaneu al apei în castel pe un tronson confecționat dintr-un material transparent.

În cadrul experimentărilor, variația nivelului apei din castel s-a măsurat fie prin înregistrare cu aparatură electronică, fie prin citire directă la manometru, la intervale de timp de 5 s (fig. 1). S-au efectuat manevre de închidere sau deschidere bruscă de vană, simulîndu-se astfel manevrele de oprire sau pornire a unei uzine hidroelectrice cu castel de echilibru.

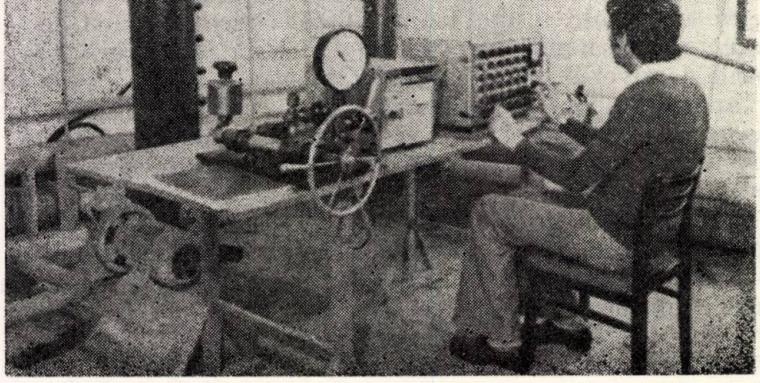
Dintr-un mare număr de experiențe efectuate, în figura 2 se prezintă măsurătorile de nivel al apei din castel, pentru două debite de regim. Se constată apariția unor oscilații armonice amortizate la manevrele de închidere bruscă a vanei și a unor oscilații aperiodice la manevrele de deschidere a vanei. Perioada oscilațiilor armonice ale nivelului apei din castel este de 43 s.

Se evidențiază caracterul de mișcare lent variabilă a apei în sistem (oscilație în masă) imprimat de castelul de echilibru al instalației (fig. 2), comparativ cu mișcarea rapid variabilă a apei din același sistem, în absența mijloacelor de protecție (fig. 6—I).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 5, 1982, P. 595—609



a



b

Fig. 1. — Instalația experimentală de laborator pentru studiul mișcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune : *a* — vedere de ansamblu ; *b* — aparatură electronică de măsură.

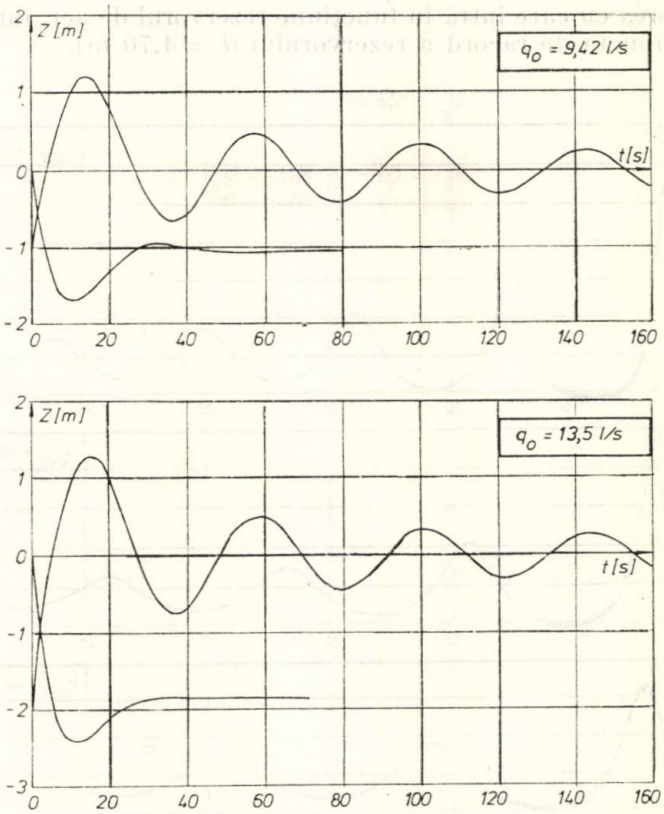


Fig. 2. — Schema I — A : măsurători de nivel în castelul de echilibru la manevrele bruște de închidere sau deschidere a vanei, pentru două debite de regim.

1.2. SCHEMA HIDRAULICĂ I, CU REZERVOR DE AER (I—B)

Schema este prezentată în figurile 2—I și 4—I.

Rezervorul de aer din cadrul instalației experimentale ($h = 2$ m; $D = 300$ mm) este prevăzut cu un număr de șase ștuțuri cu robineți montate pe verticală, care asigură reținerea în rezervor a unor volume de aer de mărimi controlate (între 10,5 l și 63,5 l), la presiunea de regim. Rezervorul este alimentat cu aer de la un compresor acționat de un motor electric. S-au efectuat experiențe cu înregistrări simultane de presiune în trei puncte de pe conductă, pentru mai multe debite de regim și volume ale pernei de aer a rezervorului. O parte din aceste rezultate sînt prezentate în figura 3, pentru debitul de regim $q_0 = 17{,}8$ l/s. Se constată pe cale experimentală că efectul rezervorului de aer asupra mișcării nepermanente a apei din sistem este similar celui întîlnit la castelul de echilibru.

Din analiza rezultatelor experimentale rezultă că mărirea volumului pernei de aer din rezervor conduce la micșorarea amplitudinilor și frecvențelor oscilațiilor de presiune ale apei din sistem. Vîrful de presiune care

apare pe diagrame, imediat după închiderea bruscă a vanei, se explică prin întîrzierea cu care intră în funcțiune rezervorul de aer, întîrziere produsă de conducta de racord a rezervorului ($l = 4{,}70$ m).

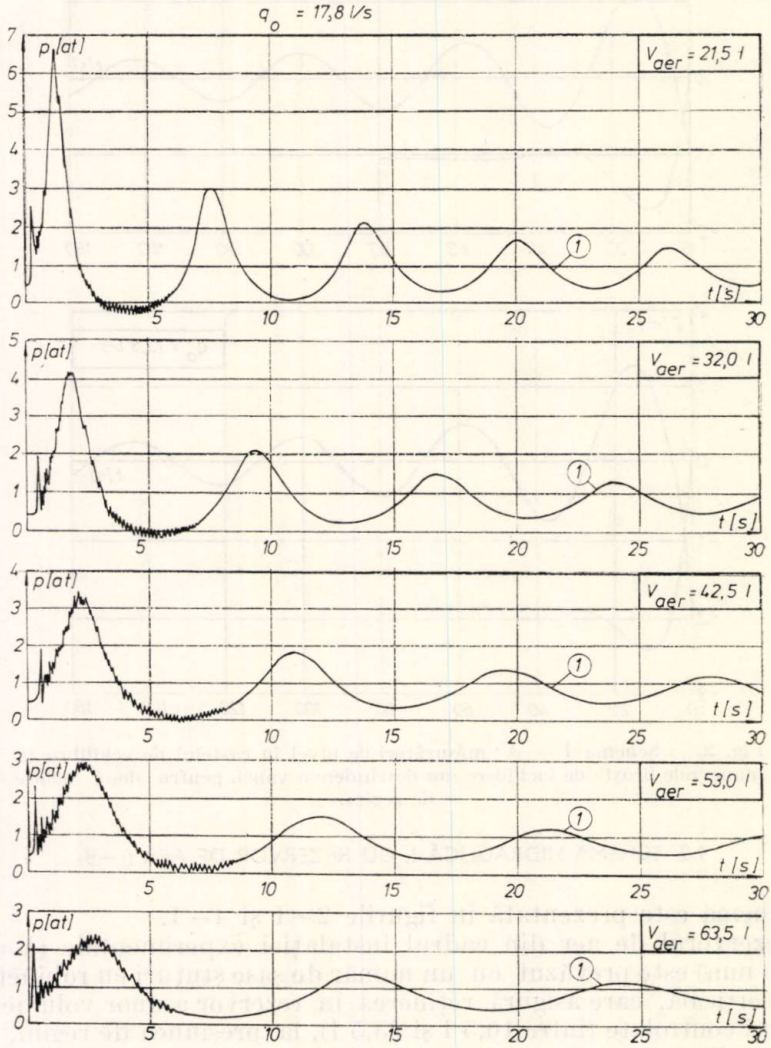


Fig. 3. — Schema I—B : măsurători de presiune în secțiunea 1 de pe conductă la manevra de închidere bruscă a vanei, pentru diverse volume ale pernei de aer a rezervorului

1.3. SCHEMA HIDRAULICĂ II, CU CASTEL DE ECHILIBRU (II—A)

Schema este prezentată în figurile 3—I și 5—I.

S-au făcut experiențe similare celor menționate anterior în cazul schemei hidraulice I, cu castel de echilibru (I—A).

În acest caz, manevrele de închidere sau deschidere bruscă de vană simulează manevrele de oprire sau pornire a unei stații de pompare prevăzute cu castel de echilibru la bază *).

În figura 4 se prezintă măsurătorile de nivel al apei din castel, efectuate pentru două debite de regim. Și aici se constată apariția unor oscilații armonice amortizate la manevrele de închidere bruscă a vanei și a unor oscilații aperiodice la manevrele de deschidere a vanei. Perioada oscilațiilor armonice ale nivelului apei din castel se păstrează la aceeași valoare de 43 s. Se evidențiază și aici caracterul de mișcare lent variabilă a apei din sistem (oscilație în masă) imprimat de castelul de echilibru al instalației (fig. 4).

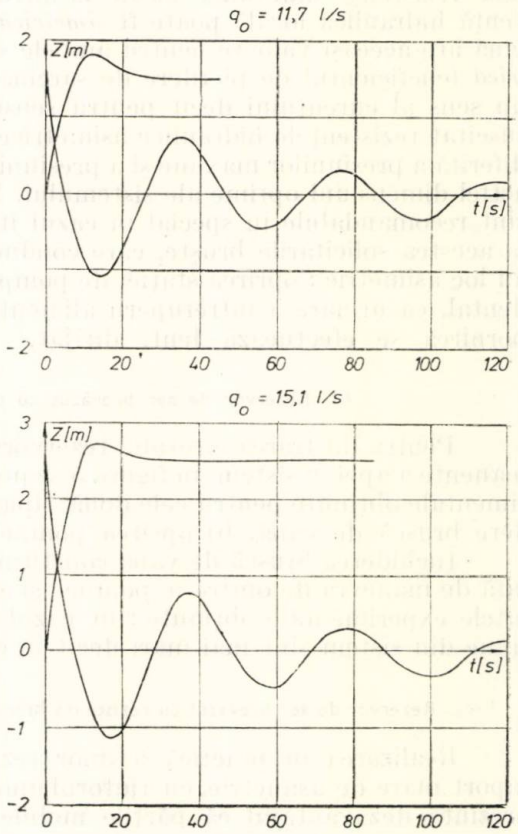


Fig. 4. — Schema II—A : măsurători de nivel în castelul de echilibru la manevrele bruște de închidere sau deschidere a vanei, pentru două debite de regim.

1.4. SCHEMA HIDRAULICĂ II, CU REZERVOR DE AER (II—B)

Schema este prezentată în figurile 3—I și 5—I.

Pe instalație s-au efectuat manevre de închidere bruscă de vană sau oprire de pompă, care simulează diferite situații de oprire a unei stații de pompare. La manevra de oprire de pompă, ca urmare a întreruperii ali-

*) În practica de exploatare a stațiilor de pompare nu se folosesc manevre de porniri bruște a stației. În mod normal, pornirea stației se efectuează lent, dirijat.

mentării cu energie electrică, închiderea circuitului hidraulic rezervor de aer-conductă-rezervor de refulare se realizează de către un clapet de reținere montat lîngă pompă. Și în acest caz s-au efectuat experiențe cu înregistrări simultane de presiune în trei puncte de pe conductă, pentru mai multe debite de regim și volume ale pernelor de aer ale rezervorului.

S-a studiat efectul rezervorului de aer ca mijloc de protecție a unei stații de pompare, în două variante : rezervor de aer cu conductă simplă de legătură și rezervor de aer cu rezistență hidraulică asimetrică pe conducta de legătură.

Pentru reglarea presiunilor maxime și minime în sistemele hidraulice sub presiune echipate cu castele de echilibru sau rezervoare de aer se folosesc rezistențe hidraulice locale la intrarea în aceste dispozitive. O rezistență hidraulică locală poate fi *simetrică* (coeficientul de pierdere de sarcină are aceeași valoare pentru ambele sensuri ale curentului) sau *asimetrică* (coeficientul de pierdere de sarcină are o valoare mai mare pentru un sens al curentului decît pentru sensul opus). Un interes deosebit au suscitat rezistențele hidraulice asimetrice, întrucît acestea permit reglarea diferită a presiunilor maxime și a presiunilor minime în sisten, obținîndu-se astfel dimensiuni optime ale sistemului. Rezistențele hidraulice asimetrice sînt recomandabile în special în cazul instalațiilor de pompare, întrucît, la acestea solicitările bruște, care conduc la variații mari ale presiunilor, au loc asimetric : oprirea stației de pompare se poate produce brusc, accidental, ca urmare a întreruperii alimentării cu energie electrică, pe cînd pornirea se efectuează lent, dirijat.

1.4.1. Rezervor de aer prevăzut cu conductă simplă de legătură

Pentru ilustrarea efectului rezervorului de aer asupra mișcării nepermanente a apei în sistem, în figura 5 se prezintă o parte a rezultatelor experimentale obținute pentru cele două tipuri de manevră de debit : a) închidere bruscă de vană, b) oprirea pompei.

Închiderea bruscă de vană constituie o manevră de debit mai severă față de manevra de oprire a pompei și acest fapt este ilustrat prin rezultatele experimentale obținute : în cazul a) amplitudinile maxime de presiune din sistem sînt mai mari decît în cazul b) (fig. 5).

1.4.2. Rezervor de aer prevăzut cu rezistență hidraulică asimetrică pe conducta de legătură

Realizarea în practică a unor rezistențe hidraulice asimetrice cu raport mare de asimetrie, cu ajutorul unor conducte prevăzute cu clapeți, prezintă dezavantajul că părțile mobile în mișcare pot provoca șocuri mecanice puternice în sistem. Din acest motiv, aplicabilitate mai largă, în special la stațiile de pompare mari, au căpătat rezistențele hidraulice asimetrice realizate din piese fixe.

În laboratorul de hidraulică din Institutul de cercetări hidrotehnice s-a conceput și realizat un tip nou de dispozitiv, construit din piese fixe, capabil să producă rezistențe hidraulice asimetrice [4], care are următoarele avantaje :

— asigură rapoarte de asimetrie relativ mari ;
— construcție simplă.

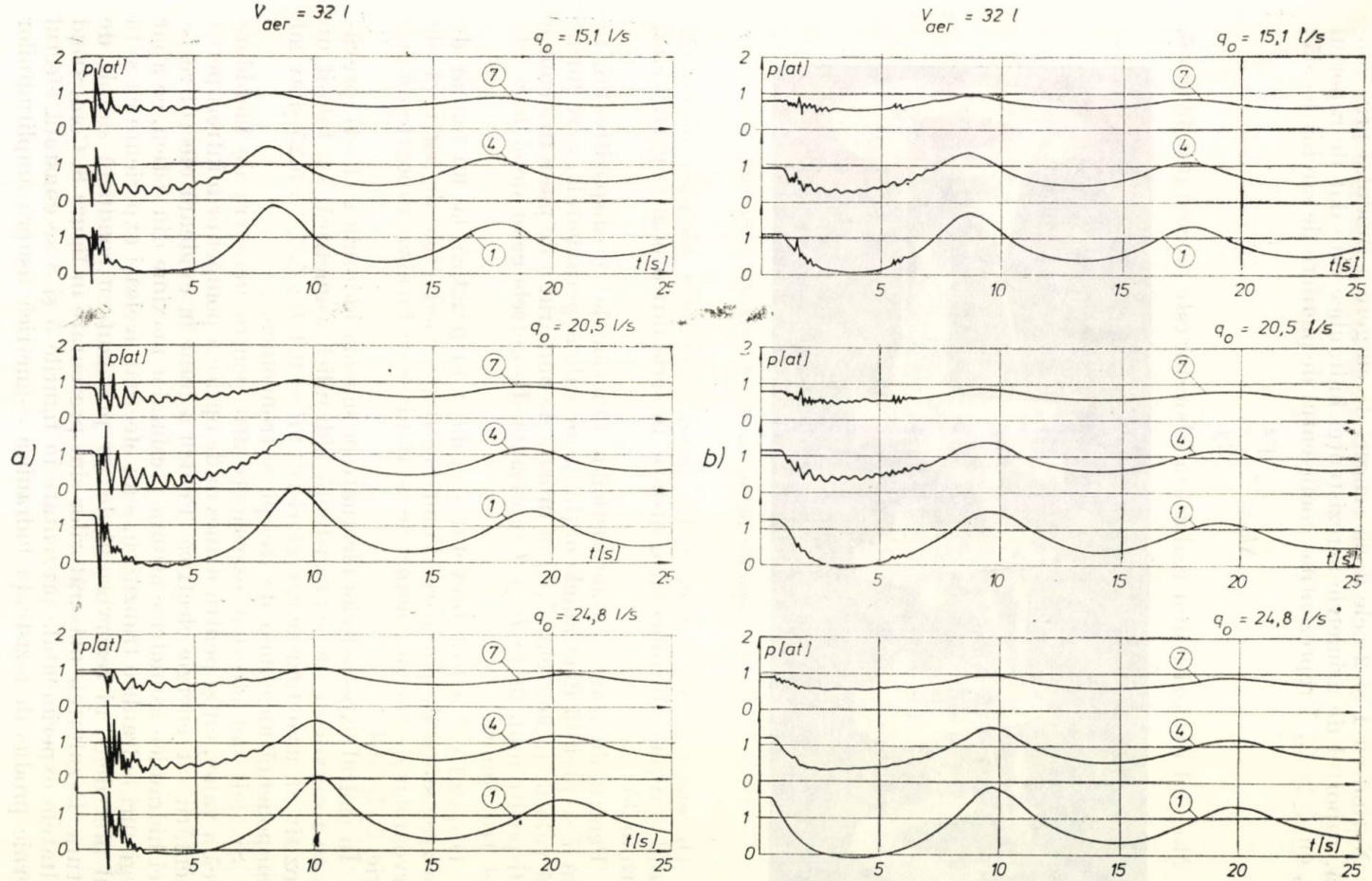


Fig. 5. — Schema II—B : măsurători de presiune în trei puncte de pe traseul conductei, pentru diverse debite de regim (volumul pernei de aer a rezervorului la regim = 32 l) ; *a* — închidere bruscă de vană ; *b* — oprirea pompei.

Notînd cu 1 și 2 cele două sensuri de curgere a fluidului prin conductă, raportul de asimetrie a rezistenței hidraulice este dat de raportul ζ_2/ζ_1, cu $\zeta_2 > \zeta_1$, ζ reprezentînd coeficientul de pierdere de sarcină locală:

$$\Delta h = \zeta \frac{V^2}{2g}.$$

Modelul dispozitivului realizat în laborator este prezentat în figura 6.

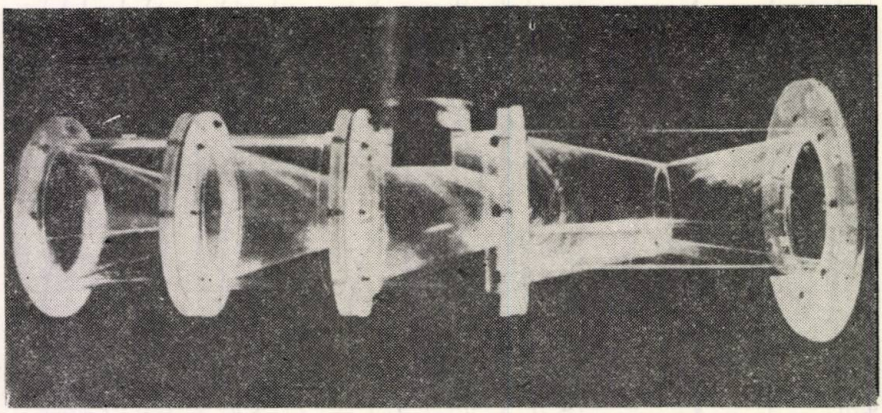


Fig. 6. — Modelul dispozitivului de rezistență hidraulică asimetrică.

Dispozitivul se compune din piese tronconice identice în număr variabil și o piesă bitronconică, dispuse în serie într-o poziție particulară, determinată.

Pentru ilustrarea caracteristicilor funcționale ale dispozitivului, în figura 7 se preintă diagramele obținute pe cale experimentală, care furnizează valorile rapoartelor ζ_2/ζ_1 în funcție de numărul n de piese tronconice ale dispozitivului, unde D și d reprezintă diametrele celor două baze ale piesei tronconice.

Dispozitivul a fost brevetat și aplicat în practică la un număr de peste zece stații de pompare. Fiind plasat pe conductele de legătură ale rezervoarelor de aer cu conductele de refulare, a furnizat rapoarte de asimetrie $\zeta_2/\zeta_1 = 4$.

În cadrul experiențelor efectuate pe schema hidraulică II—B, prevăzută cu rezervor de aer cu rezistență hidraulică asimetrică, s-a folosit un dispozitiv cu următoarele caracteristici: $d = 0{,}4\ D$; $\zeta_2/\zeta_1 = 5{,}25$ și avînd în componență un număr de trei piese tronconice.

Și aici s-au efectuat experiențe atît pentru manevra de închidere bruscă a vanei, cît și pentru manevra de oprire a pompei prin întreruperea alimentării cu energie electrică. Pentru a pune în evidență efectul rezistenței hidraulice asimetrice asupra presiunilor maxime din sistem, ce apar la regimuri hidraulice tranzitorii, s-au efectuat aceleași experiențe ca și în cazul precedent, al rezervorului de aer prevăzut cu conductă simplă de legătură. Rezultatele măsurătorilor sînt prezentate în figura 8. Comparînd rezultatele experimentale prezentate în figurile 5 și 8 se constată efectul puternic produs de rezistența hidraulică asimetrică asupra amplitudinilor

maxime de presiune din sistem, reușindu-se în anumite cazuri *să se reducă presiunile maxime de regim nepermanent, sub valorile presiunilor de regim permanent.* Acest ultim efect de performanță a fost aplicat la două stații de pompare din țara noastră [5]. Vîrfurile de presiune de variație rapidă care apar pe diagramele din figurile 5 și 8 pentru cazul a) se datoresc aceleiași cauze întîlnite la analiza rezultatelor experimentale de la schema I—B.

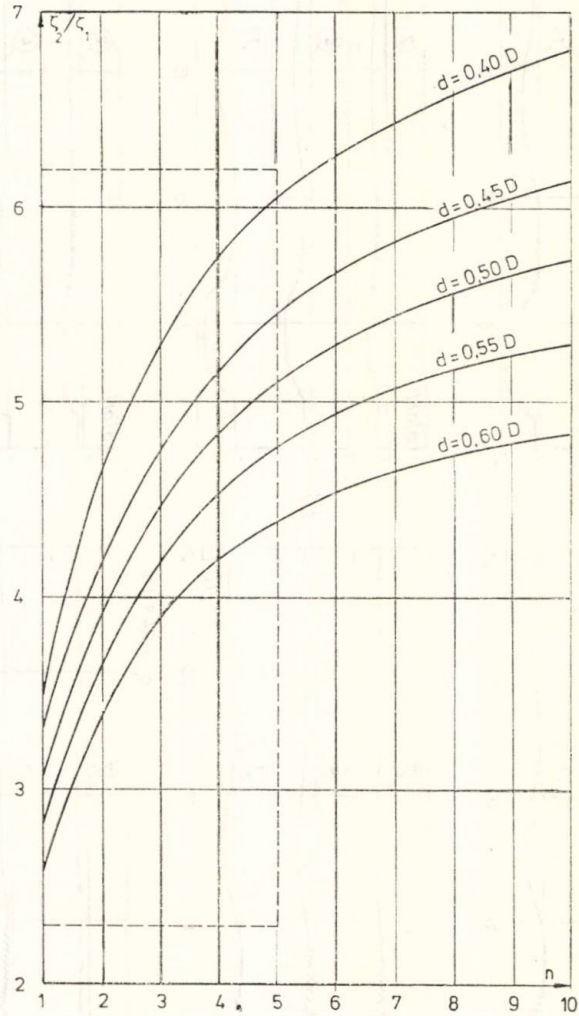


Fig. 7. — Diagramele caracteristice ale dispozitivului de rezistență hidraulice asimetrică.

Din analiza tuturor rezultatelor obținute pe schemele hidraulice I și II, în variantele cu sau fără mijloace de protecție, se confirmă și pe cale experimentală că atît castelul de echilibru cît și rezervorul de aer schimbă calitatea fenomenului de mișcare nepermanentă a apei în sistem și că în prezența acestor mijloace de protecție, pe galeria de aducțiune a uzinelor

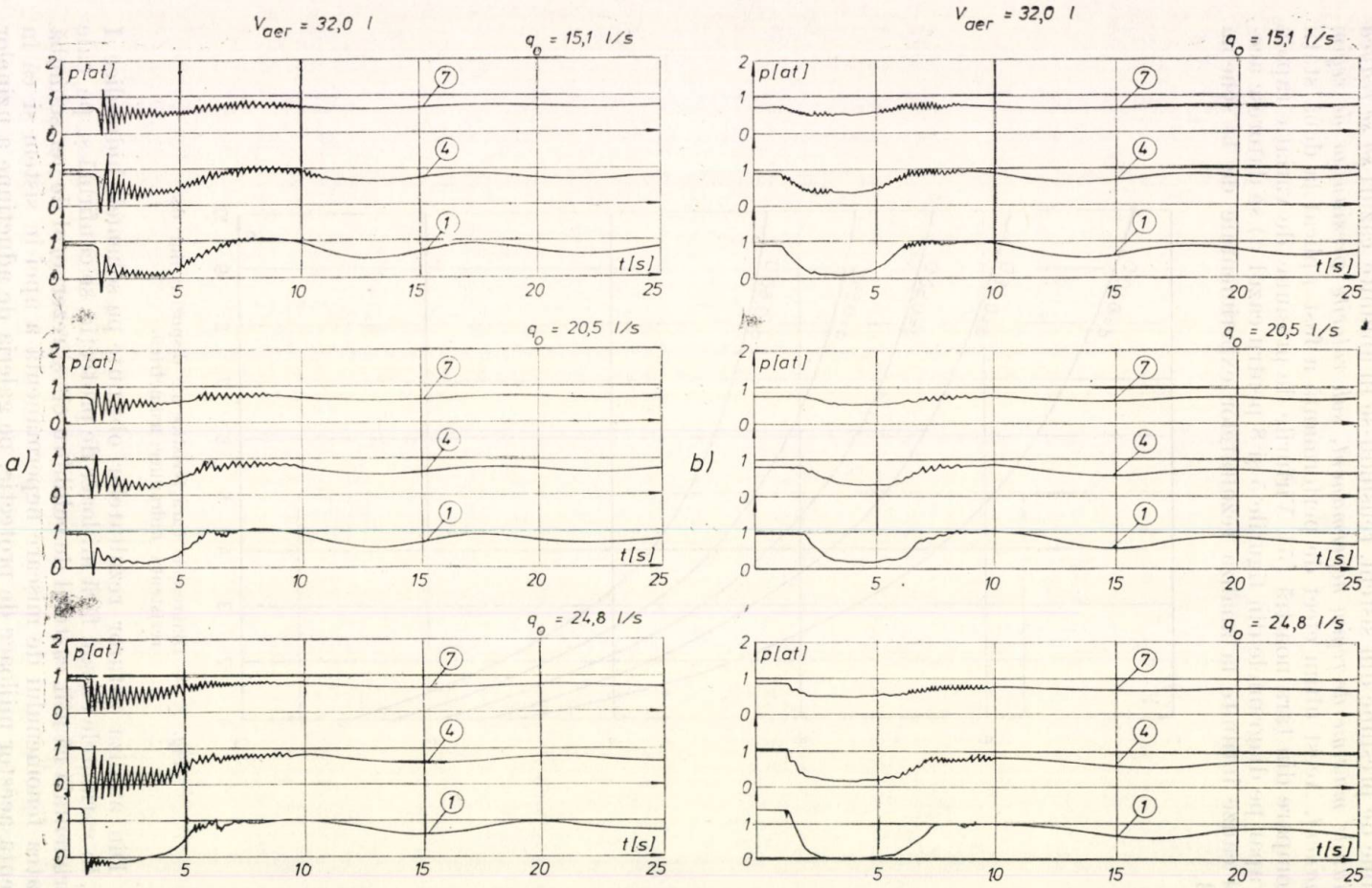


Fig. 8. — Schema II—B, cu rezervorul de aer prevăzut cu rezistență hidraulică asimetrică: măsurători de presiune în trei puncte de pe traseul conductei pentru diverse debite de regim: *a* — închidere bruscă de vană; *b* — oprirea pompei.

hidroelectrice sau în conductele de refulare ale stațiilor de pompare *nu se mai produce fenomenul lovitură de berbec.*

2. REZULTATE EXPERIMENTALE ÎN STUDIUL MIȘCĂRILOR NEPERMANENTE DIN DOMENIUL DE TRECERE ÎNTRE MIȘCĂRILE RAPID ȘI LENT VARIABILE

În prima parte a lucrării [3], referindu-ne la tipurile de mișcări rapid și lent variabile, am menționat principalele lor caracteristici precum și condițiile în care pot să apară în sistemele hidraulice sub presiune.

Pentru delimitarea celor două tipuri de mișcări nepermanente am ales ca mărimi caracteristice amplitudinile și frecvențele oscilațiilor de presiune ale apei din sistem și am reținut ca principali factori care influențează caracterul mișcării *elasticitatea lichidului și a pereților conductei* precum și *transportul de masă al apei* în sistem.

Astfel, am definit și delimitat *mișcările rapid variabile* (RV) și *mișcările lent variabile* (*LV*), după cum unul sau altul din cei doi factori menționați anterior influențează decisiv fenomenul mișcării nepermanente a apei din sistem. În ceea ce privește calculul hidraulic al celor două tipuri de mișcări, s-a adoptat, după caz, modelul de fluid compresibil sau modelul de fluid incompresibil, efectuîndu-se studii speciale pentru delimitarea valabilității unuia din aceste modele [1].

În literatura de specialitate nu există o delimitare strictă între mișcările rapid variabile și mișcările lent variabile din sistemele hidraulice sub presiune.

În lucrarea de față vom introduce noțiunea de *mișcări nepermanente din domeniul de trecere între mișcările rapid și lent variabile* (*DT*), din sistemele hidraulice sub presiune.

Acest nou tip de mișcări nepermanente se caracterizează prin aceea că este influențat într-o anumită măsură de ambii factori care determină în general caracterul mișcării nepermanente a apei în sistemele sub presiune și anume, atît de *elasticitatea lichidului și a pereților conductei*, cît și de *transportul de masă al apei* în sistem.

Calculul hidraulic al acestor mișcări se poate efectua, evident, numai cu modelul de fluid compresibil, folosind ecuațiile loviturii de berbec.

Studiul experimental al *mișcărilor nepermanente de tip* (*DT*) s-a efectuat pe instalația hidraulică I—A, cu castel de echilibru prevăzut cu diagramă simplă pe conducta de legătură.

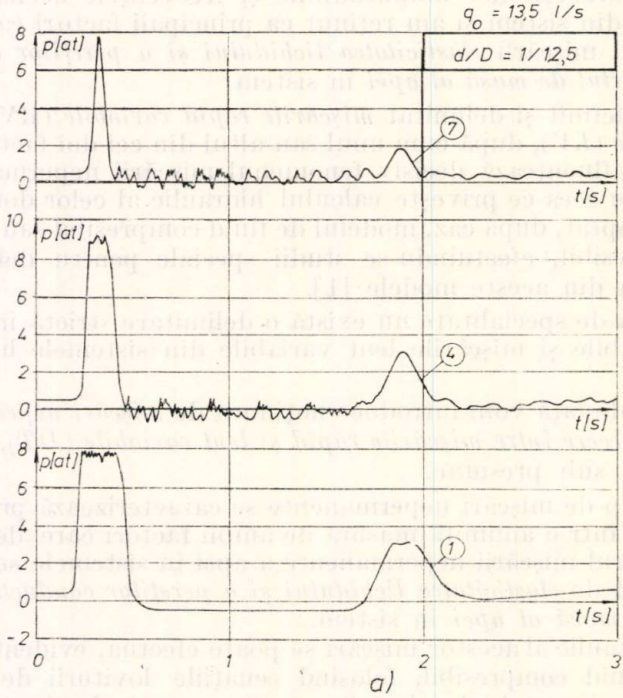
De semnalat un studiu hidraulic experimental — efectuat pe o instalație similară de laborator — în care s-a analizat fenomenul de transmitere a loviturii de berbec pe galeria de aducțiune a unei uzine hidroelectrice, funcție de mărimea rezistenței hidraulice de la baza castelului de echilibru [2].

S-a notat cu d și D, respectiv diametrul diafragmei și al conductei de legătură.

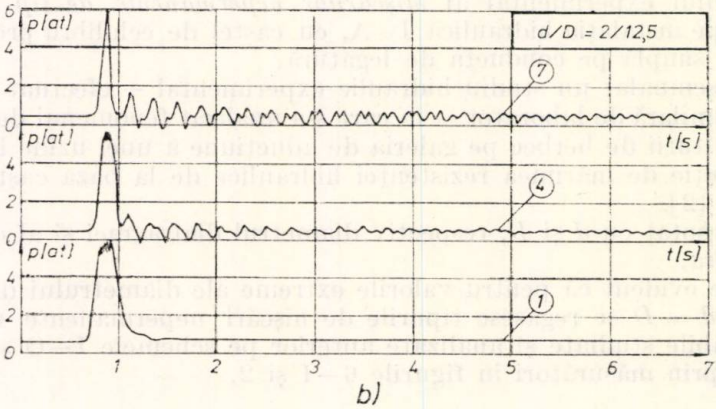
Este evident că pentru valorile extreme ale diametrului diafragmei $d = 0$ și $d = D$ se regăsesc tipurile de nișcări nepermanente rapid sau lent variabile studiate și analizate anterior pe schemele I—O și I—A și ilustrate prin măsurători în figurile 6—I și 2.

Experienţele efectuate pentru studiul *mişcărilor nepermanente de tip* (DT) au acoperit o gamă largă de valori ale rezistenţei hidraulice locale de la baza castelului de echilibru, folosind diagrame de diametru $d = 1, 2, 3, \ldots, 8$ cm. Astfel, s-au realizat rezistenţe hidraulice locale cu coeficienţi de pierdere de sarcină $\zeta = 8 \div 1\,800$. La manevra de închidere bruscă de vană pe schema hidraulică I—A oscilaţia nivelului apei din castel poate să fie, funcţie de mărimea rezistenţei hidraulice de la baza castelului, de următoarele tipuri : oscilaţie armonică amortizată, oscilaţie aperiodică şi oscilaţie puternic frinată.

În aceste condiţii, variaţia presiunii apei din conductă poate să fie puternic influenţată de mărimea rezistenţei hidraulice locale de la baza castelului.



a)



b)

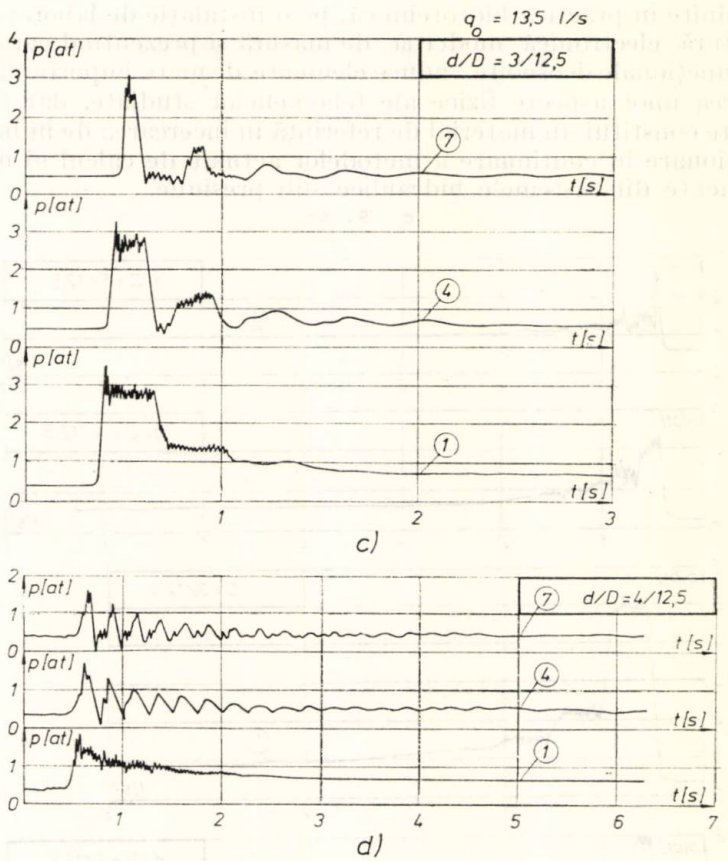


Fig. 9. — Schema I—A, cu castelul de echilibru prevăzut cu diafragmă: măsurători de presiune în trei puncte de pe traseul conductei, pentru debitul de regim $q_0 = 13{,}5$ l/s și diverse rezistențe hidraulice la baza castelului (închidere bruscă de vană).

Prin compunerea acestor două tipuri de mișcări enunțate mai sus, se pot obține mișcările nepermanente din domeniul de trecere între mișcările rapide și lent variabile (DT).

Rezultatele măsurătorilor de laborator, prezentate în figurile 9 și 10, scot în evidență în primul rînd aspectele calitative deosebit de interesante ale mișcărilor nepermanente de tip (DT), care, după părerea noastră, necesită în continuare studii teoretice și experimentale aprofundate. Măsurătorile efectuate cu diafragme de diametre $d = 6$, 7 și 8 cm nu au diferit calitativ de rezultatele experimentale obținute în cazul diafragmei $d = 5$ cm.

Și aici se remarcă pe unele diafragme apariția unui mic vîrf de presiune, imediat după închiderea vanei, provocat de intrarea în funcțiune a castelului cu o anumită întîrziere datorată conductei de legătură de lungime $l = 2$ m.

În concluzie, studiul hidraulic experimental efectuat asupra principalelor tipuri de mișcări nepermanente din sistemele hidraulice sub pre-

siune întîlnite în practica hidrotehnică, pe o instalație de laborator dotată cu aparatură electronică modernă de măsură și prezentînd caracteristici tehnico-funcționale deosebite, aduce elemente de mare importanță pentru cunoașterea unor aspecte fizice ale fenomenelor studiate, dar în același timp poate constitui un material de referință în încercarea de îmbunătățire și perfecționare în continuare a metodelor actuale de calcul al mișcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune.

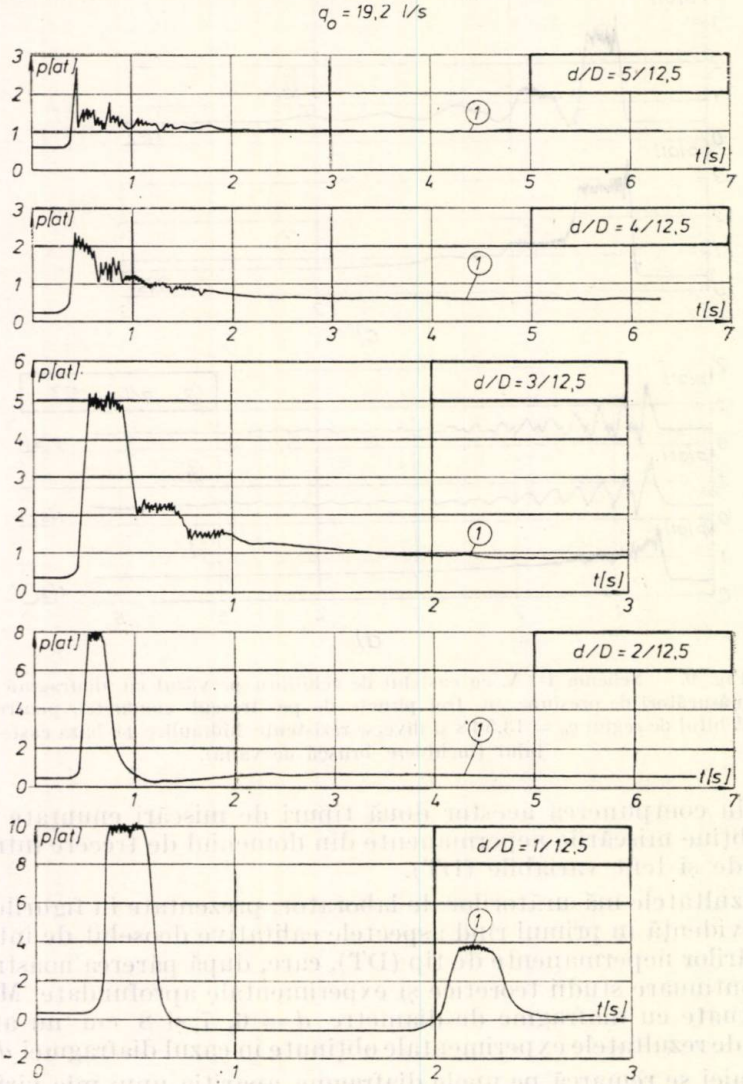


Fig. 10. — Schema I—A, cu castel de echilibru prevăzut cu diafragmă : măsurători de presiune în secțiunea 1 de pe conductă pentru debitul de regim $q_0 = 19{,}2$ l/s și diverse rezistențe hidraulice la baza castelului (închidere bruscă de vană).

Primită la redacție la 14 decembrie, 1981

BIBLIOGRAFIE

1. S. HÂNCU, M. POPESCU, I. JELEV, GH. CONSTANTINESCU, *Unele aspecte privind calculul loviturii de berbec din instalațiile de pompare*, Hidrotehnica, *2*(1978).
2. E. MOSONYI, H. SETH, *The surge tank — a device for controlling water hammer*, Water Power, *2—3* (1975).
3. M. POPESCU, *Rezultate experimentale în studiul mișcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune* (partea I), St. cerc. mec. apl., *4* (1982).
4. M. POPESCU, Gh. CONSTANTINESCU, P. VLASE, I. JELEV, *Modul de rezistență hidraulică și baterie din elemente fixe modulare*, Invenție R. S. R., Brevet OSIM nr. 71286 (1979).
5. M. POPESCU, I. FLORESCU, GH. CONSTANTINESCU, *Aplicarea unei invenții românești la stațiile de pompare de pe derivația Prut-Bîrlad*, Hidrotehnica, *10*(1981).

CERCETĂRI PRIVIND PRELUCRABILITATEA PRIN AȘCHIERE LA STRUNJIREA ALIAJELOR DE ALUMINIU DEFORMABILE

de N. ATANASIU. C.I. IONESCU
n stitutul politehnic București

Z. ATANASIU
Academia de studii economice, București

Studiile și cercetările efectuate la strunjirea de finisare asupra aliajelor de aluminiu din grupele Al-Mg, Al-Cu-Mg, și Al-Zn-Mg-Cu au permis stabilirea, după criteriul calității suprafeței, regimuri optime de prelucrare și parametrii geometrici ai sculelor.
De asemenea, s-a determinat rugozitatea suprafețelor prelucrate în funcție de natura și tipul cuțitului de strung, precum și de mediul de răcire-ungere.
Tipurile de așchii obținute în funcție de unghiurile de atac și de raza la vîrf au constituit un alt criteriu pentru aprecierea calității suprafeței prelucrate.

1. INTRODUCERE

Prelucrabilitatea prin așchiere a metalelor și aliajelor metalice este o noțiune complexă, fiind corelată atît cu factorii interni ai materialului, cît și cu factorii externi ai prelucrării, factori care se intercondiționează în procesul așchierii.

Factorii interni ai materialului care influențează prelucrabilitatea prin așchiere sînt, în principal, compoziția chimică și microstructura, aceștia determinînd întregul complex de caracteristici mecanice și termofizice ale materialului. Dintre factorii externi menționăm : tipul și caracterul operației de prelucrare, regimul de așchiere aplicat precum și natura și geometria sculei așchietoare.

Pentru aprecierea prelucrabilității prin așchiere se folosesc diferite criterii cum sînt : mărimea forțelor de așchiere, calitatea suprafeței prelucrate, forma așchiilor și modul lor de detașare, intensitatea uzurii sculei așchietoare.

Aliajele de aluminiu se caracterizează, în general, printr-o ușoară prelucrabilitate prin așchiere, din care cauză calitatea suprafeței prelucrate și forma așchiilor pot constitui criteriile esențiale în aprecierea prelucrabilității lor prin așchiere.

În literatura de specialitate se găsesc numeroase lucrări cu privire la prelucrabilitatea aliajelor de aluminiu, cu precădere a aliajelor turnate. Există însă foarte puține date, dispersate, cu privire la aliajele de aluminiu deformabile cu rezistență mecanică ridicată.

În lucrarea de față se prezintă rezultatele cercetărilor asupra prelucrabilității prin strunjirea de finisare după criteriile calității suprafeței prelucrate (rugozitatea) și formei așchiilor, în cazul aliajelor de aluminiu deformabile din grupele : Al-Mg, Al-Cu-Mg și Al-zn-Mg-Cu.

2. METODE DE CALCUL PENTRU STABILIREA PRELUCRABILITĂȚII PRIN AȘCHIERE

În procesul de așchiere, problema de bază din punct de vedere industrial constă în optimizarea condițiilor de lucru pentru obținerea randamentului maxim al ansamblului mașină-sculă-piesă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 5, 1982, P. 610–625

Datorită complexității mari a procesului de așchiere, în prezent nu există o metodă matematică generală pentru descrierea prelucrabilității prin așchiere. De aceea, se procedează la modelarea matematică a diferiților parametri ai procesului de așchiere.

În acest scop, autorii lucrării au stabilit modele matematice pentru analiza rugozității suprafețelor prelucrate prin strunjirea de finisare în funcție de avans și de raza cuțitului.

Pentru situațiile practice, cînd profilul teoretic al suprafeței prelucrate este format din ambele tăișuri și rezultă ca o urmă a tăișului cu raza r, rugozitatea se poate stabili cu relația

$$R_c = r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \tag{1}$$

sau

$$R_c = \frac{s^2}{8r} \tag{2}$$

în următoarele condiții : $\chi > \text{arc sin}\,\frac{s}{2r}$ și $\chi_1 > \text{arc sin}\,\frac{s}{2r}$, unde r este raza de vîrf a cuțitului, în mm ; s — avansul, în mm/rot ; χ — unghiul de atac principal, în grade sexagesimale ; χ_1 — unghiul de atac secundar, în grade sexagesimale.

Datele experimentale obținute la strunjirea aliajelor de aluminiu deformabile evidențiază faptul că curbele de variație $R_a = R_a(s)$ prezintă abateri de la curba teoretică descrisă de relația (1) sau (2). De aceea, pentru a stabili modelul matematic care să descrie cît mai fidel dependența rugozității în funcție de avans, în condițiile reale de prelucrare a aliajelor de aluminiu deformabile, s-au determinat coeficienții care țin seama de natura materialului și condițiile de așchiere.

În acest scop s-a stabilit o relație de formă :

$$R_a(s) = Ks_1 \frac{s^2}{r} + \frac{Ks_2}{s}, \ [\mu\text{m}], \tag{3}$$

în care Ks_1 și Ks_2 sînt coeficienți adimensionali specifici fiecărui aliaj în parte.

Dependența rugozității în funcție de avans obținută din calcule cu relația (3) s-a reprezentat în figura 1, iar pentru comparație imediată s-a trasat curba descrisă cu (2).

Modelarea matematică a modului de variație a rugozității în funcție de raza la vîrf a cuțitului s-a realizat prin adoptarea relației (2) cu ajutorul unor coeficienți care depind de natura materialului, care, în acest caz, devine :

$$R_a(r) = Kr_1 \frac{s^2}{r} + Kr_2, \ [\mu\text{m}], \tag{4}$$

în care Kr_1 și Kr_2 sînt coeficienți adimensionali avînd valori :
AlMg5 — $Kr_1 = 125$; $Kr_2 = 0{,}45$; AlCu4Mg1 — $Kr_1 = 125$, $Kr_2 = 0{,}40$; AlZn5Mg2Cu2 — $Kr_1 = 68{,}75$ și $Kr_2 = 0{,}55$.

Variația rugozității în funcție de raza la vîrf a cuțitului, determinată cu relația (4), s-a reprezentat în figura 2.

Derivînd relația (4) în raport cu r, rezultă

$$R'_a(r) = -\frac{Kr_1 s^2}{r^2} + Kr_2 \qquad (5)$$

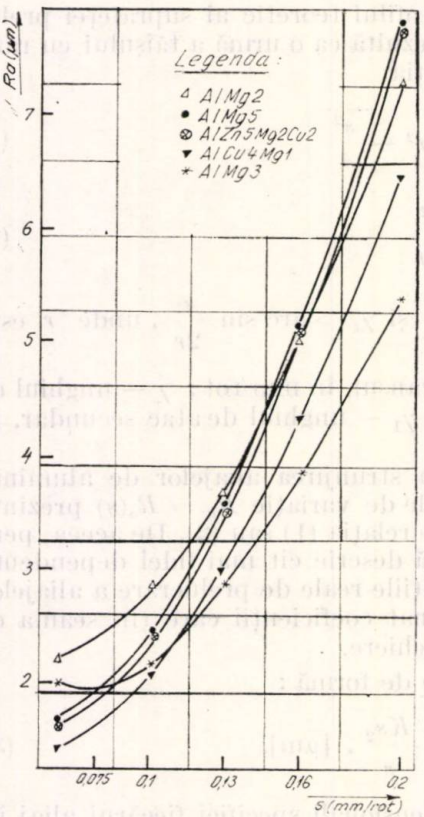
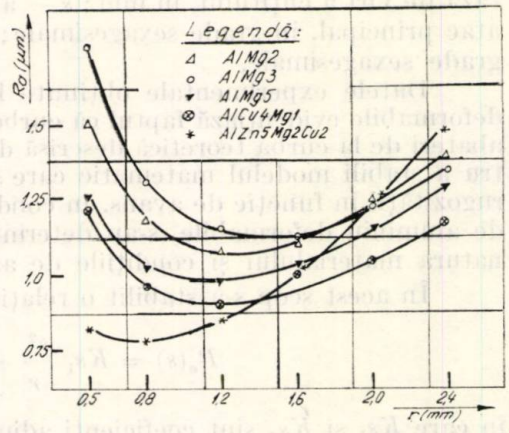


Fig. 1. — Dependența rugozității în funcție de avans determinată din calcule cu relația (3).

Fig. 2. — Variația rugozității în funcție de raza la vîrf a cuțitului obținută din calcule cu relația (4)



și punînd condiția $R'_a(r) = 0$, se obțin valorile optime ale razei la vîrf a cuțitului, care corespund cu rugozitatea minimă a suprafeței prelucrate:

$$r_{opt} = s\sqrt{\frac{Kr_1}{Kr_2}}. \qquad (6)$$

Calculele efectuate cu relația (6) au condus la următoarele valori ale razei r_{opt}: AlMg5 — 1,10 mm; AlCu4Mg1 — 1,15 mm și AlZn5 Mg2Cu2 — 0,72 mm.

3. MATERIALE ȘI TEHNICA EXPERIMENTALĂ

3.1. MATERIALE

În experimentările efectuate s-au folosit aliaje de aluminiu elaborate în condiții industriale la Intreprinderea de prelucrare a aluminiului din

Slatina, deformate plastic prin extrudare în bare cu diametrul de 50 mm și recoapte, din următoarele tipuri: AlMg2, AlMg3, AlMg5, AlCu4Mg1 și AlZn5Mg2Cu2.

În tabelul 1 se prezintă compoziția chimică a acestor aliaje determinată spectral cu un aparat Quantolet GQM-75, iar în tabelul 2, parametrii

Tabelul 1

Compoziția chimică a aliajelor de aluminiu studiate

Denumirea aliajului	Conținutul elementelor în %									
	Cu	Mn	Mg	Si	Fe	Cr	Zn	Ti	Zr	Al
AlMg2	0,03	0,34	2,28	0,14	0,28	0,01	0,02	0,05	--	rest
AlMg3	0,08	0,15	3,14	0,21	0,16	0,20	0,18	0,17	—	rest
AlMg5	0,10	0,15	5,10	0,30	0,38	0,15	0,10	—	—	rest
AlCu4Mg1	4,66	0,74	1,48	0,21	0,28	—	0,09	0,08	0,08	rest
AlZn5Mg2Cu2	1,46	0,28	2,21	0,17	0,32	0,20	5,56	0,22	0,07	rest

tratamentului termic aplicat înaintea prelucrării prin așchiere. În tabelul 3 se prezintă caracteristicile mecanice ale aliajelor studiate, determinate la încercarea de tracțiune cu o viteză de 30 mm/min pe o mașină universală tip ZWICK-7045. Valorile înscrise în tabelul 3 constituie o medie a trei încercări.

Tabelul 2

Parametrii tratamentului termic de recoacere

Nr. crt.	Denumirea aliajului	Temperatura de încălzire, °C	Durata de menținere, h	Condiții de răcire
1	AlMg2	415	2	răcire în aer de la 350 °C
2	AlMg3	415	2	răcire în aer de la 350 °C
3	AlMg5	415	2	răcire în aer de la 350 °C
4	AlCu4Mg1	390	2	răcire în cuptor pînă la 280 °C apoi în aer liber
5	AlZn5Mg2Cu2	450	2	răcire în cuptor pînă la 300 °C apoi în aer liber

Pentru a cunoaște comportarea la prelucrare a aliajelor analizate, fracturile rezultate după încercarea de tracțiune a epruvetelor s-au studiat la microscopul electronic cu baleiaj (SEM) tip JSM 50A. În vederea redării cît mai clare a topografiei fracturilor s-a lucrat cu electronii secundari accelerați la o tensiune de 25kV.

Structura aliajelor rezultată după tratamentul termic de recoacere s-a analizat cu ajutorul unui microscop optic Reichert.

Microstructurile obținute pe aliajele din grupa Al-Mg evidențiază prezența particulelor insolubile de Mg_2Si, de culoare neagră, care au pre-

Tabelul 3

Caracteristicile mecanice ale barelor extrudate și recoapte

Nr. crt.	Denumirea aliajului	Rezistența la rupere, N/m²	Limita de curgere, N/m²	Alungirea %
1	AlMg2	189,6	95,76	21,95
2	AlMg3	201,6	—	19,20
3	AlMg5	296,3	—	18,43
4	AlCu4Mg1	205,3	105,4	11,80
5	AlZn5Mg2Cu2	257,4	161,6	9,6

cipitat în timpul extruziunii la cald. În figura 3 s-a reprezentat microstructura aliajului AlMg5 realizată în secțiunea longitudinală, unde se observă granulația alungită în direcția de curgere a materialului și distribuția în șiruri a particulelor insolubile.

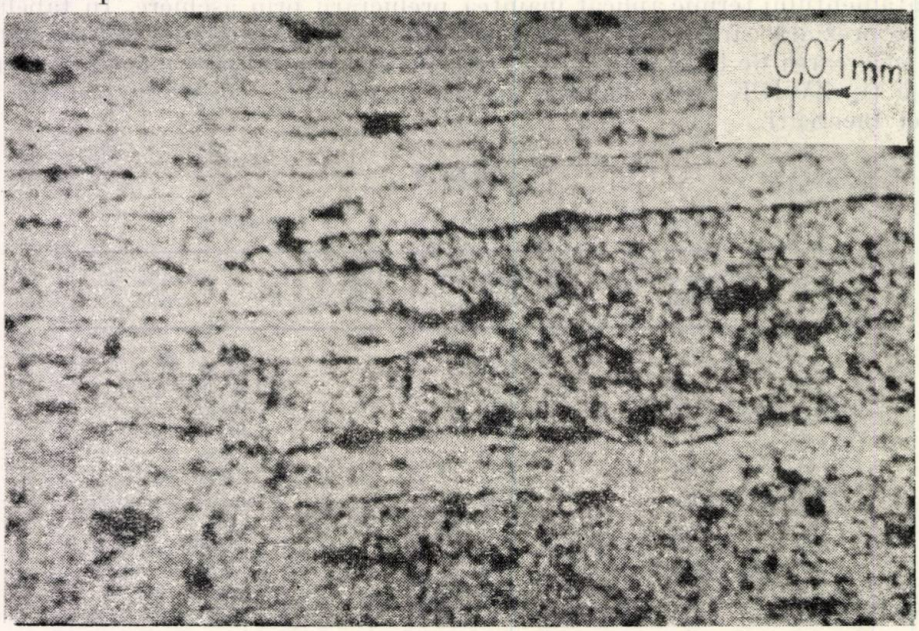


Fig. 3. — Microstructura aliajului AlMg5 în secțiune longitudinală.

Aliajul AlCu4Mg1 prezintă o structură cu fazele solubile constituite din $CuAl_2$ și $CuMgAl_2$, de culoare gri închis și particule negre de (Cu, Mn, Fe) Al_6 [1], [2], [3].

În figura 4 s-a reprezentat microstructura acestui aliaj în secțiunea longitudinală a probei. Imaginea de topografie a suprafeței de rupere s-a reprezentat în figurile 5.*a* și 5.*b*, la mărire x1000 și, respectiv, x3000, în cazul aliajului AlCu4Mg1. Se observă, ca și la celelalte aliaje, o rupere pronunțat ductilă determinată de coalescența microgolurilor formate pe precipitate din matrice [5].

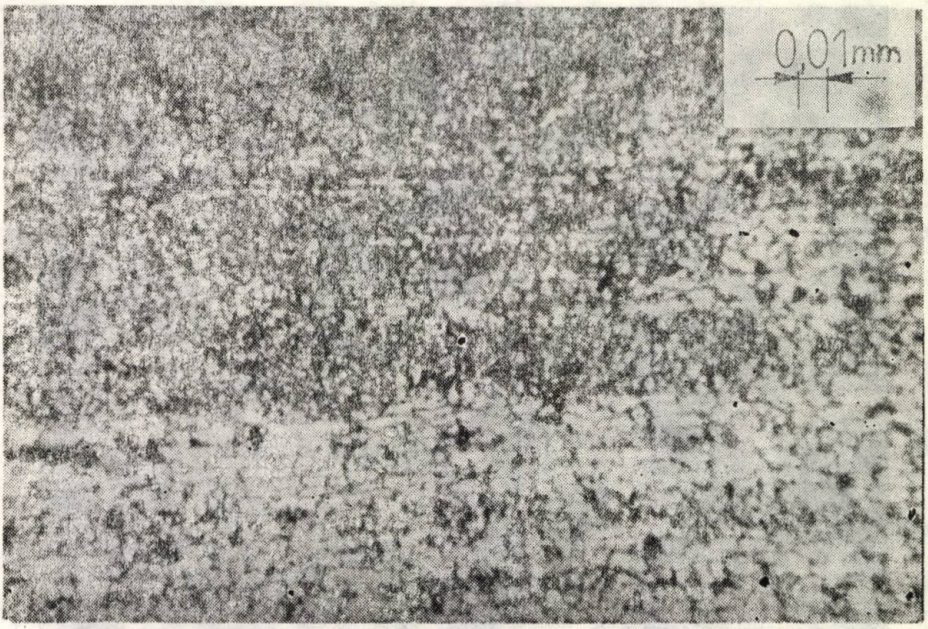


Fig. 4. — Microstructura aliajului AlCu4Mg 1 în secțiune longitudinală.

3.2. ECHIPAMENTUL ȘI APARATURA

Prelucrările prin așchierea tuturor aliajelor studiate s-au executat pe un strung universal folosind cuțite standardizate din oțeluri rapide și cuțite cu plăcuțe din carburi metalice din grupa K1 (carbura de wolfram cu grăunte fin și liant — cobaltul 6%).

Lichidele de răcire-ungere au fost constituite din petrol și din emulsie de ulei sulfonat cu 17% apă. Aducerea lichidului în zona de așchiere s-a realizat cu ajutorul pompei din dotarea strungului.

Măsurarea rugozității (*Ra*) suprafețelor prelucrate, pentru fiecare regim de lucru, s-a efectuat cu un rugozimetru optic tip MNC—11 și cu un rugozimetru cu palpator tip Taylor-Hobson.

4. REZULTATELE EXPERIMENTALE

4.1. PARAMETRII REGIMULUI DE AȘCHIERE

Experimentările efectuate s-au realizat cu regimuri de finisare, utilizîndu-se de aceea domenii restrînse pentru parametrii regimului de așchiere [5].

În cazul avansului s-a luat în considerare domeniul valorilor mici și anume $s = 0{,}065 \div 0{,}2$ mm/rot.

Pentru a pune în evidență dependența rugozității suprafeței strunjite de valorile avansului s-au construit grafice reprezentate în figura 6 pentru diferite valori ale adîncimii de așchiere și pentru aceeași viteză de așchiere în cazul tutoror aliajelor [6]. Astfel, în figura 6 *a* s-a reprezentat

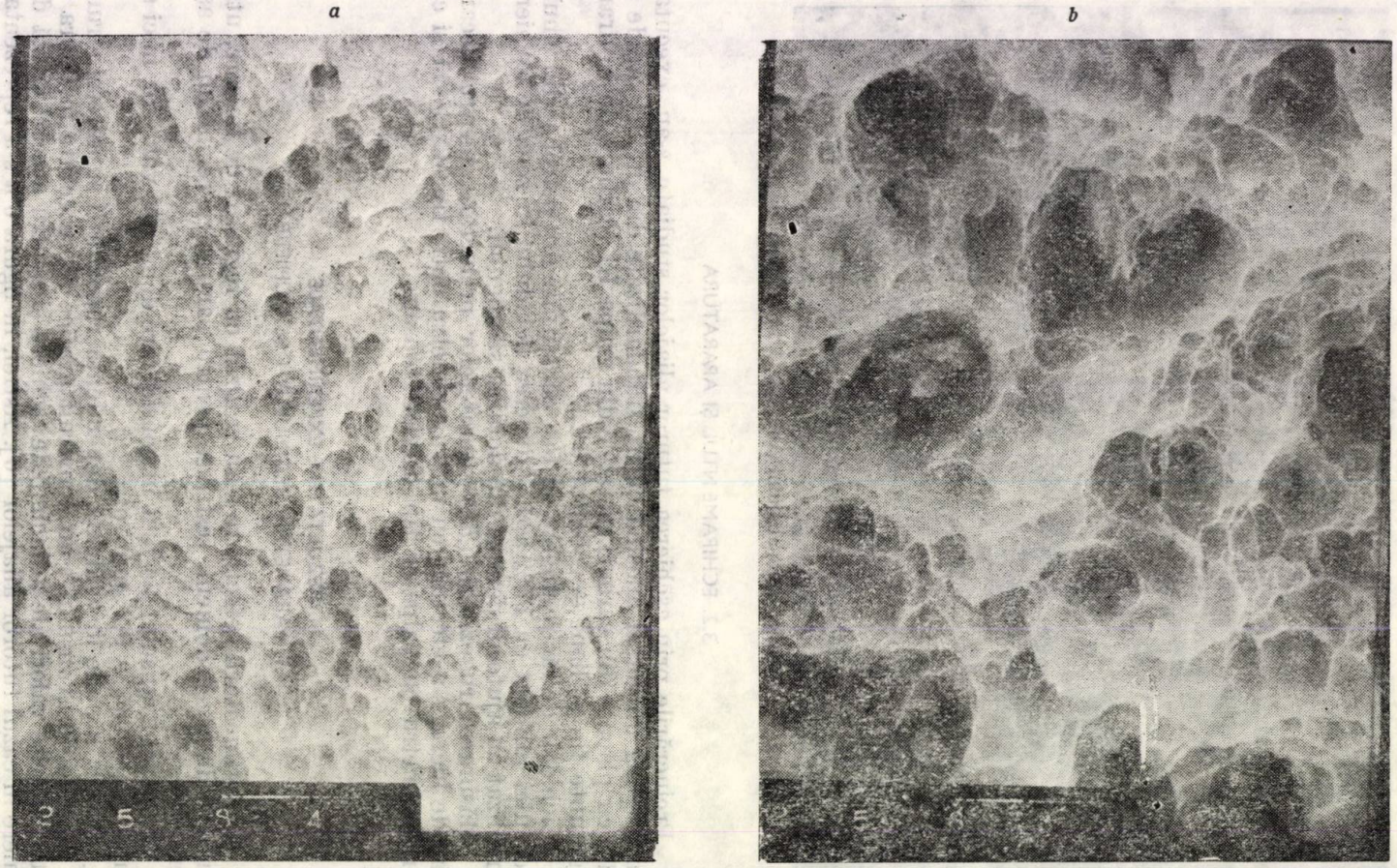


Fig. 5. — Topografia suprafeței de rupere ductilă a aliajului AlCu4Mgl : *a* — × 1000 ; *b* — × 3000.

dependența rugozității de avans pentru aliajul AlMg5 și în figura 6 b pentru AlZn5Mg2Cu2. Se observă că avansul este un parametru care influențează într-o măsură însemnată rugozitatea suprafețelor prelucrate. Pe măsură ce crește avansul, crește și rugozitatea în cazul tuturor aliajelor prelucrate.

Prelucrările s-au făcut cu un cuțit standardizat obișnuit cu plăcuță dură lipită având următoarea geometrie : $\gamma = 10°$; $\alpha = 5°$; $\chi = 45°$ $\chi_1 = 45°$ și $r = 0{,}5$ mm.

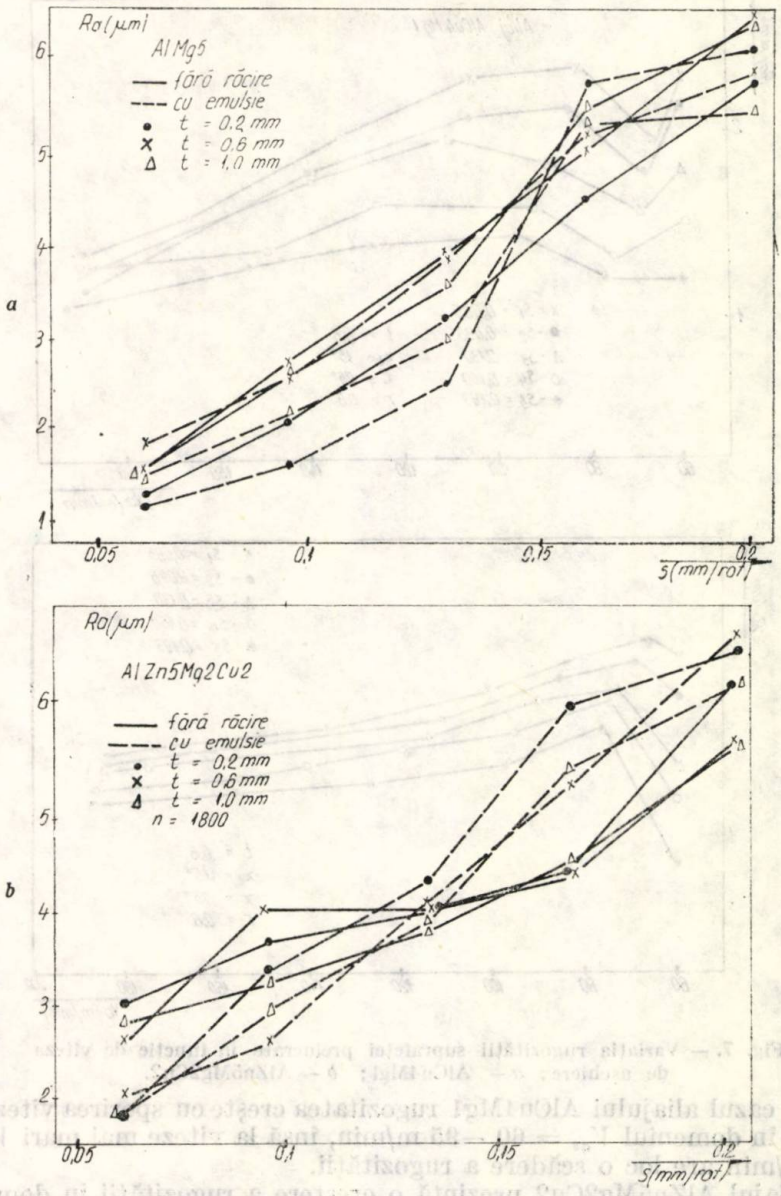


Fig. 6. — Dependența rugozității suprafeței prelucrate de avans : *a* — aliajul AlMg5 ; *b* — aliajul AlZn5Mg2Cu2.

Dependența rugozității suprafeței prelucrate de viteza de așchiere pentru cinci valori ale avansului s-a reprezentat în figura 7*a* pentru aliajul AlCu4Mg1 și în figura 7 *b* pentru AlZn5Mg2Cu2.

Geometria cuțitului folosit: $\gamma = 10°$; $\alpha = 5°$; $\chi = 75°$; $\chi_1 = 15°$ și r = 0,5 mm. Răcirea și ungerea zonei de așchiere s-a realizat cu petrol la toate aliajele studiate.

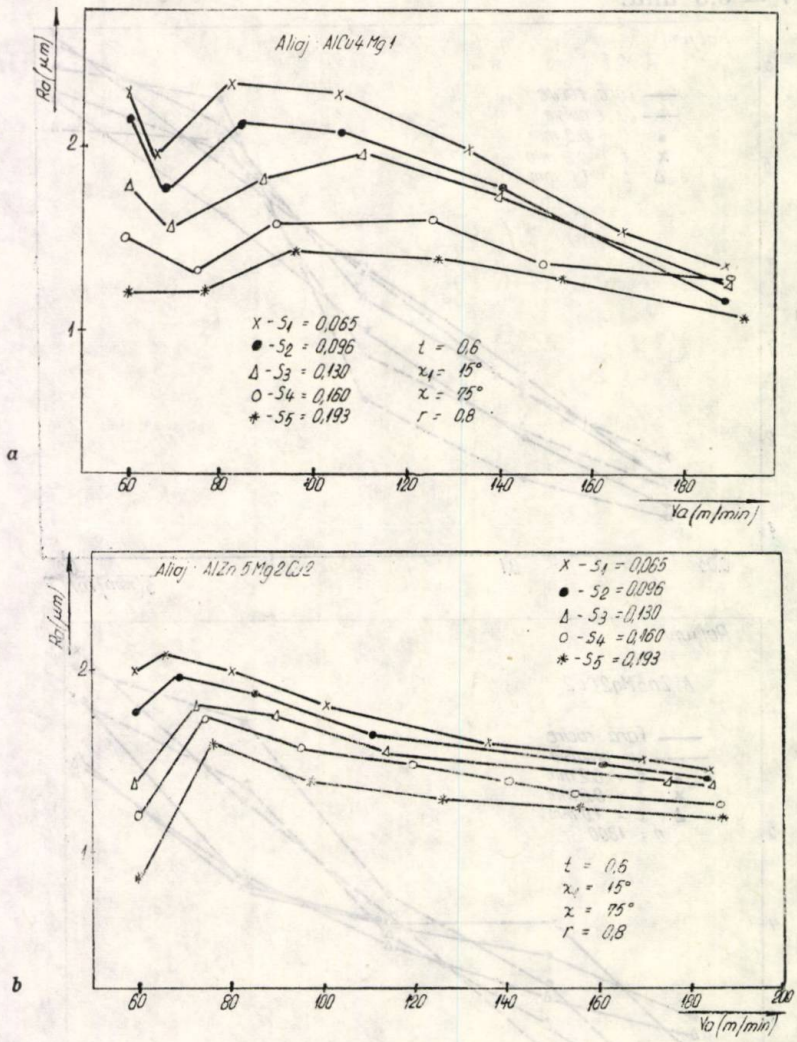


Fig. 7. — Variația rugozității suprafeței prelucrate în funcție de viteza de așchiere; *a* — AlCu4Mgl; *b* — AlZn5Mg2Cu2.

În cazul aliajului AlCu4Mg1 rugozitatea crește cu sporirea vitezei de așchiere în domeniul $V_{as} = 60 - 95$ m/min, însă la viteze mai mari $V_{as} > 95$ m/min are loc o scădere a rugozității.

Aliajul AlZn5Mg2Cu2 prezintă o creștere a rugozității în domeniul $V_{as} = 60 - 75$ m/min, iar la viteza $V_{as} > 75$ m/min o scădere treptată.

Prin urmare, calitatea suprafeței prelucrate este influențată într-o măsură însemnată de viteza de așchiere, vitezele mari de așchiere constituind un factor pozitiv asupra rugozității.

4.2. PARAMETRII GEOMETRICI AI CUȚITELOR DE STRUNG

În experimentările efectuate s-au utilizat cuțite de strung din oțel rapid cu și fără canal de așchiere și cuțite cu plăcuțe din carburi metalice K1 avînd următorii parametri:

— unghiul de degajare: $\gamma = 10°$;

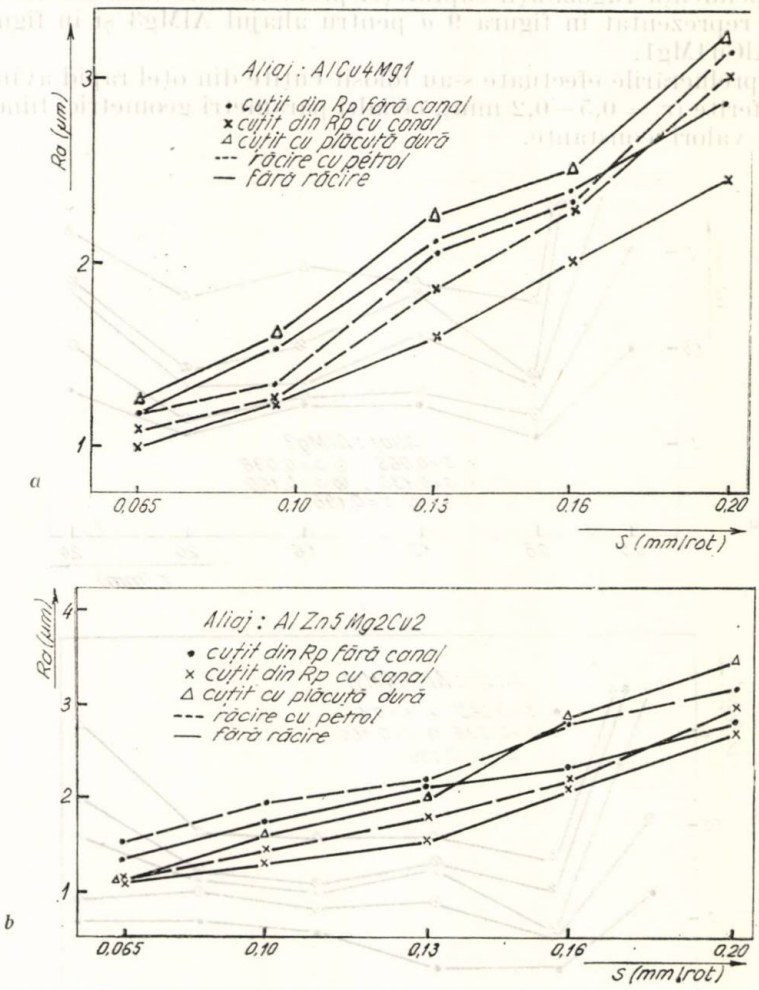


Fig. 8. — Dependența rugozității suprafeței prelucrate de avans pentru diferite tipuri de cuțite de strung: *a* — aliajul AlCu4Mg1; *b* — aliajul AlZn5Mg2Cu2.

— unghiul de așezare: $\alpha = 8 - 15°$, pentru cuțite din oțel rapid și $\alpha = 6 - 8°$ pentru cuțite armate cu plăcuțe din carburi metalice:

— unghiul de atac principal: $\chi = 75 - 85°$;

— unghiul de atac secundar : $\chi_1 = 5-15°$;
— raza de vîrf : $r = 0{,}25-0{,}8$ mm.

Pentru a evidenția dependența rugozității (*Ra*) de avans (*s*) la strunjire cu cuțite din oțel rapid cu și fără canal de așchie și cu cuțite cu plăcuțe din carburi metalice, fără și cu lichide de răcire-ungere s-au construit graficele din figura 8 și anume : în figura 8 *a* pentru aliajul AlCu4Mg1 și în figura 8 b — AlZn5Mg2Cu2. Se observă că pentru aceste aliaje, se obțin valori minime ale rugozității la toate treptele de avans folosite în cazul cuțitelor de strung din oțel rapid cu canal de așchie.

Dependența rugozității suprafeței prelucrate de raza la vîrf a cuțitului s-a reprezentat în figura 9 *a* pentru aliajul AlMg3 și în figura 9 *b* pentru AlCu4Mg1.

La prelucrările efectuate s-au folosit cuțite din oțel rapid avînd raze la vîrf diferite ($r = 0{,}5-0{,}2$ mm), ceilalți parametri geometrici fiind menținuți la valori constante.

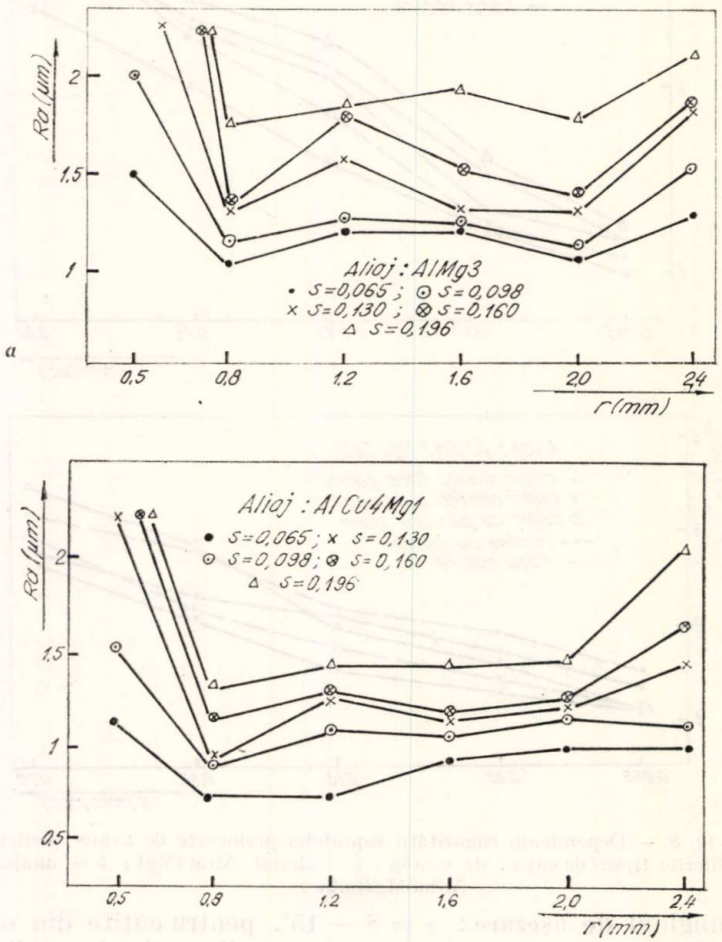


Fig. 9. — Variația rugozității suprafeței prelucrate în funcție de raza la vîrf a cuțitului : *a* — aliajul AlMg5 ; *b* — aliajul AlCu4Mg1.

Analiza graficelor din figura 9 permite să se observe că variația rugozității în funcție de raza la vîrf a cuțitului prezintă puncte de minim, care indică valorile optime ale razei la vîrf.

Pentru toate aliajele prelucrate s-a obținut rugozitatea minimă a suprafeței în cazul razei la vîrf $r = 0{,}8$ mm la majoritatea treptelor de avans folosite.

Pentru determinarea rugozității suprafețelor prelucrate în funcție de unghiurile de atac (principal și secundar) s-au folosit cuțite de strung avînd unghiurile χ_1 și χ diferite ($\chi + \chi_1 = 90°$), pentru cinci valori ale avansului în intervalul $s = 0{,}065 - 0{,}2$ mm/rot. Ceilalți parametrii geometrici s-au menținut constanți și aume: $r = 0{,}8$ mm, $\gamma = 10°$, $\alpha = 5$, $\varepsilon = 90$, iar așchierea s-a realizat fără lichide de răcire-ungere.

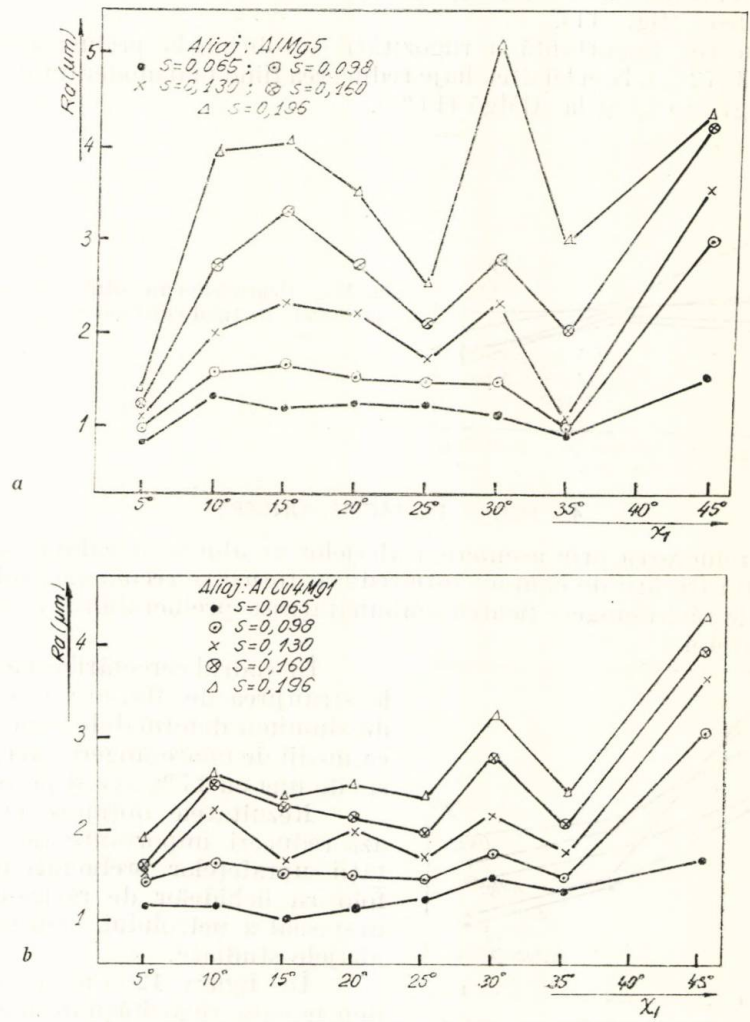


Fig. 10. — **Dependența rugozității suprafeței prelucrate de unghiurile de atac**; *a* — aliajul AlMg5; *b* — AlCu4Mg1.

Dependența rugozității de unghiurile de atac s-a reprezentat în figura 10 *a* pentru aliajul AlMg5 și în figura 10 *b* pentru AlCu4Mg1. Se observă că valorile mici ale rugozității suprafețelor prelucrate, în special pentru valorile mici ale avansului, se obțin în cazul unghiurilor mici de atac secundar ($\chi_1 = 15°$ în cazul aliajului AlCu4Mgl și $\chi_1 = 5°$ pentru aliajele AlMg5). Pentru valori mai mari ale avansului (prelucrări de degroșare) punctele de minim ale diagramelor sînt diferite, de exemplu la aliajul AlCu4Mg1 $\chi_1 = 5°$.

Pentru stabilirea tipului sculei, în experimentările efectuate s-au folosit cuțite din oțel rapid cu și fără canal de așchie și cuțite cu plăcuțe din carburi metalice aplicate prin lipire.

Se observă în general o reducere a rugozității în cazul utilizării cuțitelor din oțel rapid cu canal de așchie, față de cuțitele cu plăcuțe din carburi metalice (fig. 11).

Reducerea importantă a rugozității se obține la prelucrarea aliajului AlMg3 (72%), la celelalte aliaje reducerea fiind mai moderată și anume la AlCu4Mg1 (45%) și la AlMg5 (14%).

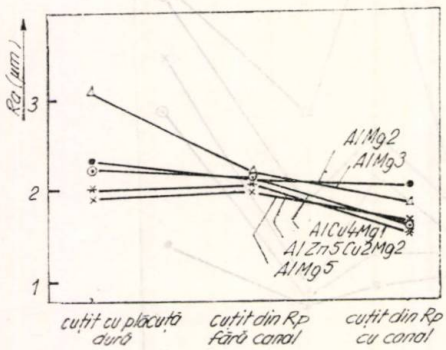


Fig. 11. — Dependența rugozității suprafeței prelucrate de tipul cuțitului de strung.

4.3. MEDIUL DE RĂCIRE—UNGERE

La prelucrarea prin așchiere a aliajelor de aluminiu, căldura dezvoltată datorită frecării de contact este redusă, totuși se recomandă folosirea lichidelor de răcire-ungere pentru îmbunătățirea prelucrabilității și calității suprafeței.

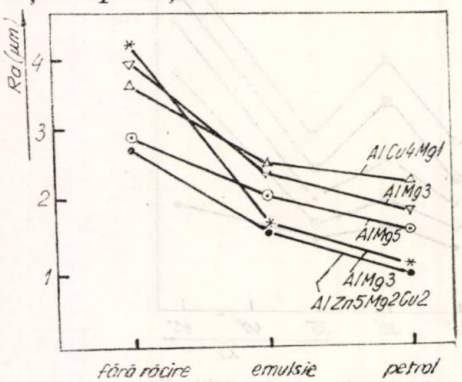


Fig. 12. — Dependența rugozității suprafeței prelucrate de mediul de răcire-ungare.

În cadrul cercetărilor efectuate la strunjirea de finisare a aliajelor de aluminiu deformabile s-au folosit ca medii de răcire-ungere : aer, emulsie de ulei cu 17% apă și petrol.

Rezultatele obținute evidențiază reduceri importante ale rugozității suprafețelor prelucrate în cazul folosirii lichidelor de răcire-ungere, în special a petrolului, pentru toate aliajele studiate.

În figura 12 s-a reprezentat dependența rugozității de mediul de răcire-ungere. Se observă că cea mai importantă reducere a rugozității

suprafeței strunjite se obține în cazul folosirii petrolului. În comparație cu suprafețele prelucrate fără lichide de răcire-ungere, în cazul folosirii petrolului la aliajul AlMg3 rezultă o reducere a rugozității de 400%, la AlZn5Mg2Cu2 — 270%, la AlMg2 de 216%, AlMg5 — 186% și la AlCu4Mg1 — 156%.

În cadrul experimentărilor efectuate s-au utilizat cuțite de strung din oțel rapid, avansul $s = 0{,}16$ mm/rot și adîncimea de așchiere $t = 0{,}6$ mm.

4.4. FORMA AȘCHIILOR

Forma așchiilor constituie un criteriu esențial în determinarea prelucrabilității aliajelor de aluminiu, cunoscut fiind faptul că rugozitatea suprafețelor prelucrate crește cu mărirea lungimii așchiilor. Pentru a determina prelucrabilitatea aliajelor de aluminiu studiate s-a utilizat următoarea simbolizare a grupelor de așchii [7], [8]:

A — așchii foarte scurte, mărunte, finisare excelentă;

B — așchii ondulate, formate din cîteva spire, finisare foarte bună;

C — așchii continui, lungi, neelicoidale, finisare bună;

D — așchii continui, lungi, formînd spirale, finisare satisfăcătoare;

E — așchii neuniforme, lungi, cu zimți, este necesară o geometrie adecvată a sculei și un anumit regim de prelucrare care să permită o așchiere satisfăcătoare.

Tipurile de așchii rezultate în funcție de unghiul de atac ($\chi_1 = 5° - 45°$ și $\chi + \chi_1 = 90°$) în cazul aliajului AlMg3, sînt de tip *B* și *C* pentru $s = 0{,}065 - 0{,}09$ mm/rot la $\chi_1 = 25 - 35°$, iar pentru avansuri mai mari ($s = 0{,}16 - 0{,}196$ mm/rot) aceleași tipuri de așchii rezultă la folosirea cuțitelor cu unghiuri de atac secundar $\chi_1 = 5 - 15°$.

La prelucrarea aliajului AlZn5Mg2Cu2 rezultă cu precădere așchii de tip *B* și *C*, iar la avansuri mici ($s = 0{,}065$ mm/rot) predomină așchiile de tip A pentru $\chi_1 = 5 - 25°$.

5. INTERPRETAREA REZULTATELOR

Din studiul și experimentările efectuate se desprinde faptul că parametrii regimului de prelucrare: avansul și viteza de așchiere au o influență însemnată asupra calității suprafeței prelucrate la strunjirea de finisare a aliajelor de aluminiu deformabile. De asemenea, datele experimentale permit să se constate că parametrii geometrici ai cuțitului de strung care influențează rugozitatea suprafeței prelucrate sînt: raza la vîrf și unghiul de atac secundar.

Pe baza rezultatelor experimentale s-au stabilit, după criteriul calității suprafeței, regimuri optime de prelucrare și parametrii geometrici ai cuțitelor pentru strunjirea de finisare a aliajelor de aluminiu deformabile (tabelul 4).

Tabelul 4

Regimuri optime de prelucrare prin așchiere și parametrii geometrici ai cuțitelor pentru strunjire

Aliajul	Regimul de prelucrare				Parametri sculei					Lichid de răcire
	Viteza de așchiere	Avans	Adîncimea de așchiere	Tip	χ_1	χ	γ	α	r	
	V_{as} m/min	s mm/rot	t mm							
AlCu4Mgt	60	0,065	0.6	oțel	15°	75°			1,15	
AlZn5Mg2Cu2	90	0,07	1,0	rapid	5°	85°	19°	5°	0,72	
AlMg5	70	0,130	1,0	cu	5°	85°			1,10	petrol
AlMg3	85	0,090	0,6	canal	5°	85°			0,80	
AlMg2	90	0,065	0,6		14°	75°			0,80	

CONCLUZII

Datele experimentale numeroase obținute la strunjirea de finisare a aliajelor de aluminiu din grupele Al-Mg, Al-Cu-Mg și Al-Zn-Mg-Cu permit următoarele concluzii :

1. Rugozitatea suprafețelor prelucrate este influențată într-o măsură însemnată de avans și anume crește cu sporirea avansului în cazul tuturor aliajelor studiate.

2. Viteza de așchiere constituie un factor pozitiv în reducerea rugozității, în deosebi la viteze mari de așchiere.

3. Parametrii geometrici ai cuțitului care au o influență mai importantă asupra calității suprafeței prelucrate sînt : raza la vîrf și unghiul de atac secundar. O influență însemnată o are și materialul sculei de așchiere.

4. Lichidele de răcire-ungere determină reducerea rugozității, în deosebi la folosirea petrolului. În comparație cu prelucrarea efectuată fără lichide de răcire-ungere, utilizarea petrolului determină reduceri ale rugozității astfel : aliajul AlMg3 (400%), AlZn5Mg2Cu2 (270%), AlMg2 (216%), AlMg5 (186%) și AlCu4Mg1 (156%).

5. Forma așchiilor rezultate la strunjire arată că suprafețele prelucrate, în cazul aliajelor de aluminiu studiate, corespund unor rugozități foarte bune și bune.

6. Rugozitatea, determinată din calcule în funcție de avans (fig. 1) și de raza la vîrf a cuțitului (fig. 2) prezintă o bună concordanță cu rugozitatea stabilită experimental (fig. 4, și respectiv 8) fapt ce denotă că soluțiile de calcul adoptate corespund condițiilor reale de desfășurare a procesului de așchiere a aliajelor de aluminiu studiate.

Primită la redacție la 16 iunie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. D. ALTEMPOHL, *Aluminium und Aluminium Legierungen*, Springer Verlag, Berlin, 1965.
2. N. ATANASIU, *Considerații cu privire la calitatea produselor din aliaje de aluminiu deformabile*, Metalurgia, *10* (1979), p. 543—547.
3. N. ATANASIU, *Criterii de apreciere a calității produselor din aliaje de aluminiu deformabile*, Metalurgia, nr. *5*, p. 190—196 (1980).

4. N. ATANASIU și alții, *Cercetări microfractografice privind mecanismul ruperii ductile la aliajele de aluminiu deformate plastic*, Metalurgia, 7, p. (1977), 346—355.
5. * * * *Aluminium*, vol. 3, Fabrication and Finishing, American Society for Metals, Metals Park, Ohio (1965).
6. * * * Contract de cercetare științifică *„Cercetări privind stabilirea regimurilor de prelucrare prin așchierea aliajelor de aluminiu deformabile"* (1980) între Institutul Politehnic București și Întreprinderea de Prelucrare a aluminiului din Slatina.
7. * * * *Metals Handbook*, vol. 3, American Society for Metals (1969).
8. P. JOHNE, *Spanen von Aluminiumwerkstoffen*, Aluminium, *6*, p. 413—417 (1980) și *7* (1980), p. 473—475.

OAMENII DE ȘTIINȚĂ ȘI PACEA

Evenimentele politice din ultima vreme pun în evidență faptul că ne aflăm într-o epocă deosebit de complexă a vieții internaționale, caracterizată, între altele, prin accentuarea crizei economice mondiale, prin cursa înarmărilor, prin existența unor conflicte și confruntări militare, prin împărțirea lumii în țări bogate și țări sărace, dar și printr-o uriașă manifestare a maselor largi populare din Europa și din întreaga lume, pentru pace.

În această situație, un rol foarte important îl are formarea unei opinii publice corespunzătoare. Se disting în acest sens două tendințe diametral opuse : pe de o parte tendința de a considera un al treilea război mondial ca o fatalitate și de a pregăti opinia publică în consecință, pe de altă parte tendința pe care am putea-o numi umanistă de a pregăti opinia publică în așa fel încît să se opună hotărît izbucnirii unui al treilea război mondial, precum și tuturor elementelor infrastructurale ale unui asemenea război, în speță cursei înarmărilor.

Politica statului nostru este, evident, în prim-planul opțiunii umaniste. Așa cum arăta recent președintele Nicolae Ceaușescu : „Popoarele, forțele progresiste și antiimperialiste de pretutindeni pot opri încordarea în viața internațională, cursa înarmărilor, pot asigura triumful rațiunii, al păcii... Este necesar să se spună popoarelor adevărul... să se treacă hotărît la dezarmare, în primul rînd la dezarmarea nucleară. Pînă nu au căzut primele bombe nucleare ! Cînd vor începe să cadă bombe va fi prea tîrziu !". Este, fără îndoială, o politică înțeleaptă, de profundă omenie, care pune pe primul plan interesele generale ale lumii, respingînd hotărît opinia unei minorități care, orbită de setea de a domina, nu poate să vadă că, dincolo de interesele ei meschine, se află sfîrșitul apocaliptic al întregii omeniri.

Apreciind în mod deosebit amplele manifestări și mișcări pentru pace din Europa și din întreaga lume, trebuie în același timp să fim conștienți de faptul că succesul lor nu poate fi asigurat de la sine. O sumară analiză pune în evidență faptul că aceste mișcări cuprind în zilele noastre colectivități cu diferite opinii politice, convingeri filozofice și religioase, pe care le reunesc cîteva idei generale cum sînt : pacea, securitatea, dezarmarea etc... Dar pacea nu înseamnă numai absența războiului, ci și o colaborare pe baze echitabile între state și popoare. La rîndul ei noțiunea de dezarmare este legată de aceea a unui plafon rațional pentru armele clasice (dacă, de exemplu, cele nucleare ar fi nimicite). Se pun întrebări de felul : cît de mare trebuie să fie acest plafon rațional ? Ce se înțelege prin securitate, prin destindere etc... ? Iată o serie de probleme care trebuie precizate și studiate temeinic din punct de vedere științific. Și mai sînt încă multe altele.

Există deci o strînsă corelație între cercetarea științifică a problemelor păcii, între cercetarea științifică în general și mișcarea pentru pace. Fără o serioasă bază științifică pe care membrii unei mișcări pentru pace să și-o însușească, această mișcare se va limita la generalități, uneori la simple lozinci și nu-și va atinge scopul.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 5, 1982, P. 627–628

Revine astfel oamenilor de știință, indiferent de domeniul în care ar activa, o datorie de onoare de a sprijini prin propria lor cercetare cauza păcii. Omului de știință, fie că este savant de renume mondial sau simplu cercetător, nu-i poate fi indiferent modul cum sînt folosite rezultatele cercetării sale, dacă acestea servesc pentru progres și bunăstare sau pentru distrugerea omenirii. Omul de știință din zilele noastre nu poate rămîne indiferent, considerînd că de problemele păcii și ale războiului trebuie să se ocupe „alții". Omul de știință are posibilitatea să intuiască cel mai bine ororile posibile ale unui viitor război mondial și să le înfățișeze în adevărata lor lumină în fața oamenilor. De asemenea, el poate aduce o contribuție efectivă, deosebit de importantă la lupta pentru pace, prin autoritatea cuvîntului său, pentru că niciodată mai mult ca astăzi n-a fost ascultat cu mai multă încredere, cu mai mult respect cuvîntul omului de știință.

Pornindu-se de la acest adevăr fundamental, în țara noastră a luat ființă în anul 1981 un comitet național „Oamenii de știință și pacea" al cărui președinte a fost aleasă tovarășa academician doctor inginer Elena Ceaușescu, prim-viceprim-ministru, președinte al Consiliului Național pentru Știință și Tehnologie.

Comitetul național român „Oamenii de știință și pacea" desfășoară o bogată activitate internă și internațională făcînd cunoscută politica țării noastre de oprire a cursei înarmărilor, de trecere la dezarmare și în primul rînd la dezarmarea nucleară, de oprire a amplasării de noi rachete cu rază medie de acțiune în Europa și de retragere și distrugere a rachetelor existente, de încetare a tuturor conflictelor și confruntărilor militare și de rezolvare a tuturor problemelor dintre state pe calea tratativelor, de realizare a securității și cooperării în Europa și în întreaga lume pe baza respectului independenței popoarelor, a suveranității, a încrederii, de lichidare a subdezvoltării, de creare a unei noi ordini economice internaționale și de democratizare a relațiilor internaționale, care să permită participarea tuturor statelor și în particular a celor mici și mijlocii, în curs de dezvoltare și nealiniate, care constituie marea majoritate a omenirii, la soluționarea problemelor complexe ale epocii noastre.

La recenta sesiune specială a Organizației Națiunilor Unite consacrată dezarmării a participat un reprezentant al Comitetului național român „Oamenii de știință și pacea" care a avut astfel prilejul să exprime punctul de vedere al oamenilor de știință din țara noastră cu privire la problema cea mai importantă a contemporaneității, dezarmarea, care pe bună dreptate a fost numită *prioritatea priorităților*.

RADU P. VOINEA

26. VII. 1982

RECENZII

Proceedings of an International Symposium on
ABSORBED SPECIFIC ENERGY AND/OR STRAIN ENERGY DENSITY CRITERION
Akadémiai Kiadó, Budapest

Lucrările unui simpozion internațional asupra
ENERGIEI SPECIFICE ABSORBITE ȘI/SAU CRITERIUL
DENSITĂȚII ENERGIEI DE DEFORMAȚIE

Fenomenul ruperii a început să fie investigat într-un mod susținut din deceniul al 5-lea al secolului nostru. Rezultatele teoretice și experimentale acumulate s-au constituit într-o nouă ramură a științelor tehnice care a primit denumirea de Mecanica ruperii.

În cadrul acestei discipline s-a folosit cu rezultate remarcabile conceptul energetic. Pînă la apariția acestei ramuri tehnice, rezistența la rupere a unui material se caracteriza prin tensorul tensiunilor și al deformațiilor specifice aplicat la scară microscopică. Conceptul energetic permite o exprimare atît la scară atomică cît și microscopică printr-o mărime scalară. Energia de deformație stocată în unitatea de volum de material solid atinge o valoare critică cînd fisura își pierde stabilitatea și urmează o nouă dezvoltare. Procesul ruperii în materialele inginerești este însoțit de o deformație plastică locală ceea ce implică absorbția unei mari cantități de energie.

Caracterizarea ruperii materialelor în conceptul energetic se face prin două criterii complementare :

1. criteriul densității energiei de deformație Sc propus de G. C. Sih în 1971,
2. criteriul energiei specifice absorbite Wc propus de L. Gillemot.

Cele două criterii sînt echivalente și postulează o valoare critică a energiei în unitatea de material. Combinarea celor două criterii a permis transferul datelor obținute pe materialele de testare la materialele practicii inginerești ca și predicția încărcării admisibile și a formei secțiunii nete a unui element structural supus la o stare de solicitare complexă.

Lucrările simpozionului „Asupra energiei specifice absorbite și/sau criteriul densității energiei de deformație „înmănunchează într-un singur volum articole provenind din partea a 140 delegații din țări europene și de pe alte continente avînd ca editori pe G. C. Sih de la Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, S.U.A. ; E. Csoboly de la Universitatea tehnică din Budapesta și F. Gillemot de la Academia de științe fizice din Budapesta. Simpozionul și-a dedicat lucrările memoriei fostului academician profesor László Gillemot, recunoscută personalitate științifică cu contribuții de seamă în mecanica ruperii.

Lucrările Simpozionului de la Budapesta au dat o evaluare critică validității și multeralității conceptului energetic asociat ruperii prin aplicarea lui la diferite materiale în condiții de încărcare și configurații geometrice variate.

Volumul lucrărilor întrunește un număr de 33 de articole grupate în două părți și structurate în 7 secțiuni.

Predicția dezvoltării caracteristicilor fisurii constituie principala idee la care se asociază o bună parte din lucrările volumului.

Se știe că schimbările bruște în comportarea materialului sînt identificate prin valori critice ale încărcărilor și deplasărilor. Oboseala și ruperea implică două procese : inițierea fisurii și propagarea acesteia. Criteriul energetic al mecanicii ruperii evidențiază doi parametri de material care caracterizează cele două aspecte : funcția densității critice a energiei de deformație pentru inițierea și creșterea lentă și factorul densității critice a energiei de deformație pentru ruperea incipientă. Cele două mărimi sînt constante ale materialului cu care se efectuează predicția încărcărilor admise și a secțiunilor nete ale elementelor structurale.

Acestor idei se dedică următoarele articole : „Predicția dezvoltării caracteristicilor fisurii" de G. C. Sih ; „Criteriul energiei minime de deformare elastică pentru ruperile în modul I și

II" de P. S. Theocaris; „Predicția fisurii prin fotoelasticitate și metoda elementului finit" de B. I. G. Barr, W. T. Evans, J. Watkins, B. B. Sabir; „Aplicarea teoriei lui Sc și Wc la predicția dezvoltării fisurii de oboseală de-a lungul traiectoriei sale de A. J. Krasovsky, V. A. Vainshtok.

Progrese obținute în aplicarea criteriului energetic postulat de G. C. Sih și L. Gillemot prin noi metodologii care să exploreze alte aspecte ale mecanicii ruperii sînt prezentate într-o serie de articole dintre care cităm: „Criteriul densității energiei de deformație — studiu pentru aplicarea lui" autori H. Kordisch, J. Riedmüler, E. Sommer; „O nouă metodologie pentru studiul criteriului de rupere a elementelor crestate sau fisurate sub modurile I și II" de T. Yokobori, I. Maekawa, A. T. Yokobori, K. Sato, Y. Ishizaki; „Aplicarea criteriului energiei pentru fisuri înclinate la încărcare biaxială" de L. Pesti; „Cercetarea densității energiei de deformație cu ajutorul interferometriei holografice" de G. Frankowski, G. Wernicke.

Aplicații inginerești privind rezistența la rupere a metalelor folosind criteriul energetic sînt cuprinse într-o serie de articole menite să servească activității de proiectare. În această tematică se pot include lucrările: „Un ajutor practic pentru proiectarea ruperii mecanice — criteriul densității energiei de deformație" autori J. W. Provan, E. S. Rodriquez; „Examinarea rezistenței la rupere cu ajutorul energiei specifice absorbite a lui Gillemot pînă la rupere" de V. S. Ivanova, L. I. Maslov, A. K. Zotov, J. Ginsztler; „Ruperea mecanică a materialelor pentru cîrmă" de G. J. Lake, A. G. Thomas; „Folosirea caracteristicilor de rezistență determinate cu A.S.P.E.F. și alte metode de investigare în cazul oțelului de scule K 13" de E. Schuchtár.

În Mecanica ruperii — nucleerea fisurii ca și propagarea acesteia este determinată de apariția unor enclove plastice. Studiul formei acestor zone și predicția traiectoriei fisurii constituie obiectul de dezvoltare a lucrărilor: „Contribuții la determinarea perimetrului zonei de plastificare" de A. Brenner; „Observații asupra curgerii subcritice în geometrii de corpuri fisurate complex" de C. W. Smith.

În lucrările Simpozionului de la Budapesta sînt prezente articole care exprimă opinii comparative privind criteriile energetice axate pe ruperea prin fisurare. Această preocupare o evidențiază: „O extindere formală a criteriului de rupere" de K. F. Fischer; „O comparație între densitatea critică a energiei de deformație și criteriul localizării deformației maxime pentru ruperea locală a unui solid elasto-plastic" autori S. N. Bandyopadhyaz, H. K. Deysarker; „Compararea celor mai cunoscute criterii de rupere" de S. B Batdorf; „Compararea parametrilor rezistenței la rupere" de K. Kalna.

Extinderea criteriului energetic și la alte materiale în afara aliajelor metalice se face cunoscută cu rezultate dintre cele mai bune dovedind astfel multilateralitatea teoriei mecanicii ruperii pe baze energetice în articole ca: „Energia specifică de rupere absorbită de polimeri" de J. C. Radon, E. Czoboly; „Propagarea fisurii în rocă și structuri de beton" de A. R. Ingraffea, V. Saouma, G. Blandford, J. Chapell.

Articolele publicate în volumul „Lucrările unui simpozion internațional asupra energiei specifice absorbite și/sau criteriul densității energiei de deformație" conțin în marea lor majoritate dezvoltări teoretice corelate cu cercetări experimentale efectuate cu tehnicile cele mai actuale.

Lucrarea se adresează inginerilor cu activitate în domeniul cercetării, proiectării și cadrelor didactice din învățămîntul tehnic superior. Ea se remarcă printr-un conținut de strictă actualitate și o formă academică de prezentare.

Acad. Dan Mateescu, I. Dimoiu

NONLINEAR FINITE ELEMENT ANALYSIS IN STRUCTURAL MECHANICS. Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr-Universität Bochum, Germany, July 28—31, 1980. Editors W. Wunderlich, E. Stein and K.-J.-Bathe. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1981 (XIII + 777 pagini și 272 figuri).

Dezvoltarea rapidă a capacităților de calcul a stimulat aplicarea tehnicii de element finit în domeniul mecanicii aplicate. Obiectul cercetării actuale îl constituie posibilitatea evaluării cît mai fidele a comportării reale a structurilor prin metode numerice. Aceasta presupune luarea în considerație a unor efecte neliniare datorate atît caracteristicilor fizice ale materialelor, cît și deformațiilor mari ale structurilor. Cercetările din acest domeniu fiind de interes mondial s-a deschis un schimb de informații între diferite grupuri de cercetători încercîndu-se și o coordonare a direcțiilor viitoare de cercetare.

Primul simpozion bilateral americano-german a avut loc în 1976 la Cambridge, Ma., S.U.A, sub genericul *Formulări și algoritmi de calcul în tehnica de element finit* și a reunit

cite 20 cercetători din fiecare țară. Al doilea simpozion bilateral s-a organizat la Bochum, R.F.G., în iulie 1980 și s-a bucurat de o participare europeană mai largă. La acest ultim simpozion s-au prezentat 38 comunicări grupate după tematică în 6 părți.

Partea I, *Formulări generale*, cuprinde patru comunicări care se referă la estimarea erorilor de calcul în tehnica de element finit, o aplicare a principiului lucrului mecanic virtual la plăci plane și curbe, posibilitatea utilizării unor teoreme variaționale și formularea unor probleme de contact.

Partea a II-a, *Probleme neliniare geometric* pentru bare și plăci, cuprinde nouă comunicări referitoare la trasarea răspunsului neliniar, unele cazuri de stabilitate elastică și dinamică, utilizarea unor pincipii variaționale și generalizări pentru bare curbe și plăci subțiri.

Partea a III-a, *Probleme neliniare fizic*, cuprinde 11 comunicări care se referă la statica și dinamica pămînturilor, aplicarea metodelor numerice în elasto-plasticitate și plasticitate perfectă, calculul plăcilor curbe subțiri și al cadrelor plane.

Partea a IV-a, *Dinamica neliniară*, cuprinde două comunicări referitoare la răspunsul tranzitoriu neliniar al structurilor din beton armat și proprietățile de stabilitate și convergență ale unui algoritm Crank-Nicholson pentru probleme elasto-dinamice neliniare.

Partea a V-a, *Metode de rezolvare*, cuprinde nouă comunicări care se referă la utilizarea benzilor variabile și a coloanelor active, iterații în spațiul forțe-deplasări, algoritmi adaptivi pentru integrarea unor funcții explicite în timp, relaxarea dinamică, calculul numeric al problemelor de contact și probleme de elasticitate finită incompresibilă.

Partea a VI-a, *Algoritmi de calcul*, cuprinde trei comunicări referitoare la organizarea și administrarea datelor în tehnica de element finit, performanțele unor algoritmi bazați pe un procesor liniar și procesori de mare viteză pentru algoritmi și tehnici de calcul.

Cele 38 comunicări nu sînt limitate ca spațiu, unele fiind mai extinse, altele mai restrînse, dar toate sînt de înaltă ținută științifică și se adresează cercetătorilor de strictă specialitate.

Ramiro Sofronie

PHYSICAL NON-LINEARITIES IN STRUCTURAL ANALYSIS. Symposium Senlis, France, May 27—30, 1980. Editors J. Hult and J. Lemaitre. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1981 (XI + 287 pagini și 109 figuri).

Simpozionul a fost organizat de Uniunea internațională de mecanică teoretică și aplicată (I. U. T. A. M.) împreună cu Centrul tehnic al industriilor mecanice (C. E. T. I. M.) din Franța. Comitetul de organizare și-a propus să apropie limbajul cercetării și cel al producției în discutarea problemelor de calcul al structurilor prin tehnica de element finit. S-a recunoscut că datorită calculatoarelor de mare viteză calculul modern al structurilor, este concentrat în principal asupra unor fenomene neliniare din plasticitate, visco-plasticitate precum și din mecanica avariilor și a ruperilor. La rîndul lor cercetătorii din acest domeniu pot fi considerați fie analiști de materiale cu probleme neliniare fizic, fie analiști de structuri cu probleme neliniare geometric.

Programul simpozionului a cuprins expuneri prezentate în patru sesiuni plenare privind 1. Ecuații constitutive ; 2. Concepte de avariere și rupere ; 3. formulări numerice ; 4.Calculul structural, iar în trei sesiuni de lucru s-au purtat discuții avînd ca tematică 1. Comportarea la deformații, avarii și rupere ; 2. Metode și procedee numerice ; 3. Aplicații la structuri.

La simpozion au participat 90 cercetători din 17 țări și s-au prezentat în total 39 comunicări. În volumul cu lucrările simpozionului comunicările au fost ordonate în ordinea alfabetică a autorilor și sînt foarte sumare.

Ramiro Sofronie

ALEXE MARIN : *Moș Pătru sau Învățătorul de sat. Convorbiri asupra mecanicii*. Introducere, comentarii și transcriere de Ștefan Bălan și Igor Ivanov, 128 p., Editura Academiei R. S. România, București, 1981.

Concepută sub forma unui dialog între Moș Pătru și nepoții săi, cartea cuprinde 16 convorbiri care pot fi grupate, în mod convențional, după conținut, în două mari categorii, și anume : convorbirile 1—8, 10 și 11 se încadrează în statică, iar convorbirile 9 și 12—16 se încadrează în dinamică.

Convorbirile din prima categorie se ocupă cu greutatea și căderea corpurilor, planul înclinat, pîrghia, cîntarul și balanța, scripetele și macaraua, sucala și vîrtelnița, capra, roata cu dinți, vîrtejul, pana, fierăstrăul, șurubul, compunerea și descompunerea forțelor și cu centrele de greutate ale corpurilor. Descrierea mașinilor simple și a funcționării lor se face în strînsă legătură cu folosirea lor practică.

Convorbirile din a doua categorie au ca obiect forța centrifugă, ciocnirea corpurilor, roata de apă, energia mecanică, aplicațiile tehnice ale energiei vîntului și mașinile cu abur.

Lucrarea, cu un pronunțat caracter aplicativ, ilustrată cu figuri clare și sugestive, se prezintă în general la un nivel mediu, dar uneori și la un nivel științific ridicat. Fenomenele mecanice sînt tratate descriptiv, fără prea multe justificări matematice, făcîndu-se deseori apel la bunul simț, la intuiția tehnică și la spiritul de observație al cititorului. Se remarcă influența exercitată de mecanica newtoniană a timpului, precum și părerile personale ale autorului, expuse în cursul argumentării din cadrul convorbirilor, deosebit de interesante și utile fiind cele privitoare la avantajele mașinilor, la folosirea sistemului metric și la necesitatea de a cunoaște mecanica pentru civilizație și progres.

Elaborată cu gîndul de a servi în primul rînd la popularizarea noțiunilor științifice în mijlocul maselor, lucrarea este considerată ca una dintre cele mai bune realizări ale timpului în domeniul mecanicii. De aceea, republicarea ei la 139 de ani de la apariție (București 1842) prezintă un interes deosebit pentru istoria mecanicii în general, dar mai ales pentru valorificarea gîndirii științifice și tehnice a mecanicilor care au trăit pe teritoriul țării noastre.

V. Petcu

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 1.

R

F2557

6

TOMUL 41

nov. — dec.

1982

MAR -2

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad., D. DUMITRESCU,
Acad. C. IACOB,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. O. ONICESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. D. PAVELESCU,
Dr. ing. R. PRIŞCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. D. MATEESCU,
Dr. ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste) 79515, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15.

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717, Calea Victoriei nr. 125 sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 41, nr. 6 noiembrie-decembrie 1982

SUMAR

STUDII

CORNELIU CRĂCIUN, DOREL HOMENTCOVSCHI, Soluţii ale problemei la limită cu racordări pentru viteze în curgerea stratificată prin conducta circulară. I. 635

IU. V. SUNGURŢEV, Asupra unei metode de calcul a funcţiei lui Ciaplighin . . . 654

M. BUCULEI, D. MARGHITU, Vibraţii neliniare ale elementelor cinematice nerectilinii ale mecanismelor plane 659

AL. POPA, Aspecte ale cinematicii mişcării plan-paralele a rigidului privind generalizarea cercurilor lui Bresse 667

N. RĂDUICĂ, M. V. SOARE, Contribuţii la calculul cupolelor reticulate 675

NICOLAE PETRE, PETRE CHIŢU-MILITARU, Studiul cinematic al unităţilor de pompare pe calculatoare numerice 687

N. N. ANTONESCU, H. BODNĂRESCU, E. VOICU, L. RIZEA, N. GRIGORE, Calculul grafic al unghiurilor de înclinare de divizare al danturilor conice circulare 715

OAMENII DE ŞTIINŢĂ ŞI PACEA

O manifestare ştiinţifică în favoarea păcii (T. Oroveanu) 721

RECENZII 723

INDEX ALFABETIC 727

SOLUȚII ALE PROBLEMEI LA LIMITĂ CU RACORDĂRI PENTRU VITEZE ÎN CURGEREA STRATIFICATĂ PRIN CONDUCTA CIRCULARĂ *). I

de CORNELIU CRĂCIUN și DOREL HOMENTCOVSCHI
Institutul politehnic București

Se propun metode pentru determinarea repartiției de viteze pe suprafața de separare a două fluide care curg stratificat în conducta circulară. Soluția se obține sub o formă simplă, care permite atît calculul debitelor, cît și scrierea efectivă a vitezelor în întreaga secțiune, pe baza unor rezultate ale lui C. Iacob. Aplicațiile numerice ilustrează fiecare metodă și permit evaluarea gradului de aproximare.

I. INTRODUCERE

Studiul pe care-l prezentăm a fost generat de o problemă de interes practic și anume de problema creșterii capacității de transport a unei conducte sub gradient de presiune dat, prin injecția unui lichid mai puțin vîscos nemiscibil cu cel transportat (de exemplu injecția de apă în transportul petrolului). Din punct de vedere matematic ea revine la rezolvarea unei probleme la limită pentru viteze cu condiții de racordare pe frontiera de contact, problemă care apare și în alte domenii ale fizicii matematice. Cu ajutorul vitezelor trebuie calculate în continuare debitele, apoi studiată dependența lor de parametrii fundamentali.

Pentru conducta de secțiune pătrată problema de mai sus a fost complet tratată, teoretic și cu aplicații numerice [1]. Un studiu analog se impune pentru conductele obișnuite, de secțiune circulară, în care s-a estimat o creștere substanțială a debitului transportat ca urmare a injecției [2]. Aici apar dificultăți sporite chiar din prima etapă, aceea a rezolvării problemei la limită cu racordări pentru viteze. Corespondența fizică mărește gradul de dificultate a problemei la limită deoarece soluțiile trebuie căutate sub o formă care să permită calculul ulterior al debitelor. Dar tot fenomenul fizic furnizează ipoteze care să facă posibilă rezolvarea în condițiile impuse.

II. FORMULAREA PROBLEMEI MATEMATICE—FUNCȚIILE CORECȚIE

Să considerăm curgerea stratificată a două lichide de viscozități $\mu_j (j = 1$ sau $2)$ în conducta circulară de rază R sub gradient de presiune

* Deoarece spațiul revistei nu a permis publicarea unitară a articolului, bibliografia se găsește la sfîrșitul părții a doua.

P. Dacă se alege axa Oz în lungul curgerii şi axa Ox paralelă cu linia de separare a lichidelor în secţiunea normală (fig. 1), atunci

$$P = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

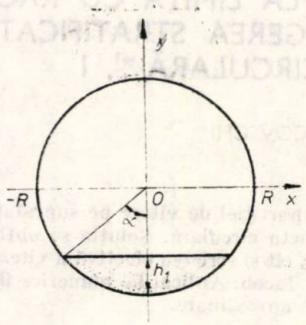


Fig. 1

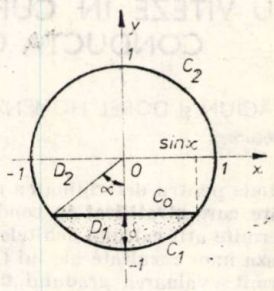


Fig. 2

Stratificarea poate fi caracterizată prin unghiul α sau prin mărimea δ definită ca raportul dintre grosimea maximă h_1 a stratului inferior şi rază : $\delta = \frac{h_1}{R}$. Cei doi parametri de stratificare sînt legaţi prin relaţia

$$\delta = 1 - \cos \alpha. \tag{1}$$

O primă simplificare o constituie reducerea la conducta de rază unitate (fig. 2), în care curg aceleaşi lichide, asemenea stratificate (acelaşi α sau δ), sub acelaşi gradient de presiune P. În conducta de rază R vitezele se obţin din cele pentru conducta de rază unitate prin amplificare cu R^2 şi înlocuirea variabilelor x şi y cu rapoartele $\frac{x}{R}$, respectiv $\frac{y}{R}$. Debitele se obţin înmulţind debitele din conducta de rază unitate cu puterea a patra a razei [3].

Problema la limită pentru viteze în cercul de rază unitate se scrie :

$$\Delta v_1(x, y) = -K_1 \qquad \text{în } D_1, \tag{2}$$

$$\Delta v_2(x, y) = -K_2 \qquad \text{în } D_2, \tag{3}$$

$$v_1(x, y) = 0 \qquad \text{pe } C_1, \tag{4}$$

$$v_2(x, y) = 0 \qquad \text{pe } C_2, \tag{5}$$

$$v_1(x, y) = v_2(x, y) \qquad \text{pe } C_0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} = m \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y} \qquad \text{pe } C_0, \tag{7}$$

unde

$$K_j = -\frac{1}{\mu_j} P \qquad (j = 1, 2), \tag{8}$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{9}$$

Pentru cazul separării diametrale, soluția problemei la limită (2)–(7) a fost dată în lucrarea [4]. Ea a fost rezolvată în cazul separării după un arc de cerc, și în particular după un segment de dreaptă în lucrarea [5]. Dar soluțiile date sub forma unor integrale Fourier nu permit exprimarea debitelor și deci tratarea problemei fizice formulată în introducere.

Determinarea repartiției de viteze $v(x)$ pe linia de separare C_0 ar reduce problema (2)–(7) la rezolvarea a două probleme la limită de tip Dirichlet independente, pentru ecuațiile de tip Poisson (2) și (3). Dar funcția $v(x)$ satisface o ecuație integrală singulară greu de abordat ([6] cap. XIX). De aceea am căutat o altă cale de soluționare a problemei (2)–(7) pe care o vom expune în cele ce urmează.

Vitezele în cele două fluide se pot scrie sub forma

$$v_j(x, y) = K_j \left\{ V_j(x, y) + \frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2) \right\} \qquad (j = 1, 2). \tag{10}$$

Dacă fluidul de viscozitate μ_j ar curge singur în întreaga conductă $D = D_1 \cup D_2$, atunci viteza lui ar avea expresia cunoscută

$$v_j^0(x, y) = \frac{K_j}{4}(1 - x^2 - y^2) \quad (j = 1, 2). \tag{11}$$

Prin urmare termenul $K_j V_j(x, y)$ din (10) reprezintă o corecție adusă vitezei v_j^0 cînd fluidul de viscozitate μ_j ar curge singur, corecție datorată prezenței celui de-al doilea fluid. Aceasta justifică denumirea de „funcții corecție" dată funcțiilor $V_j(x, y)$. Dacă ținem seama că ecuația cercului de contur $C_1 \cup C_2$ este

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{12}$$

iar a liniei de separare C_0 din figura 2 este

$$y = y_0 = -\cos \alpha, \tag{13}$$

atunci schimbarea de funcții (10) în (2)–(7) conduce la

$$\Delta V_1(x, y) = 0 \quad \text{în } D_1, \quad (x^2 + y^2 < 1,\ y < -\cos \alpha), \tag{14}$$

$$\Delta V_2(x, y) = 0 \quad \text{în } D_2, \quad (x^2 + y^2 < 1,\ y > -\cos \alpha), \tag{15}$$

$$V_1(x, y) = 0 \quad \text{pe } C_1, \quad (x^2 + y^2 = 1,\ y < -\cos \alpha), \tag{16}$$

$$V_2(x, y) = 0 \quad \text{pe } C_2, \quad (x^2 + y^2 = 1,\ y > -\cos\alpha), \tag{17}$$

$$V_1 = \frac{1}{m} V_2 - \frac{m-1}{m}\frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)$$

$$\text{pe } C_0, \quad (y = -\cos\alpha,\ |x| < \sin\alpha), \tag{18}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial y} \quad \text{pe } C_0, \quad (y = -\cos\alpha,\ |x| < \sin\alpha). \tag{19}$$

Aceasta este problema la limită de contact fluid pentru funcţiile corecţie în care ecuaţiile de tip Poisson (2), (3) au fost înlocuite cu ecuaţiile de tip Laplace (14), (15).

Trebuie găsite două funcţii armonice în D_1, respectiv în D_2, nule pe frontierele solide C_1, respectiv C_2, componente ale cercului unitate, care să satisfacă pe frontiera comună C_0 (interfaţă) relaţiile de racordare (18) şi (19).

Fie $V_j^*(x, y)$ conjugata armonică a funcţiei $V_j(x, y)$ în domeniul $D_j (j = 1, 2)$. Funcţiile de variabila complexă $\zeta = x + iy$ definite,

$$\Phi_j(\zeta) = V_j(x, y) + iV_j^*(x, y) \quad (j = 1, 2), \tag{20}$$

sînt olomorfe în domeniile corespunzătoare D_j. Avem deci de determinat două funcţii olomorfe în D_1, respectiv în D_2, ale căror părţi reale să fie nule pe C_1, respectiv pe C_2, iar pe frontiera comună C_0 să satisfacă relaţiile de racordare (18) şi (19).

Debitele celor două fluide care curg stratificat au fost scrise [7] sub forma:

$$Q_1 = \frac{K_1}{8}\left[\alpha - \frac{1}{3}\sin\alpha\ \cos\alpha\,(3 + 2\sin^2\alpha)\right] -$$

$$- \frac{K_1}{2}\left\{\cos\alpha \int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} V_1(x, y_0)\,dx + \int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} xV_1^*(x, y_0)\,dx\right\}, \tag{21}$$

$$Q_2 = \frac{K_2}{8}\left[\pi - \alpha + \frac{1}{3}\sin\alpha\ \cos\alpha\,(3 + 2\sin^2\alpha)\right] +$$

$$+ \frac{K_2}{2}\left\{\cos\alpha \int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} V_2(x, y_0)\,dx + \int_{-\sin\alpha}^{\sin\alpha} xV_2^*(x, y_0)\,dx\right\}. \tag{22}$$

Pentru debite este deci suficient să determinăm funcţiile V_j şi V_j^* pe linia de separare sub o formă care să permită calculul integralelor din (21) şi (22). Determinarea funcţiilor V_j pe linia de separare (suficient a uneia din ele deoarece sînt legate prin condiţia de racordare (18)) ar reduce problema (14)—(19) la două probleme de tip Dirichlet pentru ecuaţii de tip Laplace

în domeniile D_1, respectiv în D_2. Soluțiile pentru cele două domenii introduse în (10) ar permite și determinarea vitezelor.

III. PROBLEMA FIZICĂ—IPOTEZE SUPLIMENTARE

Dacă lichidul de viscozitate μ_2 ar curge singur în întreaga secțiune $D = D_1 \cup D_2$, debitul numit debit de referință ar fi Q_2^0. Prin introducerea fluidului de viscozitate μ_1, debitul transportat sub același gradient de presiune devine Q_2, ca urmare a modificării vitezelor și a reducerii secțiunii de transport la D_2. Pentru curgerea între plăci paralele [8] și în conducte de secțiune pătrată [1] s-a demonstrat că debitul transportat cu injecție poate depăși debitul de referință Q_2^0 dacă se injectează un lichid mai puțin vîscos, cu $\mu_1 < \mu_2$ sau $m > 1$ și dacă grosimea h_1 a stratului injectat este suficient de mică în raport cu dimensiunea caracteristică a sistemului (semidistanța dintre plăci sau semilatura pătratului), adică pentru $\delta = \frac{h_1}{a}$ suficient de mic.

Mărimile m și δ sînt tocmai parametrii fundamentali de care depinde debitul transportat Q_2.

Pe baza unui studiu comparativ [2] s-a estimat că și în conducta circulară creșterea debitului transportat are loc în condiții similare anume pentru

$$1^\circ \quad m > 1, \tag{23}$$

$$2^\circ \quad \delta \text{ mic.} \tag{24}$$

Vom încerca deci rezolvarea problemei matematice în aceste ipoteze.

A. DETERMINAREA FUNCȚIEI CORECȚIE PE LINIA DE SEPARARE PRIN METODA δ MIC.

IV. PROBLEMA LA LIMITĂ REDUSĂ PENTRU DOMENIUL D_2.

Funcția

$$\zeta = i\frac{1 - i\zeta}{1 + i\zeta} \tag{25}$$

realizează transformarea conformă a cercului unitate $|\zeta| \leqslant 1$ din planul complex $\zeta = x + iy$ pe semiplanul superior $\eta \geqslant 0$ din planul auxiliar $\zeta = \xi + i\eta$, cu corespondența frontierelor din figura 3. Centrul cercului corespunde punctului $\xi = 0$, $\eta = 1$ din planul ζ.

Interfața C_0 se transformă într-un arc de cerc $\mathcal{C}_0$ a cărui săgeată este

$$\varepsilon = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{sau} \quad \varepsilon = \frac{\delta}{2 - \delta}. \tag{26}$$

Dacă se notează cu $2a$ lungimea ecardei,

$$a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{sau} \quad a = \sqrt{\frac{\delta}{2 - \delta}} = \sqrt{\varepsilon}. \tag{27}$$

Ecuația arcului de separare $\mathcal{C}_0$ este

$$\eta|_{\mathcal{C}_0} = q(\xi), \tag{28}$$

unde

$$q(\xi) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\,\frac{\sqrt{1-(1+\cos\alpha)^2\xi^2}-\cos\alpha}{1-\cos\alpha}, \quad |\xi| \leqslant a. \tag{29}$$

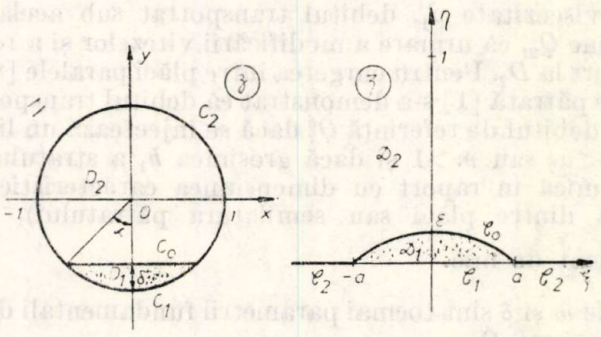


Fig. 3

Se notează

$$S(\xi) = \frac{\sqrt{1-(1+\cos\alpha)^2\xi^2}-\cos\alpha}{1-\cos\alpha} \tag{30}$$

și se arată că pentru $-a \leqslant \xi \leqslant a$, funcția $S(\xi)$ satisface dubla inegalitate

$$0 \leqslant S(\xi) \leqslant 1. \tag{31}$$

Astfel, cu notațiile (26) și (30), ecuația arcului $\mathcal{C}_0$ se scrie

$$\eta|_{\mathcal{C}_0} = \varepsilon S(\xi). \tag{32}$$

Problema la limită (14)—(19) pentru cercul unitate $|\zeta| \leqslant 1$ se transformă într-o problemă la limită pentru semiplanul superior al planului auxiliar ζ și anume

$$\Delta V_1 = 0 \qquad \text{în } \mathcal{D}_1, \tag{33}$$

$$\Delta V_2 = 0 \qquad \text{în } \mathcal{D}_2, \tag{34}$$

$$V_1 = 0 \qquad \text{pe } \mathcal{C}_1, \tag{35}$$

$$V_2 = 0 \qquad \text{pe } \mathcal{C}_2 \tag{36}$$

$$V_2 = mV_1 + (m-1)g(\xi) \qquad \text{pe } \mathcal{C}_0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} = \frac{\partial V_2}{\partial n} \qquad \text{pe } \mathcal{C}_0, \tag{38}$$

unde $\vec{n}$ reprezintă normala la curba $\mathcal{C}_0$ îndreptată spre doneniul $\mathcal{D}_2$. S-a notat cu $g(\xi)$ transformata, prin reprezentarea conformă, a funcției

$$\frac{1}{4}(1 - x^2 - y^2)|_{C_0} = \frac{1}{4}(\sin^2 \alpha - x^2),$$

care are acum expresia

$$g(\xi) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \frac{\sqrt{1 - (1 + \cos \alpha)^2 \xi^2} - \cos \alpha}{\sqrt{1 - (1 + \cos \alpha)^2 \xi^2} + 1}. \tag{39}$$

Ne vom ocupa de problema la limită (33) — (38). Fie $V_j^*(\xi, \eta)$ conjugata armonică a funcției $V_j(\xi, \eta)$ în domeniul $\mathcal{D}_j (j = 1, 2)$. Avem de determinat două funcții:

$$\Phi_j(\zeta) = V_j(\xi, \eta) + iV_j^*(\xi, \eta), \tag{40}$$

olomorfe în $\mathcal{D}_1$, respectiv în $\mathcal{D}_2$ ale căror părți reale satisfac condițiile (35) — (38). Dacă $\vec{s}$ este versorul tangentei la curba $\mathcal{C}_0$ și $\vec{n}$ versorul normalei interioare la $\mathcal{D}_2$, atunci în virtutea condițiilor Cauchy-Riemann egalitatea (38) devine

$$\frac{\partial V_1^*}{\partial s} = \frac{\partial V_2^*}{\partial s},$$

de unde

$$V_1^*(s) = V_2^*(s) = H(s). \tag{41}$$

Aici, $H(s)$ reprezintă valoarea comună a celor două funcții în punctele curbei $\mathcal{C}_0$.

Între s, lungimea arcului pe curba $\mathcal{C}_0$ măsurat de la intersecția cu axa $O\eta$ și ξ există relațiile:

$$s = \frac{1}{1 + \cos \alpha} \arcsin (1 + \cos \alpha)\, \xi, \tag{42}$$

$$\xi = \frac{1}{1 + \cos \alpha} \sin (1 + \cos \alpha)\, s, \tag{43}$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 + \cos \alpha)^2 \xi^2}}. \tag{44}$$

Datorită acestor relații, egalitatea (41) se mai scrie

$$V_1^*(\xi) = V_2^*(\xi) = h(\xi), \tag{45}$$

unde

$$h(\xi) = H[s(\xi)]. \tag{46}$$

Din derivarea ultimei egalități, avem

$$\frac{\mathrm{d}h(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}H(s)}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi}. \tag{47}$$

Ne vom fixa atenția asupra funcției $\Phi_1(\zeta) = V_1 + iV_1^*$, olomorfă în $\mathcal{D}_1$, care are partea reală nulă pe segmentul $[-a, a]$ al axei reale și partea imaginară egală cu $h(\xi)$ pe arcul $\mathcal{C}_0$. Conform principiului lui Schwarz ea poate fi prelungită analitic în domeniul simetric față de axa $O\xi$. Partea imaginară V_1^* va lua în punctele simetrice arcului $\mathcal{C}_0$ valori egale cu $h(\xi)$.

Dacă arcul $\mathcal{C}_0$ este suficient de apropiat de axa $O\xi$ astfel încît ecuația frontierei domeniului să se poată scrie sub forma

$$\eta(\xi) = \pm\, \varepsilon S(\xi),$$

atunci funcția armonică $V_1^*(\xi, \eta)$ care ia valorile $h(\xi)$ pe frontieră este de forma

$$V_1^*(\xi, \eta) = h(\xi) + O(\varepsilon^2).$$

în care $O(\varepsilon^2)$ reprezintă termeni de ordinul ε^2 [9]. Relația constituie o dezvoltare asimptotică a funcției $V_1^*(\xi, \eta)$ pentru valori mici ale lui ε.

Conform ipotezei (24) a cărei justificare fizică a fost dată la paragraful precedent, parametrul δ este mic și ca urmare săgeata ε a arcului $\mathcal{C}_0$ definită la (26) este mică. Ecuația (32) a arcului întrunește condiția de mai sus. Putem scrie cu o eroare acceptabilă, cu atît mai mică cu cît ε este mai mic.

$$V_1^*(\xi, \eta) = h(\xi). \tag{48}$$

De aici

$$\frac{\partial V_1^*}{\partial \xi} = h'(\xi)$$

sau, în baza relațiilor Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial V_1}{\partial \eta} = -h'(\xi),$$

care, prin integrare, conduce la

$$V_1(\xi, \eta) = -\eta h'(\xi).$$

În particular, pe arcul $\mathcal{C}_0$

$$V_1[\xi, q(\xi)] = -q(\xi)\frac{dh(\xi)}{d\xi} \tag{49}$$

sau, înlocuind derivata cu expresia ei (47),

$$V_1[\xi, q(\xi)] = -q(\xi)\frac{dH(s)}{ds}\frac{ds}{d\xi}. \tag{50}$$

Din (41), prin derivare și folosirea relațiilor Cauchy-Riemann, mai avem

$$\frac{dH(s)}{ds} = \frac{dV_2^*}{ds} = -\frac{dV_2}{dn}. \tag{51}$$

Înlocuim în (50) și obținem

$$V_1[\xi, q(\xi)] = q(\xi)\frac{ds}{d\xi}\frac{dV_2}{dn}. \tag{52}$$

Expresia (52) a funcției V_1 pe arcul de separare introdusă în condiția la limită (37) conduce la relația

$$V_2(\xi) = m\ q(\xi)\frac{ds}{d\xi}\frac{dV_2}{dn} + (m-1)\,g(\xi) \quad \text{pe} \quad \mathcal{C}_0. \tag{53}$$

Dar $q(\xi)$, $g(\xi)$ și $\frac{ds}{d\xi}$ au expresiile (29), (39), respectiv (44), în care intervine funcția

$$r(\xi) = \sqrt{1-(1+\cos\alpha)^2\xi^2}, \qquad |\xi| \leqslant a. \tag{54}$$

Ea verifică inegalitatea

$$\cos\alpha \leqslant r(\xi) \leqslant 1.$$

Cu notația (54),

$$q(\xi) = \frac{r(\xi)-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \tag{55}$$

$$g(\xi) = \frac{1+\cos\alpha}{2}\frac{r(\xi)-\cos\alpha}{r(\xi)+1}, \tag{56}$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \frac{1}{r(\xi)}. \tag{57}$$

Condiția (53) se scrie

$$V_2(\xi) = \frac{m}{1+\cos\alpha}\,\frac{r(\xi)-\cos\alpha}{r(\xi)}\,\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}n} + \\ + (m-1)\,\frac{1+\cos\alpha}{2}\,\frac{r(\xi)-\cos\alpha}{r(\xi)+1}, \qquad \text{pe } \mathscr{C}_0, \tag{58}$$

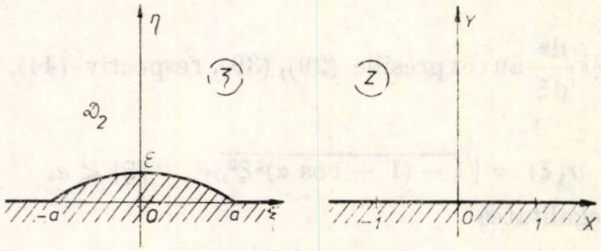
ceea ce reprezintă o legătură între funcția armonică V_2 și derivata ei normală pe frontiera $\mathscr{C}_0$, legătură în care coeficienții depind de variabila ξ prin intermediul funcției $r(\xi)$ definită la (54).

Putem să ne fixăm asupra domeniului $\mathscr{D}_2$ pentru care am fost conduși la următoarea problemă la limită : să se determine funcția $V_2(\xi, \eta)$, armonică, regulată la infinit, care să ia valoarea zero pe porțiunile axei reale $(-\infty, -a]$ și $[a, \infty)$ adică pe $\mathscr{C}_2$ și care să satisfacă relația (58) pe restul frontierei adică pe arcul $\mathscr{C}_0$.

Aceasta este problema la limită redusă pentru domeniul $\mathscr{D}_2$. Rezolvarea ei, și ca urmare determinarea funcției corecție V_2 pe linia de separare $\mathscr{C}_0$, reprezintă, așa cum am mai arătat la sfîrșitul paragrafului II, cheia pentru rezolvarea întregii probleme.

V. ADUCEREA PROBLEMEI REDUSE LA O ECUAȚIE INTEGRO-DIFERENȚIALĂ DE TIP PRANDTL

Problema la limită redusă pentru domeniul $\mathscr{D}_2$ poate fi adusă la o problemă similară pe un domeniu convenabil, de exemplu un semiplan.



Frg. 4

Funcția

$$Z = \frac{\left(\dfrac{a+\zeta}{a-\zeta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} - 1}{\left(\dfrac{a+\zeta}{a-\zeta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} + 1} \tag{59}$$

reprezintă conform domeniul $\mathscr{D}_2$ din planul ζ pe semiplanul superior al planului complex $Z = X + \mathrm{i}Y$ cu corespondența frontierelor indicată în figura 4.

Transformarea inversă este realizată de funcţia

$$\zeta = a \frac{\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} e^{i\alpha} - 1}{\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\alpha}} e^{i\alpha} + 1}, \tag{60}$$

din care deducem pe arcul $\mathcal{C}_0$ legătura

$$\xi = a \frac{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{2\frac{\pi-\alpha}{\pi}} - 1}{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{2\frac{\pi-\alpha}{\pi}} + 2\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} \cos\alpha + 1}. \tag{61}$$

În baza ultimei relaţii, funcţia $V_2(\xi)$ devine o funcţie de X

$$\mathcal{V}_2(X) = V_2[\xi(X)]. \tag{62}$$

Condiţia (58) pe arcul $\mathcal{C}_0$ se va transforma într-o condiţie pe segmentul $[-1, 1]$ al axei OX. Astfel, funcţia $r(\xi)$ definită la (54) devine prin intermediul legăturii (61), dacă ţinem seama şi de semnificaţia (27) a parametrului a,

$$R(X) = r[\xi(X)] =$$

$$= \sqrt{1 - \sin^2\alpha \left[\frac{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{2\frac{\pi-\alpha}{\pi}} - 1}{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{2\frac{\pi-\alpha}{\pi}} + 2\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} \cos\alpha + 1}\right]^2}, \quad |X| \leqslant 1. \tag{63}$$

Derivata normală pe $\mathcal{C}_0$ se transformă prin reprezentare în

$$\frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial Y}\left|\frac{dZ}{d\zeta}\right|_{\mathcal{C}_0} = \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial Y} \frac{1}{\left|\frac{d\zeta}{dZ}\right|_{Y=0}}. \tag{64}$$

S-a preferat calculul modulului derivatei $\frac{d\zeta}{dZ}$ pe segmentul $[-1, 1]$ al axei reale deoarece este mai simplu:

$$\left|\frac{d\zeta}{dZ}\right|_{Y=0} =$$

$$= 4a\frac{\pi-\alpha}{\pi} \frac{1}{(1+X)^{\frac{\alpha}{\pi}}(1-X)^{2-\frac{\alpha}{\pi}}} \frac{1}{\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{2\frac{\pi-\alpha}{\pi}} + 2\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} \cos\alpha + 1}. \tag{65}$$

Condiția (58) se scrie pe segmentul pozitiv $[-1, 1]$ al axei OX

$$\mathcal{V}_2(X) = \frac{m}{1+\cos\alpha}\frac{R(X)-\cos\alpha}{R(X)}\frac{1}{\left|\frac{d\zeta}{dZ}\right|_{Y=0}}\cdot\left.\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial Y}\right|_{Y=0}+$$

$$+(m-1)\frac{1+\cos\alpha}{2}\frac{R(X)-\cos\alpha}{R(X)+1}, \tag{66}$$

unde $R(X)$ și $\left|\frac{d\zeta}{dZ}\right|_{Y=0}$ au expresiile (63), respectiv (65). Să notăm

$$G(X,\alpha) = \frac{1}{4}\frac{\pi}{\pi-\alpha}\frac{1}{\sin\alpha}(1-X^2)\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}}\left[\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{2\frac{\pi-\alpha}{\pi}}+\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{1+X}{1-X}\right)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}}\cos\alpha+1\right]\frac{R(X)-\cos\alpha}{R(X)}, \tag{67}$$

$$E(X,\alpha) = \frac{1+\cos\alpha}{2}\frac{R(X)-\cos\alpha}{R(X)+1}. \tag{68}$$

Cu ajutorul celor două notații condiția (66) se scrie

$$\mathcal{V}_2(X) = mG(X,\alpha)\left.\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial Y}\right|_{Y=0}+(m-1)E(X,\alpha). \tag{69}$$

S-au pus astfel în evidență cei doi parametri fundamentali ai curgerii : raportul viscozităților m și parametrul de stratificare α care intervine prin funcțiile G și E.

Problema la limită poate fi formulată astfel : să se determine funcția $\mathcal{F}_2(Z)=\mathcal{V}_2(X,Y)+\mathcal{V}_2^*(X,Y)$, olomorfă în semiplanul superior, a cărei parte reală satisface pe frontieră (axa reală) condițiile :

$$\mathcal{V}_2(X) = 0 \quad \text{pentru } X\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty), \tag{70}$$

$$\mathcal{V}_2(X) = mG(X,\alpha)\left.\frac{\partial\mathcal{V}_2}{\partial Y}\right|_{Y=0}+(m-1)E(X,\alpha) \text{ pentru } X\in(-1,1) \text{ latura pozitivă.}$$

Ea se întîlnește în teoria segmentului portant i poate fi redusă la rezolvarea ecuației integrodiferențiale a lui Prandtl [10]

$$\mathcal{V}_2(X) = \frac{m}{\pi}G(X,\alpha)\int_{-1}^{1}\frac{d\mathcal{V}_2(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\tau-X}+(m-1)E(X,\alpha). \tag{71}$$

Se demonstrează că ecuația lui Prandtl (71) admite totdeauna o soluție unică.

VI. ASUPRA SOLUȚIEI ECUAȚIEI INTEGRODIFERENȚIALE

Funcția $\mathcal{V}_2(X)$, soluție a ecuației (71), reprezintă tocmai corecția vitezei pe linia de separare a lichidelor.

În virtutea primei condiții (70) putem prelungi funcția $\mathcal{F}_2(Z) = \mathcal{V}_2 + i\mathcal{V}_2^*$ în semiplanul inferior. Pe marginea inferioară a tăieturii $[-1, 1]$, partea reală va lua valori opuse. Este avantajos să se treacă de la planul Z cu tăietura $[-1, 1]$ la exteriorul cercului de rază unitate din planul $\zeta = \xi + i\eta$, ca în figura 5, ceea ce se realizează cu transformarea lui Jukovski

$$Z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \tag{72}$$

Dacă putem

$$\zeta = e^{i\sigma}, \tag{73}$$

atunci

$$Z = X = \cos \sigma, \tag{74}$$

astfel încît pentru $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$, punctul Z descrie marginea superioară a tăieturii, iar pentru $-\pi \leqslant \sigma \leqslant 0$ marginea inferioară.

Funcția $\mathcal{V}_2(X)$ devine o funcție de σ, fie ea $\mathcal{V}_2(\sigma)$. Transformatele $G(\sigma)$ și $E(\sigma)$ ale funcțiilor $G(X, \alpha)$ și $E(X, \alpha)$ vor fi funcții ce satisfac condițiile

$$G(-\sigma) = G(\sigma), \quad E(-\sigma) = E(\sigma).$$

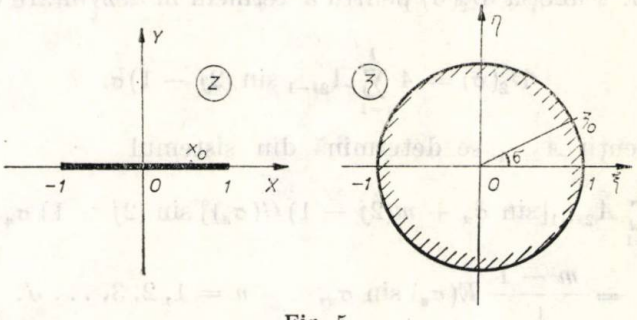


Fig. 5

Se arată ([10] p. 463) că funcția $\mathcal{V}_2(\sigma)$ are forma unei dezvoltări în serie absolut și uniform convergentă

$$\mathcal{V}_2(\sigma) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\sigma, \qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant \pi, \tag{75}$$

astfel că ecuația integrodiferențială (71) conduce la relația

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n[\sin \sigma + nmG(\sigma)] \sin n\sigma = \frac{m-1}{4} E(\sigma) \sin \sigma. \tag{76}$$

Pentru determinarea coeficienților A_n ai dezvoltării (75), H. Glauert a propus limitarea sumei la un număr N de termeni. Punînd condiția ca relația (76) să fie verificată în N puncte σ_n, alese arbitrar, se obține un sistem liniar din care se calculează coeficienții. Cu cît numărul de termeni N luați în considerare este mai mare, cu atît aproximarea este mai bună. Este indicat deci a se lua un număr din ce în ce mai mare de, puncte, de exemplu să se dubleze numărul lor, pînă cînd valorile coeficienților de același rang nu numai diferă mult între ele.

Multhopp a propus un procedeu iterativ. Cele N puncte σ_n în care se scrie relația (76) nu mai sînt alese arbitrar. Coeficienții pentru diviziunea cu număr dublu de puncte se calculează în funcție de coeficienții din diviziunea precedentă.

VII. APLICAREA METODEI LUI GLAUERT PENTRU REZOLVAREA ECUAȚIEI INTEGRODIFERENȚIALE

În metoda lui Glauert calculul efectiv al coeficienților dezvoltării funcției $\mathcal{V}_2(X)$ constă în rezolvarea unui sistem liniar. Numărul de ecuații ale sistemului poate fi redus pe baza unor considerații de simetrie. Curgerea stratificată în conducta circulară admite în secțiune pe Oy ca axă de simetrie. Pe linia de separare C_0 funcția corecție $V_2(x)$ este pară. Proprietatea se transmite succesiv funcțiilor $V_2(\xi)$ pe $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{V}_2(X)$ pe $[-1, 1]$, și ca urmare

$$\mathcal{V}_2(\sigma) = \mathcal{V}_2(\pi - \sigma), \qquad \sigma \in [0, \pi]. \tag{77}$$

De aceea în dezvoltarea (75) nu pot apare multipli de ordin par ai arcului σ. Funcția $\mathcal{V}_2(\sigma)$ pentru J termeni în dezvoltare trebuie să fie de forma

$$\mathcal{V}_2(\sigma) = 4 \sum_{j=1}^{J} A_{2j-1} \sin (2j-1)\sigma. \tag{78}$$

Coeficienții A_{2j-1} se determină din sistemul

$$\sum_{j=1}^{J} A_{2j-1}[\sin \sigma_n + m(2j-1)\, G(\sigma_n)] \sin (2j-1)\, \sigma_n =$$

$$= \frac{m-1}{4} E(\sigma_n) \sin \sigma_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots J. \tag{79}$$

În principiu, punctele σ_n pot fi alese arbitrar în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dar practic ele se iau echidistante

$$\sigma_n = \frac{n\pi}{2J}, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots J. \tag{80}$$

Să admitem că sistemul (79) a fost rezolvat. Coeficienţii A_{2j-1} din (78) fiind cunoscuţi, putem reveni la variabila X. Din relaţia (74) deducem

$$\sin \sigma = \sqrt{1 - X^2}. \tag{81}$$

Sinusurile multiplilor impari ai argumentului σ care intervin în (78) se exprimă cu ajutorul puterilor lui sin σ. Astfel,

$$\sin \sigma = \sin \sigma,$$

$$\sin 3\sigma = 3 \sin \sigma - 4 \sin^3 \sigma,$$

$$\sin 5\sigma = 5 \sin \sigma - 20 \sin^3 \sigma + 16 \sin^5 \sigma,$$

$$\sin 7\sigma = 7 \sin \sigma - 56 \sin^3 \sigma + 112 \sin^5 \sigma - 64 \sin^7 \sigma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dacă înmulţim egalităţile cu A_1, respectiv cu A_3, A_5, $A_7 \ldots$, şi le adunăm, în membrul stîng apare suma din (78) adică $\mathcal{V}_2(\sigma)$. În membrul drept se poate da factor sin σ. Înlocuim (81) şi obţinem

$$\mathcal{V}_2(X) = 4\sqrt{1 - X^2}\,[(A_1 + 3A_3 + 5A_5 + 7A_7 + \ldots) -$$

$$- (4A_3 + 20A_5 + 56A_7 + \ldots)(1 - X^2) + (16A_5 +$$

$$+ 112A_7 + \ldots)(1 - X^2)^2 - (64A_7 + \ldots)(1 - X^2)^3 + \ldots]. \tag{82}$$

Expresia dintre croşete este un polinon care conţine puteri pare ale lui X pînă la gradul $2(J-1)$ inclusiv:

$$\mathcal{V}_2(X) = \sqrt{1 - X^2}\,[B_0 + B_2X^2 + B_4X^4 + \ldots + B_{2(J-1)}X^{2(J-1)}]. \tag{83}$$

Coeficienţii B_l ai polinomului $P_{2(J-1)}(X)$ se exprimă în funcţie de coeficienţii A_{2j-1}:

$$B_0 = 4(A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots + (-1)^{J-1}A_{2J-1}),$$

$$B_2 = 4(4A_3 - 12A_5 + 24A_7 + \ldots),$$

$$B_4 = 4(16A_5 - 80A_7 + \ldots), \tag{84}$$

$$B_6 = 4(64A_7 + \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Limitarea sumei (78) la J termeni revine la a considera nuli în formulele (84) toţi coeficienţii A_{2J-1} pentru $j \geqslant J$.

În concluzie, pentru valori mici ale parametrului de stratificare δ, pe segmentul $[-1, 1]$ din planul auxiliar $Z = X + iY$ (segment care corespunde liniei de separare C_0), funcția corecție $\mathcal{V}_2(X)$ se exprimă ca produs între $\sqrt{1 - X^2}$ și un polinom par de X.

Funcția corecție $\mathcal{V}_2(X)$ se anulează la capetele intervalului, în vecinătatea cărora se comportă ca $\sqrt{1 - X^2}$.

În centrul liniei de separare C_0 valoarea corecției, care se obține din (83) pentru $X = 0$, este tocmai coeficientul B_0, adică

$$\mathcal{V}_2(0) = 4[A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + \ldots + (-1)^{J-1} A_{2J-1}] = B_0. \quad (85)$$

Din formula (83) a lui $\mathcal{V}_2(X)$ se deduce expresia corecției $V_2(x)$ pe linia de separare C_0 dacă se înlocuiește X cu $X(x)$ dedusă din reprezentările conforme succesive (25) și (60):

$$X = \frac{\left(\dfrac{\sin\alpha + x}{\sin\alpha - x}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} - 1}{\left(\dfrac{\sin\alpha + x}{\sin\alpha - x}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} + 1}, \qquad |x| \leqslant \sin\alpha. \quad (86)$$

VIII. APLICAȚII NUMERICE — INTERPRETAREA CRITICĂ A REZULTATELOR

Reducerea problemei la ecuația integrodiferențială a fost făcută în ipoteza că parametrul de stratificare δ este mic. Dezvoltările de mai sus nu permit să dăm o limitare superioară a acestui parametru. De aceea se impun unele verificări numerice.

Însăși rezolvarea ecuației integrodiferențiale este aproximativă. Rezultatele depind de numărul de termeni reținuți în soluția sub formă de sumă (78) ca și de poziția punctelor în care se scriu ecuațiile sistemului. Metoda lui Glauert este deficitară în ceea ce privește aprecierea erorii la rezolvarea ecuației integrodiferențiale a lui Prandtl. Și din acest punct de vedere este necesară compararea rezultatelor numerice cu anumite valori etalon cum sînt cele obținute cu o precizie remarcabilă pe calculator, pornind de la formulele integrale ale Bentwich, în anumite puncte din domeniul de curgere [2].

În prima etapă au fost efectuate calcule pentru două stratificări $\delta = 0{,}2$ ($\alpha = 0{,}6435$) și $\delta = 0{,}4$ ($\alpha = 0{,}9273$) la diferite valori ale parametrului $m(2\,;20\,;200)$. Dezvoltarea (78) a fost limitată la trei termeni $J = 3$. Punctelor $\sigma_1 = \frac{\pi}{6}$, $\sigma_2 = \frac{\pi}{3}$ și $\sigma_3 = \frac{\pi}{2}$ deduse din (80) le corespund prin transformarea (74) punctele $X_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $X_2 = \frac{1}{2}$, respectiv $X_3 = 0$. În aceste puncte s-au evaluat funcțiile $G(X, \alpha)$ și $E(X, \alpha)$ din (67) și (68) și apoi s-a scris sistemul (79). Din rezolvarea lui au rezultat coeficienții A_1, A_3 și A_5 și cu prima relație (84) s-a calculat B_0.

În conformitate cu (85), B_0 este chiar corecția adusă vitezei în centrul liniei de separare și poate constitui un indicator al gradului de aproximare obținut prin metoda propusă. La cele două stratificări abaterea față de valoarea etalon $\mathcal{V}_2^B(0)$ din lucrarea [2] este sub 1 %.

În a doua etapă s-a realizat un progam de calcul pentru mai multe stratificări δ (0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4), diferite valori ale parametrului m (2 ; 20 ; 50 ; 100) și un număr variabil de termeni ai dezvoltării J(3 ; 4 ; 6 ; 16 ; 32).

Pentru un caz test $\delta = 0{,}2$ $m = 20$ în tabelul 1 se dau valorile coeficienților A_{2j-1} și B_0 amplificate cu 10^3. În ultima coloană se găsește eroarea în procente $\Delta\mathcal{V}_2(0)$ % pentru corecția de viteze în mijlocul liniei de separare $\mathcal{V}_2(0) = B_0$ față de valoarea considerată exactă din lucrarea [2] și anume $\mathcal{V}_2^B(0) = 0{,}207322$.

Din punctul de vedere al corecției $\mathcal{V}_2(0)$, utlilizarea unui număr mare de termeni în dezvoltare (J mare) nu este justificată. Așa se explică rezultatele foarte bune obținute în prima etapă, a calculelor manuale, cînd din motiv de comoditate s-a utilizat trunchierea cu $J = 3$.

Pentru a aprecia gradul de aproximare pe suprafața de separare la diferite valori ale parametrului de stratificare δ, vom prezenta rezultatele obținute la valoarea parametrului $m = 20$.

Tabelul 1

Coeficienții dezvoltării funcției corecție, valoarea corecției în centrul liniei de separare și eroarea procentuală (valori amplificate cu 10^3)

J	A_1	A_3	A_5	A_7	A_9	A_{11}	A_{13}	A_{15}	B_0	$\Delta V_2(0)$ %
3	53,56306	1,59388	0,19224						208,646	0,64
4	53,62052	1,66849	0,30042	0,05420					208,793	0,71
6	53,64298	1,69609	0,33576	0,10381	0,03594	0,00851			208,825	0,72
16	53,64409	1,69762	0,33812	0,10757	0,04190	0,01794	0,00789		208,824	0,72
32	53,64261	1,69598	0,33644	0,10585	0,04014	0,01617	0,00610	0,00151	208,824	0,72

Fie o diviziune a liniei de separare C_0 în opt intervale echidistante. Nodurile

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{4}\sin\alpha,\ x_3 = \frac{1}{2}\sin\alpha,\ x_4 = \frac{3}{4}\sin\alpha,\ x_5 = \sin\alpha \quad (87)$$

vor servi drept „puncte de control" pentru valorile aproximate ale corecției $V_2(x)$. Acestor puncte le corespund pe axa OX în conformitate cu (86) valori X_s ($s = 1, 2 \ldots 5$) care diferă de la o stratificare la alta, așa cum se vede în tabelul 2.

Pentru șase stratificări diferite ($\delta = 0{,}1$ 0,2 0,3 0,4 0,5 0,8) s-a calculat funcția corecție prin metoda expusă, cu $J = 3$ (trei termeni polinominali) dar și cu $J = 4$ (patru termeni polinomiali). Valorile obținute $\mathcal{V}_2^{J=3}(X_s)$, respectiv $\mathcal{V}_2^{J=4}(X_s)$ s-au comparat cu vlorile $V_2^B(X_s)$ din aceleași puncte, considerate ca exacte ([2] tabelul 6) și s-au calculat abaterile. Rezultatele se găsesc în tabelul 3.

Tabelul 2

Abscisele X_s corespunzătoare punctelor de control de pe linia de separare C_0

δ	α	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0,1	0,4510	0	0,28969	0,56584	0,81308	1
0,2	0,6435	0	0,31060	0,59850	0,84071	1
0,3	0,7954	0	0,32926	0,62644	0,86244	1
0,4	0,9273	0	0,34731	0,65233	0,88104	1
0,5	1,0472	0	0,36540	0,67722	0,89754	1
0,8	1,3649	0	0,42418	0,75036	0,93844	1
1	1,5708	0	0,47059	0,80000	0,96000	1

Tabelul 3

Valori ale corecției $\mathcal{V}_2$ calculate cu metoda propusă în puncte de control ale suprafeței de separare și abaterile lor față de valorile V_2^B considerate exacte

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\delta = 0,1$	V_2^B	0,150592	0,144648	0,125841	0,089602	0
	$V_2^{J=3}$	0,151611	0,145730	0,127216	0,091849	0
	$V_2^{J=4}$	0,151592	0,145712	0,127172	0,091766	0
	$\Delta V_2^{J=3}$ %	0,68	0,75	1,09	2,51	0
	$\Delta V_2^{J=4}$ %	0,66	0,74	1,06	2,42	0
$\delta = 0,2$	V_2^B	0,207322	0,198671	0,171532	0,120263	0
	$V_2^{J=3}$	0,208646	0,199927	0,173086	0,122535	0
	$V_2^{J=4}$	0,208793	0,200098	0,172989	0,122910	0
	$\Delta V_2^{J=3}$ %	0,64	0,63	0,91	1,89	0
	$\Delta V_2^{J=4}$ %	0,71	0,72	0,85	2,20	0
$\delta = 0,3$	V_2^B	0,239867	0,229258	0,196224	0,134987	0
	$V_2^{J=3}$	0,241558	0,230863	0,197385	0,136039	0
	$V_2^{J=4}$	0,241872	0,230910	0,197262	0,137091	0
	$\Delta V_2^{J=3}$ %	0,70	0,70	0,59	0,78	0
	$\Delta V_2^{J=4}$ %	0,84	0,72	0,53	1,56	0
$\delta = 0,4$	V_2^B	0,258475	0,246383	0,208986	0,140857	0
	$V_2^{J=3}$	0,260722	0,247734	0,209225	0,139659	0
	$V_2^{J=4}$	0,261169	0,248199	0,209118	0,141703	0
	$\Delta V_2^{J=3}$ %	0,87	0,55	0,11	—0,85	0
	$\Delta V_2^{J=4}$ %	1,04	0,74	0,06	0,60	0
$\delta = 0,5$	V_2^B	0,267420	0,254226	0,213662	0,140943	0
	$V_2^{J=3}$	0,270590	0,255768	0,212561	0,136750	0
	$V_2^{J=4}$	0,271121	0,256295	0,212519	0,139058	0
	$\Delta V_2^{J=3}$ %	1,18	0,61	—0,51	—2,97	0
	$\Delta V_2^{J=4}$ %	1,38	0,81	—0,53	—1,34	0
$\delta = 0,8$	V_2^B	0,255735	0,241129	0,196901	0,120980	0
	$V_2^{J=3}$	0,263844	0,244036	0,189333	0,105556	0
	$V_2^{J=4}$	0,264298	0,244389	0,189612	0,107878	0
	$\Delta V_2^{J=3}$ %	3,17	1,20	—3,84	—12,75	0
	$\Delta V_2^{J=4}$ %	3,35	1,35	—3,70	—10,83	0

În centrul suprafeței de separare ($x_1 = X_1 = 0$) abaterea crește de la 0,68 % pentru $\delta = 0{,}1$, la 1,18 % pentru $\delta = 0{,}5$ și ajunge 3,17 % pentru $\delta = 0{,}8$. Dar cele mai mari abateri rezultă spre extremitatea intervalului (prunctul x_4). Pentru $\delta = 0{,}5$ abaterea rămîne și aici în modul sub 3 %, dar pentru $\delta = 0{,}8$ depășește 12 %.

Calculele numerice au arătat că prin metoda expusă se obțin rezultate foarte bune pentru valori ale parametrului de stratificare pînă la 0,5. Ele rămîn în limite acceptabile pînă spre valoarea 0,8.

Rezultatul cel mai important al metodei îl reprezintă însă obținerea formei (83) sub care poate fi scrisă funcția corecție pe linia de separare a lichidelor într-o gamă destul de largă a parametrului δ, formă care se va dovedi avantajoasă pentru calculul debitelor.

Primită la redacție la 24 aprilie 1982

ASUPRA UNEI METODE DE CALCUL A FUNCȚIEI LUI CIAPLÎGHIN

de IU. V. SUNGURȚEV
Institutul politehnic din Novopoloțk, U.R.S.S.

Se examinează o metodă de calcul al seriilor hipergeometrice cu ajutorul transformării neliniare a lui Shanks. Această metodă are un grad înalt de eficacitate și, folosind un timp de calculator relativ mic, permite să se găsească cu mare precizie valorile caracteristicilor integrale în problemele de jeturi gazoase.

1°. Teoria jeturilor gazoase subsonice privește mișcările plane irotaționale ale gazelor ideale supuse legii adiabatice de variație a presiunii. Luînd drept sistem inițial sistemul format din două ecuații neliniare cu derivate parțiale și anume ecuația de continuitate și ecuația de irotaționalitate și trecînd la planul hodografic, S.A. Ciaplîghin [1] a transformat acest sistem inițial într-o ecuație liniară de ordinul doi pentru funcția de curent

$$4\tau^2(1-\tau)\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}+4\tau[1+(\beta-1)\tau]\frac{\partial\psi}{\partial\tau}+[1-(2\beta+1)\tau]\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=0, \quad (1.1)$$

unde τ și θ sînt variabilele lui Ciaplîghin; $\beta=\dfrac{1}{\varkappa-1}$, iar $\varkappa=\dfrac{C_P}{C_U}$ este raportul căldurilor specifice.

S. A. Ciaplîghin găsește soluții particulare ale ecuației (1.1) sub forma

$$\psi_n(\tau,\theta)=z_n(\tau)\sin(2n\theta+\alpha_n),$$

pentru care ecuația (1.1) se reduce la o ecuație diferențială ordinară pentru funcția lui Ciaplîghin $z_n(\tau)$,

$$\tau^2(1-\tau)z_n''(\tau)+\tau[1+(\beta-1)\tau]z_n'(\tau)-n^2[1-(2\beta+1)\tau]z_n(\tau)=0. \quad (1.2)$$

Punînd $z_n(\tau)=\tau^n y_n(\tau)$, ajungem la ecuația hipergeometrică pentru determinarea funcției $y_n(\tau)$

$$\tau(1-\tau)y_n''(\tau)+[2n+1+(\beta-2n-1)\tau]y_n'(\tau)+\beta n(2n+1)y_n(\tau)=0 \quad (1.3)$$

Folosind notațiile lui Gauss, una din integralele ecuației (1.3) are forma [2]

$$y_n(\tau)=F(a_n,b_n,2n+1,\tau), \quad (1.4)$$

unde funcția F este seria hipergeometrică

$$F=1+\frac{a_n b_n}{1!(2n+1)}\tau+\frac{a_n(a_n+1)\,b_n(b_n+1)}{2!(2n+1)(2n+2)}\tau^2+\ldots, \quad (1.5)$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 6, 1982, P. 654–658

iar mărimile a_n și b_n se determină din formulele

$$a_n + b_n = 2n - \beta, \quad a_n b_n = -\beta n(2n + 1). \tag{1.6}$$

Se știe că, pentru anumite valori ale indicelui n, funcția hipergeometrică $y_n(\tau)$ are formă finită. De exemplu

$$y_{1/2}(\tau) = F(-\beta, 1, 2, \tau) = \frac{1 - (1 - \tau)^{\beta+1}}{(\beta + 1)\tau}.$$

Dacă considerăm doar curgerile gazelor cu $\beta = 2{,}5$, atunci se pot indica astfel de valori ale indicelui n pentru care $y_n(\tau)$ este fie polinom finit, fie că are formă o rațională ca aceea pentru $n = 1/2$. S. A. Ciaplîghin a stabilit că

$$y_1(\tau) = (32 - 80\tau + 70\tau^2 - 21\tau^3)/32. \tag{1.7}$$

De problema pentru care alte valori ale indicelui n funcția $y_n(\tau)$ ia formă finită s-a ocupat L. N. Sretenskii [3]. El a găsit că pentru $n = \frac{5}{2}$, 6, 104, 589,... seria hipergeometrică (1.5) devine polinom, iar pentru $n = 21/2$, 25, 119/2,... funcția $y_n(\tau)$ are formă rațională. În lucrarea sa Sretenskii nu dă forma funcției $y_n(\tau)$ pentru indicii indicați. Să scriem aici două cele mai simple dintre funcțiile menționate

$$y_{5/2}(\tau) = 1 - \frac{25}{4}\tau + \frac{425}{28}\tau^2 - \frac{8075}{448}\tau^3 + \frac{8075}{768}\tau^4 - \frac{7429}{3072}\tau^5, \tag{1.8}$$

$$y_6(\tau) = 1 - 15\tau + \frac{5535}{56}\tau^2 - \frac{5289}{14}\tau^3 + \frac{238\,005}{256}\tau^4 -$$

$$- \frac{6\,711\,741}{4352}\tau^5 + \frac{60\,902\,835}{34816}\tau^6 - \frac{26\,101\,215}{19456}\tau^7 + \frac{830018637}{1245184}\tau^8 -$$

$$- \frac{241\,539\,815}{1\,245\,184}\tau^9 + \frac{13\,174\,899}{524\,288}\tau^{10}. \tag{1.9}$$

2°. Pentru a efectua calculele numerice după formulele care determină caracteristicile cantitative în problemele de jeturi gazoase este necesar să avem la dispoziție valorile primei și ale celei de-a doua integrale $z_n(\tau)$ și, respectiv $J_n(\tau)$ ale ecuației lui Ciaplîghin (1.2) și de asemenea ale derivatei $z_n'(\tau)$ și ale derivatei logaritmice $x_n(\tau) = \frac{\tau}{n}\frac{z_n'(\tau)}{z_n(\tau)}$ a funcției lui Ciaplîghin. Adică este necesar să dăm valorile exacte ale seriei hipergeometrice (1.5) pentru diferiți τ și n.

Cunoscutele tabele ale funcțiilor $z_n(\tau)$ și $z'_n(\tau)$, publicate de Fergusson și Lighthill [4], au în domeniul vitezelor subsonice o cantitate insuficientă de noduri. În aceste tabele se dau valorile funcțiilor pentru $\tau = 0{,}02\ (0{,}02)\ 0{,}5$ și $n = 0{,}5(0{,}5)7{,}5$.

Deoarece existența unor tabele ale funcțiilor lui Ciaplîghin mai detaliate în domeniul subsonic ($\tau \leqslant 1/6$) adesea simplifică mult calculele numerice după formulele exacte ale teoriei jeturilor gazoase, au fost publicate tabele ale funcțiilor lui Ciaplîghin [5] pentru nodurile

$$\tau = 1/150(1/150)1/6 \text{ și } n = 1/2(1/2)20.$$

Din păcate trebuie avut în considerație faptul că existența unor tabele oricît de detaliate ale funcției lui Ciaplîghin nu poate rezolva pînă la capăt o problemă dată, deoarece întotdeauna există probleme în care trebuie să se facă calcule pentru valori ale indicelui n care nu se găsesc în tabelele pe care le avem la dispoziție.

Ieșirea din această situație constă în elaborarea unor algoritmi efectivi de calcul al seriilor hipergeometrice pentru valori mici ale indicelui $n \leqslant 15$ și în deducerea unor formule asimptotice comode pentru funcția lui Ciaplîghin pentru $n > 15$. Așa cum arată experiența, această cale de rezolvare a problemei este cea mai acceptabilă. Ea permite ca, cu consum mic de timp de mașină, să efectuăm calcule numerice detaliate după formulele exacte ale teoriei jeturilor gazoase.

Înainte de a trece la descrierea modalităților de calcul al seriilor hipergeometrice, ne vom opri mai întîi asupra cercetării unora dintre proprietățile lor.

Analiza seriei (1.5) arată că coeficienții săi numerici au valori mari și de aceea seria converge încet. Sumarea directă a seriei nu duce la rezultate satisfăcătoare din cauza necesității sumării unui număr mare de termeni, ceea ce duce la acumularea erorilor de calcul, acumulare care ne îndepărtează de rezultat.

Afară de aceasta, seriile de forma (1.5) au proprietatea de a fi nestabile din punct de vedere al semnului termenului șirului dacă la început această serie își schimbă semnul, începînd de la un anumit termen, ea are semn constant. Să analizăm mai detaliat această proprietate a seriei.

Din formula (1.5) se vede că al k-lea termen al seriei (dacă numărul $k = 1$ este atribuit termenului al treilea) se obține din cel anterior prin nmulțirea lui cu

$$\frac{(a_n + k)\,(b_n + k)}{(k+1)\,(2n+k+1)}\,\tau = \frac{k^2 + k(2n - \beta) - \beta n(2n+1)}{(k+1)(2n+k+1)}\,\tau.$$

Semnul acestui factor determină comportarea seriei hipergeometrice. Valoarea celei mai mari rădăcini a ecuației de gradul doi (pentru $\beta = 2{,}5$),

$$k^2 + k(2n - \beta) - \beta n(2n+1) = 0,$$

arată lungimea segmentului pe care seria hipergeometrică (1.5) are semn variabil. De exemplu, pentru $n = 15$, lungimea acestui segment este de 25 de termeni. În toate cazurile cînd rădăcina este un număr întreg, seria (1.5) devine polinom.

3°. Să trecem, în sfîrșit, la prezentarea modalităților de sumare a seriilor hipergeometrice de forma (1.5). După cum s-a menționat, astfel de serii converg încet de aceea este necesară o metodă de creștere a convergenței lor. Una dintre aceste metode este metoda lui Shanks.

În lucrarea lui Shanks D. [6] se consideră o familie de transformări neliniare a șirurilor în șiruri. În cel mai simplu caz particular din această familie rezultă formula

$$e(S_n) = \frac{S_{n-1} S_{n+1} - S_n^2}{S_{n-1} + S_{n+1} - 2S_n}, \tag{3.1}$$

unde $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ este suma parțială a unei serii sau un element al șirului numeric $\{S_n\}$.

Transformarea (3.1) a fost aplicată de D. Shanks și de alți autori la tratarea șirurilor încet convergente sau chiar divergente, deoarece transformarea (3.1) poate transforma un șir slab convergent într-unul rapid convergent și unul divergent într-unul convergent.

În lucrarea [6] este dat un mare număr de exemple care arată înalta eficacitate a transformărilor neliniare și, în particular, a transformării (3.1).

Pentru alcătuirea tabelelor [5] ca și pentru efectuarea calculelor numerice după formulele exacte ale teoriei jeturilor gazoase s-a aplicat următorul algoritm, partea cu semn variabil a seriei hipergeometrice (1.5) s-a sumat direct, iar mărimea restului cu semn constant s-a determinat aproximativ cu ajutorul transformării (3.1). De fiecare dată a fost supus transformării un segment de nouă termeni din restul cu semn constant. Astfel, valorile obținute pentru sumă au nu mai puțin de opt cifre semnificative sigure. Calculele făcute pentru tabelul [5] au confirmat valorile corespunzătoare ale funcțiilor $z_n(\tau)$ și $z_n'(\tau)$, date în tabelele [4].

Pentru calculul caracteristicilor integrale ale curgerilor gazoase după formulele exacte, după ce sînt calculate funcțiile lui Ciaplîghin, conținute în aceste formule, din nou se aplică transformarea neliniară a lui Shanks. Astfel, se obține o exactitate foarte mare a calculelor pentru un volum mic de calcul.

În cazurile cînd se cere să calculăm valorile funcțiilor lui Ciaplîghin cu indici n mari, este convenabil să folosim formulele [7].

$$z_n(\tau) = \frac{(1-\tau)^{\beta/2+1/4}}{(1-\tau/\tau_*)^{1/4}} e^{2nS(\tau)}, \tag{3.2}$$

$$z_n'(\tau) = \frac{n}{\tau}(1-\tau)^{\beta/2-1/4}(1-\tau/\tau_*)^{1/4} e^{2nS(\tau)}, \tag{3.3}$$

unde

$$S(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{\tau_*}} \operatorname{arth} \sqrt{\tau_*} - \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\sqrt{\tau_*}} \operatorname{arth} \sqrt{\tau_*} \left(\frac{1-\tau/\tau_*}{1-\tau}\right)^{1/2} -$$

$$- \operatorname{arth} \left(\frac{1-\tau/\tau_*}{1-\tau}\right)^{1/2}.$$

În calculele obișnuite, cînd se consideră mișcarea unui gaz biatomic, în formulele (3.2), (3.3) trebuie să punem $\beta = 2{,}5$ și $\tau_* = 1/6$.

Primită la redacție la 24 februarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. S. A. CIAPLÎGHIN, *O gazovyh strujah*, Moskva, 1902.
2. E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge University Press, New York, 1927.
3. L. N. SRETENSKIJ, *O funkcijah Čaplygina*, Prikl. Mat. Mec., **23**, *3* (1959).
4. D. F. FERGUSSON, M. J. LIGHTHILL, *The hodograph transformations in transonic flow*, IV, Tables, Proc. Roy. Soc., **192 A** (1947).
5. IU. V. SUNGURȚEV, S. V. FALCOVIC, *Tablicy Funkcij Čaplygina*, Moskva, VINITI, N 2489—74 Dep. 19.09.74.
6. D. SHANKS, *Non-linear transformations of divergent and slowly convergent sequences*, J. Math. and Phys., **34** (1955).
7. S. K. ASLANOV, *Asimptotica funkcij Čaplygina i ih proizvodnyh*, Prikl. Mat. Mec., **21**, *2* (1957).

VIBRAȚII NELINIARE ALE ELEMENTELOR CINEMATICE NERECTILINII ALE MECANISMELOR PLANE

de M. BUCULEI, D. MARGHITU
Universitatea din Craiova

Folosind principiul variațional al lui Hamilton se deduc ecuații neliniare în deplasări pentru vibrațiile elementelor cinematice tip placă plană subțire și bară curbă.

1. INTRODUCERE

În [4], [5] s-au dedus ecuațiile de mișcare neliniare pentru elementele cinematice rectilinii, introducînd vectori vîrtej în fiecare punct al mediului continuu. Ecuațiile deduse în [4] formează un sistem neliniar decuplat în deplasări elastice, acest sistem decuplat fiind o formă aproximativă a sistemului dedus în [5]. În cele ce urmează se deduc ecuațiile de mișcare neliniare de deplasări pentru elementele cinematice tip „placă plană subțire" și „bară curbă plană".

2. ECUAȚII DE MIȘCARE NELINIARE PENTRU BARE CURBE PLANE

Se consideră o bară curbă plană omogenă, cu secțiunea transversală constantă (fig. 1.).

Fie $[\bar{\tau}\,;\,\bar{\nu}\,;\,\bar{\beta}]$ triedrul Frenet atașat axei barei la abscisa curbilinie s, $s \in [0, L]$. Deplasarea elastică a punctului $M(s)$ este

$$\bar{u}(s, t) = u_1(s, t)\bar{\tau} + u_2(s, t)\bar{\nu}. \tag{1}$$

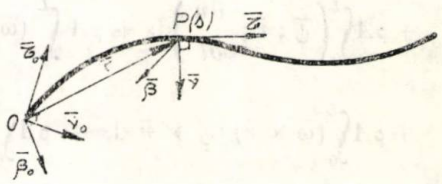


Fig. 1. — Bară curbă plană.

Rototranslația barei se consideră plană, planul acesteia coincizînd cu planul barei. Fie $[\bar{\tau}_0\,;\,\bar{\nu}_0\,;\,\bar{\beta}_0]$ triedrul Frenet corespunzător abscisei $s = 0$.

Fie

$\bar{\omega}(t) = \omega(t)\bar{\beta}_0$ — viteza unghiulară; A — aria secțiunii transversale; $\bar{a}_0 = a_{01}(t)\bar{\tau}_0 + a_{02}(t)\bar{\nu}_0$ — accelerația extremității O; $\bar{\varepsilon}(t) = \varepsilon(t)\bar{\beta}_0$ — accelerația unghiulară; $\bar{r}(s) = x(s)\bar{\tau}_0 + y(s)\bar{\nu}_0$ — vectorul de poziție al unui punct al axei barei, funcțiile $x(s)$ și $y(s)$ fiind cunoscute a priori; M — masa barei.

Se poate scrie

$$\bar{u}(s, t) = [u_1(s, t)K_{11}(s) - u_2(s, t)K_{12}(s)]\bar{\tau}_0 + [u_1(s, t)K_{12}(s) + u_2(s, t)K_{11}(s)]\bar{\nu}_0. \tag{2}$$

unde

$K_{11} = \cos\alpha$; $K_{12} = \sin\alpha$; $\alpha = \alpha(s) = \sphericalangle(\bar{\tau}_0; \bar{\tau}(s))$ — unghiul de afinitate al axei barei.

Introducînd un vector vîrtej pentru fiecare punct al barei, se obține pentru energia cinetică expresia următoare:

$$T = \frac{M\bar{v}_0^2}{2} + \frac{\rho A}{2}\int_0^L [(\bar{\omega}\times\bar{r})^2 + (\bar{\psi}\times\bar{r})^2 +$$

$$+ 2(\bar{\omega}\times\bar{r})(\bar{\psi}\times\bar{r})]ds + \frac{\rho A}{2}\int_0^L [(\bar{\omega}\times\bar{u})^2 + (\bar{\psi}\times\bar{u}) +$$

$$+ 2(\bar{\omega}\times\bar{u})(\bar{\psi}\times\bar{u})]ds + \frac{\rho A}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)^2 ds +$$

$$+ \rho A\int_0^L (\bar{v}_0; \bar{\omega}; \bar{r})ds + \rho A\int_0^L (\bar{v}_0; \bar{\psi}; \bar{r})\,ds +$$

$$+ \rho A\int_0^L \bar{v}_0\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\,ds + \rho A\int_0^L (\bar{v}_0; \bar{\omega}; \bar{u})\,ds +$$

$$+ \rho A\int_0^L (\bar{v}_0; \bar{\psi}; \bar{u})ds + \rho A\int_0^L \left(\bar{\omega}; \bar{r}; \frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)ds +$$

$$+ \rho A\int_0^L \left(\bar{\psi}; \bar{r}; \frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)ds + \rho A\int_0^L (\bar{\omega}\times\bar{r})(\bar{\omega}\times\bar{u})\,ds +$$

$$+ \rho A\int_0^L (\bar{\omega}\times\bar{r})(\bar{\psi}\times\bar{u})ds + \rho A\int_0^L \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}; \bar{\omega}; \bar{u}\right)ds + \qquad (3)$$

$$+ \rho A\int_0^L (\bar{\psi}\times\bar{r})(\bar{\psi}\times\bar{u})ds + \rho A\int_0^L (\bar{\psi}\times\bar{r})(\bar{\omega}\times\bar{u})ds +$$

$$+ \rho A\int_0^L \left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}; \bar{\psi}; \bar{u}\right)ds,$$

unde ρ este masa specifică a barei:

$$\bar{\psi}(s,t) = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{u} = \frac{1}{2}\left[\left(K'_{12}\frac{\partial u_1}{\partial t} + K'_{11}\frac{\partial u_2}{\partial t} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + K_{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial s\partial t} + K_{11}\frac{\partial^2 u_2}{\partial s\partial t}\right)\varphi_1(s) - \left(K'_{11}\frac{\partial u_1}{\partial t} -\right.\right.$$

$$- K'_{12} \frac{\partial u_2}{\partial t} + K_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial s \partial t} - K_{12} \frac{\partial^2 u_2}{\partial s \partial t} \Big) \varphi_2(s) \Big], \tag{4}$$

$$\varphi_1(s) = \frac{\partial s}{\partial x}; \quad \varphi_2(s) = \frac{\partial s}{\partial y}. \tag{5}$$

Lucrul mecanic de deformație este [3]

$$L_d = \frac{1}{2} EA \int_0^L \left(\frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 ds + \frac{1}{2} E \int_0^L \left(R \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} - \frac{\partial u_1}{\partial s} \right)^2 I_2(s) ds -$$

$$- E \int_0^L \frac{\partial u_1}{\partial s} \left(R \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} - \frac{\partial u_1}{\partial s} \right) \frac{I_1(s)}{R^2} ds, \tag{6}$$

unde

E reprezintă modulul Young; $I_1(s)$, $I_2(s)$ — momentele de inerție ale unei secțiuni în raport cu Ox și Oy; $R(s)$ este raza de curbură a axei barei.

Variația lucrului mecanic al forțelor exterioare este

$$\delta L_{ext} = \int_0^L \bar{\varphi} \, \delta \bar{u} ds = \int_0^L X \, \delta u_1 ds + \int_0^L Y \, \delta u_2 ds, \tag{7}$$

unde

$\bar{\varphi} = X\bar{\tau} + Y\bar{\nu}$ este forța exterioară pe unitatea de lungime a barei.

Pentru deducerea ecuațiilor de mișcare se folosește principiul variațional al lui Hamilton.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [L_d - T - L_{ext}) \, dt = 0. \tag{8}$$

Introducînd (3), (6), (7) în (8), ținînd cont de condițiile de sincronism și de condițiile la limită frecvente, se obține, după integrări prin părți succesive, sistemul în deplasări elastice:

$$\frac{\rho A}{2} Q_2 Q_4 \frac{\partial^4 u_1}{\partial s^2 \partial t^2} u_1 + \frac{\rho A}{4} Q_2 (x^2 + y^2) \frac{\partial^4 u_1}{\partial s^2 \partial t^2} + \frac{\rho A}{2} (Q'_4 Q'_2 +$$

$$+ 2 Q_4 Q_2 Q'_2) \frac{\partial^3 u_1}{\partial s \partial t^2} u_1 + \frac{\rho A}{2} Q_2 Q_4 \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2 \partial s} \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\rho A}{4} \times$$

$$\times [2Q_2 - Q_2 Q_3 + 2 Q_2 Q'_2 \cdot (x^2 + y^2) + 2 Q_2^2 (xx' + yy') - Q_2 Q_1 (x^2 + y^2)] \times$$

$$\times \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^2 \partial s} + \frac{\rho A}{2} Q_2 Q_4 \cdot \frac{\partial^3 u_1}{\partial s^2 \partial t} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\rho A}{4} Q_2 Q_4 (Q_2 + 2) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial s \partial t} \right)^2 +$$

$$+\frac{\rho A}{2}(2Q_1Q_2Q_4+Q_1'Q_2'+2Q_4Q_2Q_2')\frac{\partial^2 u_1}{\partial s\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\rho AQ_1Q_2\times$$

$$\times\frac{\partial^2 u_1}{\partial s\partial t}u_1+\frac{\rho A}{2}(2\omega Q_2+Q_2')\frac{\partial^2 u_1}{\partial s\partial t}u_1+\rho A\omega Q_2(2Q_4+s)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 u_1}{\partial t\partial s}+\frac{\rho A}{2}Q_1Q_2Q_4\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial s}+\frac{\rho A}{2}Q_1Q_2\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\frac{\partial u_1}{\partial s}u_1+$$

$$+\frac{\rho A}{4}(Q_1'Q_2+Q_1Q_2'-Q_1^2)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}u_1^2+\frac{\rho A}{2}(Q_1'Q_2Q_4+Q_1Q_2'Q_4+$$

$$+Q_1^2Q_4)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}u_1+\frac{\rho A}{4}[2(xx'+yy')\cdot Q_1Q_2+(x^2+y^2)\cdot(Q_1'Q_2+$$

$$+Q_1Q_2')-Q_1^2(x^2+y^2)+2Q_2'-4Q_1Q_3-4]\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-E\Big((A+I_2+$$

$$+2\frac{I_1}{R^2}\Big)\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}+\frac{\rho A}{4}[2(Q'Q_2Q_4+Q_1Q_2'Q_4+Q_1Q_2Q_4')+$$

$$+Q_1^2Q_4]\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2+\frac{\rho A}{2}Q_1Q_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)+\frac{\rho A}{4}[2(Q_1'Q_2+$$

$$+Q_1Q_2')+Q_1^2]\left(\frac{(\partial u_1}{\partial t}\right)^2u_1+\frac{\rho A}{2}Q_2'\frac{\partial u_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial s}+\rho AQ_2'\omega\frac{\partial u_1}{\partial t}u_1+$$

$$+\rho A\omega(Q_2Q_4'+Q_2'Q_4)\frac{\partial u_1}{\partial t}+\Big[\rho AQ_2\omega^2(Q_4+1)-E(I_2'+$$

$$+2\frac{I_1'R-2RI_1}{R^3}\Big)\Big]\frac{\partial u_1}{\partial s}+\frac{\rho A}{2}\omega^2(Q_2'-Q_1)u_1^2+\rho A[\omega'(Q_2'Q_4+$$

$$+Q_2Q_4'-Q_1Q_4)+\omega^2]u_1+\frac{\rho A}{2}\}\omega^2[Q_2(x^2+y^2)+2Q_2(xx'+yy'-$$

$$-\omega'Q_1(x^2+y^2)-Q_1(v_{02}'x-v_{01}y)+Q_2(v_{02}'x'-v_{01}'y'+Q_2'\times$$

$$\times(v_{02}'x-v_{01}'y)-2K_{11}v_{01}'-2K_{12}v_{02}'+2(K_{11}v_{02}'-K_{12}v_{01}')\cdot(Q_2'-$$

$$-Q_1)+Q_2(K_{11}'v_{02}-K_{12}v_{01}'-2\omega'Q_8+2\omega^2Q_4)\}+X=0; \qquad (9)$$

$$\frac{\rho A}{2} Q_6 Q_8 \frac{\partial^4 u_2}{\partial t^2 \partial s^2} u_2 + \frac{\rho A}{4} Q_6^2 (x^2 + y^2) \frac{\partial^4 u_2}{\partial t^2 \partial s^2} - EIR^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} +$$

$$+ \frac{\rho A}{2} (Q_8' Q_4' + 2 Q_4 Q_4' Q_8) \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial s} u_1 + \frac{\rho A}{2} Q_6 Q_8 \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial s} \frac{\partial u_2}{\partial s} +$$

$$+ \frac{\rho A}{4} [2 Q_6 - 2 Q_6 Q_7 + 2 Q_6 Q_6' (x^2 + y^2) + 2 Q_6^2 (x x' + y y') - Q_5 Q_6 \times$$

$$\times (x^2 + y^2)] \frac{\partial^3 u_2}{\partial t^2 \partial s} + \frac{\rho A}{2} Q_6 Q_8 \frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial s^2} \frac{\partial u_2}{\partial t} - ER(2R' I_2 + R I_2') \times$$

$$\times \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} + \frac{\rho A}{4} Q_6^2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s \partial t} \right)^2 u_2 + \frac{\rho A}{4} Q_6 Q_8 (Q_6 + 2) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial s^2} \right)^2 +$$

$$+ \frac{\rho A}{2} (2 Q_5 Q_6 Q_8 + Q_8' Q_2^2 + 2 Q_8 Q_6 Q_6') \frac{\partial^2 u_2}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial t} + \rho A Q_5 Q_6 \times$$

$$\times \frac{\partial^2 u_2}{\partial s \partial t} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial t} u_2 + \frac{\rho A}{2} (2 \omega Q_6 + Q_6') \frac{\partial^2 u_2}{\partial s \partial t} u_2 + \rho A \omega Q_6 (2 Q_8 +$$

$$+ 1) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial s} + \frac{\rho A}{2} Q_5 Q_6 Q_8 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{\rho A}{2} Q_5 Q_6 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \frac{\partial u_2}{\partial s} u_2 +$$

$$+ \frac{\rho A}{4} (Q_5' Q_6 + Q_5 Q_6' - Q_5^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \cdot u_2^2 + \frac{\rho A}{2} [(Q_5' Q_6 Q_8 + Q_5 Q_6' Q_8 +$$

$$+ Q_5 Q_6 Q_8' - Q_5 Q_6') - Q_5^2 (x^2 + y^2) + 2 Q_6' - 4 Q_5 Q_7 - 4] \frac{\partial u_2}{\partial t} - E \times$$

$$\times [2(R')^2 I_2 + 2 R R'' I_2' + 4 R R' I_2' + R_2^2 I_2''] \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \right)^2 + \frac{\rho A}{2} Q_5 Q_6 \times$$

$$\times \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{\rho A}{4} [2(Q_5' Q_6 + Q_5 Q_6') + Q_5^2] \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 u_2' + \frac{\rho A}{2} Q_6' \times$$

$$\times \frac{\partial u_2}{\partial t} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} + \rho A Q_6' \omega \frac{\partial u_2}{\partial t} u_2 + \rho A \omega (Q_6 Q_8' + Q_6 Q_8) \frac{\partial u_2}{\partial t} +$$

$$+ \rho A Q_6 \omega^2 (Q_8 + 1) \frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{\rho A}{2} \omega' (Q_6' - Q_5') u_2^2 + \rho A [\omega' (Q_6 Q_8 +$$

$$+ Q_6Q_8' - Q_5Q_8) + \omega^2]u^2 + \frac{\rho A}{2}\{\omega'[Q_6(x^2 + y^2) + 2Q_6(xx' +$$

$$+ yy')] - \omega' Q_5(x^2 + y^2) - Q_5(v_{02}'x - v_{01}y) + Q_6(v_{02}'x' + v_{01}'y') +$$

$$+ Q_6'(v_{02}'x + v_{01}'y) + 2K_{12}v_{01}' - 2K_{11}v_{02}' - 2(K_{12}v_{02} + K_{11}v_{01}) \times$$

$$\times \omega - (K_{12}v_{02}' + K_{11}v_{01}')(Q_2' - Q_1) - Q_2(K_{12}'v_{02}' + K_{11}'v_{01}') -$$

$$- 2\omega' Q_7 + 2\omega^2 Q_8\} + Y = 0; \tag{10}$$

unde

$$\begin{aligned}
Q_1(s) &= K_{12}'(s)\varphi_1(s) - K_{11}'(s)\varphi_2(s),\\
Q_2(s) &= K_{12}(s)\varphi_1(s) - K_{11}(s)\varphi_2(s),\\
Q_3(s) &= K_{12}(s)x(s) - K_{11}(s)y(s),\\
Q_4(s) &= K_{12}(s)y(s) + K_{11}(s)x(s),\\
Q_5(s) &= K_{11}'(s)\varphi_1(s) + K_{12}(s)\varphi_2(s),\\
Q_6(s) &= K_{11}(s)x(s) + K_{12}(s)y(s),\\
Q_7(s) &= K_{11}(s)x(s) + K_{12}(s)y(s),\\
Q_8(s) &= K_{11}(s)y(s) - K_{12}(s)x(s).
\end{aligned} \tag{11}$$

3. ECUAȚII DE MIȘCARE NELINIARE PENTRU PLĂCI PLANE SUBȚIRI ÎN MIȘCARE DE ROTOTRANSLAȚIE PLANĂ

Se consideră o placă plană subțire (fig. 2) în mișcare de rototranslație plană, planul mișcării fiind xOz.

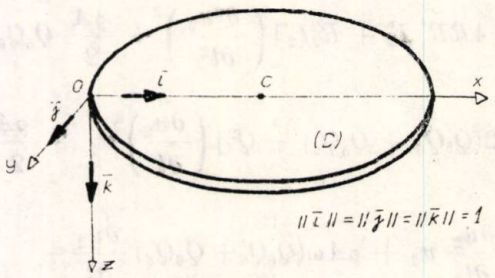


Fig. 2. — Placă plană subțire.

Deplasarea elastică transversală a unui punct oarecare al plăcii este:

$$\bar{u} = w(x, y, t)\,\bar{k}, \quad (x, y) \in D, \tag{12}$$

unde

$[\bar{v}_0; \bar{a}_0; \bar{\omega}; \bar{\varepsilon}]$ este rototranslație instantanee.

Fie

$$\bar{v}_0 = v_{0x}(t)\bar{i} + v_{0z}(t)\bar{k},$$

$$\bar{a}_0 = a_{0x}(t)\bar{i} + a_{0z}(t)\bar{k}, \tag{13}$$

$$\bar{\omega} = \omega(t)\,\bar{j}; \bar{\varepsilon} = \varepsilon(t)\,\bar{j},$$

unde

ρ_s reprezintă masa specifică superficială; M — masa plăcii; h — grosimea plăcii; ν — coeficientul Poisson de contracție transversală; $p(x, y)$ — forța exterioară pe unitatea de suprafață.

Vîrtejul local este

$$\bar{\psi}(x, y, t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\bar{i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\bar{j}. \tag{14}$$

Energia cinetică poate fi obținută substituind (12), (13), (14) în (3).

Lucrul mecanic al forțelor exterioare și lucrul mecanic de deformație este dat în [6, 2].

Introducînd în (8), folosind condițiile de sincronism și condițiile la limită frecvente se obține, după integrări repetate prin părți, ecuația neliniară:

$$\frac{3\rho_s}{4} y \frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial t^2} + \frac{\rho_s}{4} y^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} + \frac{3\rho_s}{4} x \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} +$$

$$+ \frac{\rho_s}{4} x^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{\rho_s}{2} x \cdot y \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y \partial t^2} - \frac{1}{2}\rho_s x\varepsilon +$$

$$+ \rho_s \omega^2 w + \rho_s \frac{w}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 + \frac{\rho_s}{2}\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} +$$

$$+ \frac{\rho_s w}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\right)^2 + \frac{\rho_s}{2} w \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial t^2} + \frac{\rho_s}{2} w \frac{\partial w}{\partial t} \times$$

$$\times \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\rho_s}{4} w^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\rho_s}{4} w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\rho_s}{2}\cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial y\,\partial t^2} + \frac{\rho_s}{2} w \cdot \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial y^3 \partial t} +$$

$$+ \frac{\rho_s}{4} w^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} + \rho_s \omega w \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \rho_s \varepsilon w \frac{\partial w}{\partial x} +$$

$$+ \rho_s \omega \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + \rho_s \omega \cdot w \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v_{0x} \omega \rho_s +$$

$$+ \frac{a_{01}}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \rho_s + \frac{v_{0x}}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \nabla^4 w -$$

$$- p(x, y, t) = 0. \tag{15}$$

4. CONCLUZII

Ecuaţiile deduse generalizează rezultatele obţinute în [2], [3] pentru aceleaşi tipuri de elemente cinematice. Dincolo de dificultăţile legate de rezolvarea ecuaţiilor (15), (9) şi (10), neliniarităţile introduse dau un model mai apropiat de realitatea fizică, mai ales în cazul unei deformabilităţi importante.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. M. BUCULEI, *Sur la cinématique et la cinétique des mécanismes à éléments élastiques*, Rev Roum. Sci. Techn. — Méc. appl., **24**, *2* (1979).
M. BUCULEI, *Les vibrations transversales des plaques planes minces, éléments cinématiques des mécanismes plans*, Rev. Roum. Sci.Techn-Méc. appl., **24**, *4* (1979).
3. M. BUCULEI, *Equations du mouvement des éléments curbilignes linéaire-élastiques des mécanismes plans*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. appl., **24**, *3* (1979).
4. M. BUCULEI, D. BAGNARU, *Equations non linéaires dans l'élastocinématique des mécanismes à barres*, Rev. Roum. Sci. Techn-Méc. appl., **26**, *1* (1981).
5. M. BUCULEI, D. MARGHITU, *Decoupled Nonlinear Equations in Elastokinematics of Mechanisms with Bars*, Rev. Roum. Sci.Techn-Méc. appl. (1980).
6. W. NOWACKI, *Dinamica sistemelor elastice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1969.
7. M. BUCULEI, D BAGNARU, *Vibraţii mecanice*, Repr. Univ. Craiova, 1980.

ASPECTE ALE CINEMATICII MIȘCĂRII PLAN-PARALELE A RIGIDULUI PRIVIND GENERALIZAREA CERCURILOR LUI BRESSE

de AL. POPA

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În lucrare se stabilesc ecuațiile carteziene, coordonatele centrului și raza cercurilor izocline (locul geometric al punctelor unui rigid în mișcare plan-paralelă, care la un moment dat, nu au același unghi α între viteză și accelerație) raportate la sistemul de referință xOy solidarizat cu rigidul. Se constată că rezultă o pereche de asemenea cercuri, unul corespunzător unghiului α, celălalt corespunzător suplimentului acestuia ($\pi - \alpha$). Cercurile lui Bresse reprezintă două situații limită cînd perechea de cercuri izocline se confundă într-un singur cerc. Ecuațiile stabilite sînt particularizate pentru un exemplu de calcul.

În lucrarea [1], Bresse (în 1853) pune în evidență pentru prima dată locurile geometrice ale punctelor unui rigid în mișcare plan-paralelă care au la un moment dat viteza și accelerația coliniare, respectiv ortogonale, locuri geometrice ce vor fi numite cercul inflexiunilor, respectiv cercul de rebrusment (tangențial sau de fugă) întîlnite în literatură și sub numele de cercurile lui Bresse [2, 10].

Într-o serie de lucrări ulterioare (unele din secolul trecut [2, 3, 4]) a fost reluată problema, analizîndu-se în unele din acestea și cazul locului geometric al punctelor unui rigid în mișcare plan-paralelă la care, la un moment dat, viteza și accelerația formează un unghi constant. Locul geometric este un cerc care conține centrul instantaneu de rotație și centrul accelerațiilor [3, 5, 6]. Aceste cercuri au fost numite de Jan de Vries — izocline [3], cercurile lui Bresse rezultînd ca particularizări ale acestora.

Deoarece în lucrările analizate este demonstrată existența cercurilor izocline, cel mult prin tratarea subiectului cu ajutorul numerelor complexe [3], fără a se stabili caracteristicile lor (coordonatele centrului și raza), ne propunem în lucrarea de față să determinăm ecuațiile carteziene ale acestora, raportate la sistemul de referință solidarizat cu rigidul, trecerea la sistemul de referință fix $(x_1O_1y_1)$ putîndu-se face foarte ușor. Se constată că rezultă o pereche de cercuri izocline, unul corespunzător unghiului α, celălalt corespunzător suplimentului acestuia ($\pi - \alpha$). Prin aceasta se extind unele aspecte tratate în lucrarea [10].

1. RELAȚII CINEMATICE DE BAZĂ

Fie un rigid în mișcare plan-paralelă, un sistem de referință fix $x_1O_1y_1$ și un sistem de referință solidarizat cu rigidul xOy (fig. 1).

Mișcarea rigidului este complet determinată dacă se cunosc funcțiile:

$$x_{10} = x_{10}(t)\,;\; y_{10} = y_{10}(t)\,;\; \theta = \theta(t), \tag{1}$$

care reprezintă coordonatele originii sistemului mobil solidarizat cu rigidul față de sistemul fix și unghiul între axe Ox_1' și Ox (vezi fig. 1).

Trecerea de la un sistem la altul se face prin relaţiile:

$$\bar{i}_1 = \bar{i}\cos\theta - \bar{j}\sin\theta,$$
$$\bar{j}_1 = \bar{i}\sin\theta + \bar{j}\cos\theta; \tag{2}$$

$$x_1 = x_{10} + x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y_1 = y_{10} + x\sin\theta + y\cos\theta, \tag{3}$$

în care $\bar{i}, \bar{j}, \bar{i}_1, \bar{j}_1$ sînt versorii sistemului xOy, respectiv $x_1O_1y_1$, iar x, y, x_1, y_1 sînt coordonatele unui punct curent al rigidului, faţă de cele două sisteme de referinţă.

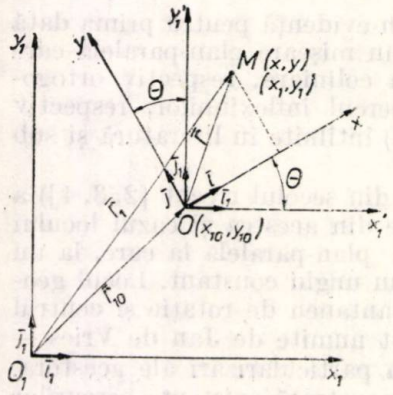


Fig. 1

Expresiile vitezei şi acceleraţiei aceluiaşi punct curent M al rigidului, raportate la cele două sisteme de referinţă, sînt:

$$\bar{v}_1 = \dot{x}_1\bar{i}_1 + \dot{y}_1\bar{j}_1 =$$
$$= (\dot{x}_{10} - \omega\cdot x\cdot\sin\theta - \omega\cdot y\cdot\cos\theta)\bar{i}_1 + \tag{4}$$
$$+ (\dot{y}_{10} + \omega\cdot x\cdot\cos\theta - \omega\cdot y\cdot\sin\theta)\bar{j}_1,$$

$$\bar{a}_1 = \ddot{x}_1\bar{i}_1 + \ddot{y}_1\bar{i}_1 =$$
$$= (\ddot{x}_{10} - \varepsilon\cdot x\cdot\sin\theta - \varepsilon\cdot y\cdot\cos\theta -$$
$$- \omega^2\cdot x\cdot\cos\theta + \omega^2\cdot y\cdot\sin\theta)\bar{i}_1 +$$
$$+ (\ddot{y}_{10} + \varepsilon\cdot x\cdot\cos\theta - \varepsilon\cdot y\cdot\sin\theta - \omega^2\cdot x\cdot\sin\theta - \omega^2\cdot y\cdot\cos\theta)\bar{j}_1, \tag{5}$$

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}\times\bar{r} = (v_{0x} - \omega\cdot y)\bar{i} + (v_{0y} + \omega\cdot x)\bar{j}, \tag{6}$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \varepsilon\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) =$$
$$= (a_{0x} - \varepsilon\cdot y - \omega^2\cdot x)\bar{i} + (a_{0y} + \varepsilon\cdot x - \omega^2\cdot y)\bar{j}, \tag{7}$$

în care $\omega = \dot{\theta}$ şi $\varepsilon = \ddot{\theta}$.

Presupunînd cunoscute funcţiile (1),

$$v_{0x} = \dot{x}_{10}\cos\theta + \dot{y}_{10}\sin\theta, \tag{8}$$
$$v_{0y} = -\dot{x}_{10}\sin\theta + \dot{y}_{10}\cos\theta;$$
$$a_{0x} = \ddot{x}_{10}\cos\theta + \ddot{y}_{10}\sin\theta,$$
$$a_{0y} = -\ddot{x}_{10}\sin\theta + \ddot{y}_{10}\cos\theta, \tag{9}$$

termenii relațiilor (6) și (7) se pot scrie sub forma:

$$v_x = \dot{x}_{10} \cos \theta + \dot{y}_{10} \sin \theta - \omega \cdot y,$$

$$v_y = - \dot{x}_{10} \sin \theta + \dot{y}_{10} \cos \theta + \omega \cdot x; \tag{10}$$

$$a_x = \ddot{x}_{10} \cos \theta + \ddot{y}_{10} \sin \theta - \varepsilon \cdot y - \omega^2 \cdot x,$$

$$a_y = - \ddot{x}_{10} \sin \theta + \ddot{y}_{10} \cos \theta + \varepsilon \cdot x - \omega^2 \cdot y. \tag{11}$$

2. CERCURILE IZOCLINE

Notînd cu α unghiul între viteza și accelerația unui punct al rigidului și punînd condiția ca acesta să fie constant, obținem

$$\bar{v} \cdot \bar{a} = \bar{v} \cdot \bar{a} \cos \alpha, \tag{12}$$

care conduce la

$$(v_x a_x + v_y a_y)^2 = (v_x^2 + v_y^2)(a_x^2 + a_y^2) \cos^2 \alpha,$$

respectiv

$$v_x^2 a_x^2 (1 - \cos^2 \alpha) + 2 v_x a_x v_y a_y (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) +$$

$$+ v_y^2 a_y^2 (1 - \cos^2 \alpha) - (v_x^2 a_y^2 + v_y^2 a_x^2) \cos^2 \alpha = 0,$$

sau

$$(v_x a_x + v_y a_y)^2 \sin^2 \alpha - (v_x a_y - v_y a_x)^2 \cos^2 \alpha = 0, \tag{13}$$

în final rezultînd:

$$(v_x a_x + v_y a_y) \sin \alpha - (v_x a_y - v_y a_x) \cos \alpha = 0, \tag{14}$$

$$(v_x a_x + v_y a_y) \sin \alpha + (v_x a_y - v_y a_x) \cos \alpha = 0. \tag{15}$$

Dacă în relațiile (14) și (15) vom impune $\alpha = \frac{\pi}{2}$, respectiv $\alpha = 0$, obținem expresii care se pot pune sub forma $\bar{v} \cdot \bar{a} = 0$, respectiv $\bar{v} \times \bar{a} = 0$. Din aceste expresii se obțin ecuațiile carteziene ale celor două cercuri ale lui Bresse, stabilite în lucrarea [10], prin înlocuirea componentelor vitezei și accelerației din relațiile (6) și (7). Rezultă că cercurile lui Bresse sînt cazuri particulare ale cercurilor izocline.

După cum s-a arătat în [10], coordonatele centrului instantaneu de rotație ,I, și ale centrului accelerațiilor, J, verifică identic ecuațiile cer-

curilor lui Bresse, deci, implicit, toate cercurile izocline au aceleași puncte de intersecție și anume centrul instantaneu de rotație I și centrul accelerațiilor J.

Prin introducerea componentelor vitezei și accelerației din relațiile (6) și (7) în relațiile (14) și (15), ecuațiile celor două cercuri izocline reunite devin:

$$(x^2+y^2)(\omega\cdot\varepsilon\cdot\sin\alpha\pm\omega^3\cos\alpha)+[(a_{0y}\omega+v_{0y}\varepsilon-v_{0x}\omega^2)\sin\alpha\mp$$

$$\mp(a_{0x}\omega-v_{0x}\varepsilon-v_{0y}\omega^2)\cos\alpha]x-[(a_{0x}\omega+v_{0x}\varepsilon+v_{0y}\omega^2)\sin\alpha\pm$$

$$\pm(a_{0y}\omega-v_{0y}\varepsilon+v_{0x}\omega^2)\cos\alpha]y+[(v_{0x}a_{0x}+v_{0y}a_{0y})\sin\alpha\pm$$

$$\pm(v_{0x}a_{0y}-v_{0y}a_{0x})\cos\alpha]=0, \tag{16}$$

relație ce mai poate fi pusă sub forma:

$$(x-x_{c_{1,2}})^2+(y-y_{c_{1,2}})^2=R_{1,2}^2, \tag{17}$$

în care

$$x_{c_{1,2}}=-\frac{(a_{0y}\omega+v_{0y}\varepsilon-v_{0x}\omega^2)\sin\alpha\mp(a_{0x}\omega-v_{0x}\varepsilon+v_{0y}\omega^2)\cos\alpha}{2(\omega\cdot\varepsilon\cdot\sin\alpha\pm\omega^3\cdot\cos\alpha)}, \tag{18}$$

$$y_{c_{1,2}}=\frac{(a_{0x}\omega+v_{0x}\varepsilon+v_{0y}\omega^2)\sin\alpha\pm(a_{0y}\omega-v_{0y}\varepsilon+v_{0x}\omega^2)\cos\alpha}{2(\omega\cdot\varepsilon\cdot\sin\alpha\pm\omega^3\cdot\cos\alpha)}, \tag{19}$$

$$R_{1,2}^2=x_{c_{1,2}}^2+y_{c_{1,2}}^2-\frac{(v_{0x}a_{0x}+v_{0y}a_{0y})\sin\alpha\pm(v_{0x}a_{0y}-v_{0y}a_{0x})\cos\alpha}{\omega\cdot\varepsilon\cdot\sin\alpha\pm\omega^3\cdot\cos\alpha}. \tag{20}$$

Indicele 1 corespunde semnului de deasupra atunci cînd în relațiile (18), (19) și (20) apar semne alternative și definește cercul izoclinelor dat de relația (14), iar indicele 2 corespunde celuilalt semn și definește cercul izoclinelor dat de relația (15).

Se poate constata că cercul izoclinelor de indice 2 corespunde locului geometric al punctelor rigidului care, la un moment dat, au unghiul între viteză și accelerație α, în timp ce cercul izoclinelor de indice 1 corespunde locului geometric al punctelor rigidului care, la un moment dat, au unghiul între viteză și accelerație $(\pi-\alpha)$. Vom putea numi astfel cele două cercuri, corespunzătoare unghiului format între viteză și accelerație, ca cercuri izocline suplimentare.

De asemenea, se poate arăta că unghiul format între razele celor două cercuri care trec prin punctele de intersecție J (sau I) este de $(\pi-2\alpha)$. Deci în afară de cercurile lui Bresse, pentru care s-a arătat că sînt ortogonale și în lucrarea [10], mai sînt ortogonale în cercurile izocline suplimentare corespunzătoare unui unghi $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

Introducînd relațiile (8) și (9) în relațiile (18), (19) și (20) se pot scrie ecuațiile cercurilor izocline suplimentare și în cazul în care sînt cunoscuți cei trei parametri indicați de relațiile (1) care definesc mișcarea plan-paralelă.

3. EXEMPLU DE CALCUL

Fie bara AB, al cărui punct A se deplasează cu viteză constantă v pe un plan orizontal și se sprijină tot timpul mișcării pe o muchie D aflată la înălțimea h față de planul orizontal. Alegînd sistemele de referință ca în figura 2, ne propunem să determinăm ecuațiile celor două cercuri izocline, particularizîndu-le pentru

$$\alpha = 50^\circ \text{ și } \theta = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

Prin derivarea relației $x_{1A} = h \operatorname{tg} \theta$ și proiectarea vitezei și accelerației originii mobile pe axele xOy (fig. 2), se ajunge la

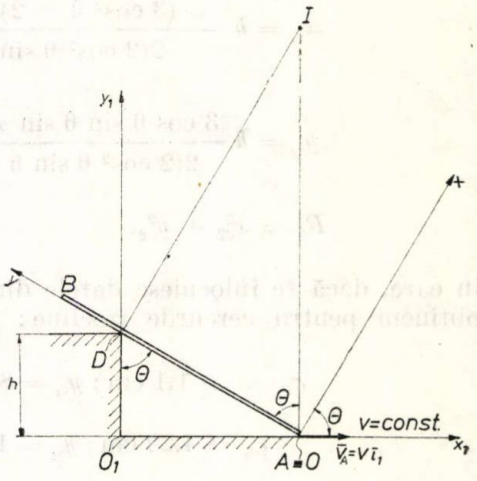


Fig. 2

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{V}{h} \cos^2 \theta,$$

$$\varepsilon = \ddot{\theta} = -\frac{V}{h} 2 \sin \theta \cos \theta \, \dot{\theta} = -2 \frac{V^2}{h^2} \cos^3 \theta \sin \theta,$$

$$v_{0x} = v \cos \theta; \; v_{0y} = -v \sin \theta,$$

$$a_{0x} = 0; \qquad a_{0y} = 0,$$

care, înlocuite în relațiile (16), conduc la

$$(x^2 + y^2)\left(-2\frac{v^3}{h^3} \cos^5 \theta \sin\theta \sin \alpha \pm \frac{v^3}{h^3} \cos^6 \theta \cos \alpha\right) +$$

$$+\left[\left(\frac{2v^3}{h^2} \cos^3 \theta \sin^2 \theta - \frac{v^3}{h^2} \cos^5 \theta\right) \sin \alpha \mp 3 \frac{v^3}{h^2} \cos^4\theta \sin \theta \cos \alpha\right] x +$$

$$+\left[3 \frac{v^3}{h^2} \cos^4\theta \sin \theta \sin \alpha \pm \left(2 \frac{v^3}{h^2} \cos^3 \theta \sin^2 \theta - \frac{v^3}{h^2} \cos^5\theta\right) \cos \alpha\right] y = 0.$$

Deci

$$x_{c_1} = h\frac{(3\cos^2\theta - 2)\sin\alpha + 3\cos\theta\sin\theta\cos\alpha}{2(-2\cos^2\theta\sin\theta\sin\alpha + \cos^3\theta\cos\alpha)},$$

$$y_{c_1} = h\frac{-3\cos\theta\sin\theta\sin\alpha + (3\cos^2\theta - 2)\cos\alpha}{2(-2\cos^2\theta\sin\theta\sin\alpha + \cos^3\theta\cos\alpha)},$$

$$R_1^2 = x_{c_1}^2 + y_{c_1}^2,$$

$$x_{c_2} = h\frac{-(3\cos^2\theta - 2)\sin\alpha + 3\cos\theta\sin\theta\cos\alpha}{2(2\cos^2\theta\sin\theta\sin\alpha + \cos^3\theta\cos\alpha)},$$

$$y_{c_2} = h\frac{3\cos\theta\sin\theta\sin\alpha + (3\cos^2\theta - 2)\cos\alpha}{2(2\cos^2\theta\sin\theta\sin\alpha + \cos^3\theta\cos\alpha)},$$

$$R_2^2 = x_{c_2}^2 + y_{c_2}^2,$$

în care, dacă se înlocuiesc datele din enunț pentru α și θ și $h = 3$ cm, obținem pentru cercurile izocline:

$$x_{c_1} = -1{,}1 \text{ cm}; \; y_{c_1} = 8{,}405 \text{ cm}; \; R_1 = 8{,}48 \text{ cm};$$

$$x_{c_2} = 4{,}22 \text{ cm}; \; y_{c_2} = 1{,}32 \text{ cm}; \; R_2 = 4{,}42 \text{ cm},$$

care sînt prezentate în figura 3.

A fost ales unghiul $\alpha = 50°$ dintr-o serie de valori cuprinse între 30° și 60°, deoarece au rezultat pentru coordonatele centrelor și razele cercurilor valori ușor de reprezentat.

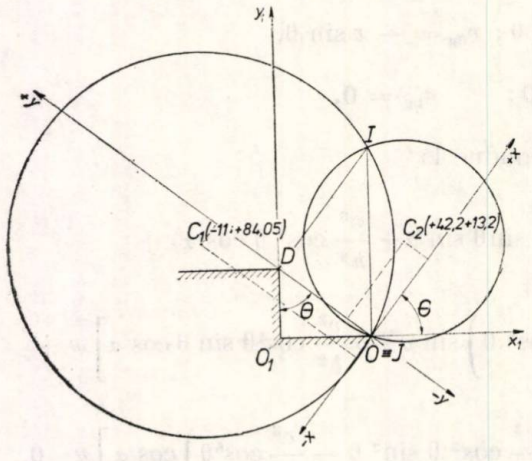


Fig. 3

În figura 3 cercul cu centrul în punctul C_2 în raza R_2 reprezintă locul geometric al punctelor solidarizate cu rigidul care la momentul corespunzător poziției $\theta = \text{arctg}\,(4/3)$ au unghiul între viteză și accelerație $\alpha = 50°$, iar cercul cu centrul în punctul C_1 și raza R_1 reprezintă locul geometric al punctelor care au unghiul între viteză și accelerație $\alpha = 130°$.

În mod similar, pentru cercul inflexiunilor avem:

$$x_{c_i} = 10 \text{ cm}; \quad y_{c_i} = -6{,}4 \text{ cm}; \quad R_i = 11{,}87 \text{ cm},$$

iar pentru cercul de rebrusment avem:

$$x_{c_r} = 2{,}4 \text{ cm}; \quad y_{c_r} = 3{,}75 \text{ cm}; \quad R_r = 4{,}45 \text{ cm},$$

care sînt reprezentate în figura 4.

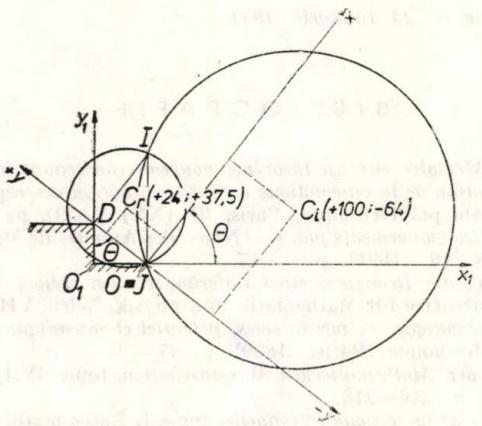


Fig. 4

Coordonatele centrelor în figurile 3 și 4 sînt în mm.

4. CONCLUZII

a) Au fost determinate ecuațiile carteziene ale cercurilor izocline (locul geometric al punctelor solidarizate cu un rigid în mișcare plan-paralelă, care la un moment dat au același unghi α între viteză și accelerație) raportate la sistemul de referință solidarizat cu rigidul. S-a stabilit că sînt perechi de cercuri izocline, unul corespunzător unghiului între viteză și accelerație α, celălalt corespunzător suplimentului acestuia $(\pi - \alpha)$, fiind numite din acest motiv în articol, ca cercuri izocline suplimentare.

b) Cele două cercuri au ca puncte de intersecție centrul instantaneu de rotație I și centrul acceleraților J.

c) Cîmpul de viteze și cîmpul de acceleraații în mișcare plan-paralelă a rigidului la un moment dat, pot fi asociate cu fascicule de perechi de cercuri izocline suplimentare, toate intersectîndu-se în cele două puncte I și J, incluzîndu-se în acestea și cercurile lui Bresse. Acestea din urmă reprezintă un caz particular, o situație limită, în care perechea de cercuri zocline suplimentare se confundă într-un singur cerc deoarece pentru

cercul de rebrusment $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și $\pi - \alpha = \frac{\pi}{2}$, iar pentru cercul inflexiunilor $\alpha = 0$ sau $\alpha = \pi$, iar $\pi - \alpha = \pi$, respectiv $\pi - \alpha = 0$). În cazul unui rigid tridimensional în mișcare plan-paralelă fasciculele de cercuri devin fascicule de cilindri circulari drepți.

d) Avînd ecuațiile carteziene se pot scrie cu ușurință ecuațiile cercurilor izocline, putîndu-se raporta fără greutate și la sistemul de referință fix.

e) Prin metoda adoptată se pot extinde aspectele tratate și la alte tipuri de mișcări.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. A. GH. BRESSE, *Mémoire sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans, et sur l'application de la cinématique a la détermination des rayons de courbure*, Journal de l'école polytechnique, Paris, **35 (XX)** (1853), p. 89—115.
2. L. LECORNU, *Sur les mouvements plans* — Nouvelles Annales de Mathématique (troisième série), Paris, **10**, (1891), p. 5—17.
3. JAN de VRIES, *Über die Bewegung eines unveränderlichen ebenen Systems in einer festen Ebene*, Monatshefte für Mathematik und physik, Wien, **VIII** (1897), p. 138—144.
4. H. POINCARÉ, *Cinématique et mécanismes, potentiel et mécanique des fluides*, Cours professé a la Sorbonne, Paris, (1899), p. 47—50.
5. * * * *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, tome IV.1 — Mechanik, Leipzig, 1901—1908, p. 216—218.
6. P. JANSSENS, *Cours de mécanique rationnelle*, tome I, Bases mathématique, Cinématique, Statique, Paris, Dunod, 1967.
7. V. VÂLCOVICI, ST. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Edit. tehnică, București, Ed. II 1963, Ed. III. 1968.
8. C. ZEVELEANU, *Mecanică teoretică*, partea a II-a, *Cinematica*, Institutul de construcții, București, 1979.
9. M. C. TOFAN, *Mecanica — Cinematică*, Universitatea din Brașov, 1981.
10. AL. POPA, *Unele aspecte ale cinematicii mișcării plan-paralele a rigidului*, Buletinul Institutului de petrol și gaze, Ploiești, **XXXIII**, *13*, (1981), p. 47—55.

CONTRIBUȚII LA CALCULUL CUPOLELOR RETICULATE*)

de N. RĂDUICĂ și M. V. SOARE
Institutul de construcții București

După o clasificare a cupolelor din bare, se descrie verificarea unei cupole reticulate de rezervor de mare capacitate, de tip semiregulat. Starea de eforturi și de deformații a fost determinată în ipotezele de încărcare simetrică și nesimetrică, ultima provenind din încărcarea cu zăpadă pe jumătate de suprafață. În baza calculului automatizat efectuat, au fost revăzute unele secțiuni de bare, cu păstrarea geometriei existente.
În partea a doua a cercetării autorii au îmbunătățit configurația geometrică a barelor și alcătuirea secțiunilor, ajungîndu-se la importante reduceri ale consumului de metal, ale prețului de cost și ale numărului de secțiuni distincte.

Studiul de față își are originea într-o lucrare de cercetare științifică avînd drept obiect determinarea stării de eforturi și de deformații într-o cupolă reticulată de rezervor de mare capacitate, proiectată, prin extrapolare, la un diametru mai mare, în baza unor proiecte mai vechi [2]. Cercetarea a avut drept rezultat consolidarea unor bare, cu respectarea geometriei adoptate anterior.

În baza rezultatelor numerice obținute, autorii au continuat studiile pentru ca, prin îmbunătățirea conformării geometrice și a modificării secțiunilor barelor, să se ajungă la optimizarea soluției. Calea urmată și rezultatele obținute, comparate cu datele inițiale, au condus la o soluție mai rațională și cu un consum de oțel mai redus, în comparație cu soluțiile aplicate pînă în prezent.

1. CLASIFICAREA CUPOLELOR RETICULATE

Clasificarea cupolelor reticulate, corespunzător conformării geometrice și a modului de alcătuire, are o influență hotărîtoare asupra metodei de calcul de adoptat. Din acest punct de vedere vom distinge două criterii de clasificare, pe care le vom discuta, pe scurt, în cele ce urmează.

a) Clasificare din punctul de vedere al conformării geometrice:
— *cupole cu configurație regulată*, la care toate fusurile sînt identice;
— *cupole cu configurație semiregulată*, la care un grup de fusuri se repetă (așa numita simetrie ciclică);
— *cupole cu configurație neregulată*.

b) Clasificare din punctul de vedere al modului de alcătuire:
— cupole reticulate la care învelitoarea este fixată de structura din bare și, astfel, conlucrează cu aceasta; o asemenea situație definește o *cupolă ortotropă cu ortotropie geometrică*;
— cupole reticulate la care învelitoarea nu este fixată de structura din bare, ea avînd doar rolul de a transmite sarcinile exterioare.

---

*) Text revăzut al unei comunicări prezentate de-al doilea dintre autori sub titlul „Optimizarea unei cupole reticulate" la sesiunea științifică jubiliară „40 de ani de învățămînt superior de construcții la Iași", 23—24 octombrie 1981.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 6, 1982, P. 675—686

Din punctul de vedere al calculului se distinge:

— asimilarea cu un mediu continuu echivalent (ipoteză valabilă doar în cazul conformării regulate și a încărcării cît mai uniforme a nodurilor);

— tratarea directă ca o structură spațială alcătuită din bare (structură discretă).

Sînt cunoscute mai multe tipuri de cupole reticulate [4], [6], [7], [9] dintre care citățm: cupolele cu nervuri, cupolele tip Schwedler, cupolele tip șaibă, cupolele tip Zimmermann, cupolele tip cadru, cupolele în rețea, cupolele tridirecționale, cupolele lamelare, cupolele geodesice (tip Fuller) etc.

Ele se încadrează în tipul cupolelor cu configurație regulată și au fost utilizate, cu precădere, în construcțiile social-culturale, avînd caracter de unicat.

Unele cupole reticulate sînt structuri static determinate, în ipoteza nodurilor articulate. Pentru cupolele tip Schwedler, de exemplu, sînt date formule simple pentru evaluarea eforturilor în bare [3], [8].

În construcțiile industriale, în particular la construcția rezervoarelor cilindrice cu ax vertical, sînt utilizate cu frecvență mai mare cupole reticulate semiregulate.

Geometria acestora este caracterizată prin absența a numeroase bare, în comparație cu cupola clasică de tip Schwedler, multe ochiuri fiind trapezoidale, deci deformabile în ipoteza tuturor nodurilor articulate.

Indeformabilitatea geometrică a cupolei este asigurată doar prin rigiditatea nodurilor, ceea ce impune luarea în considerare a efectului momentelor încovoietoare și de torsiune care apar din această cauză.

La cupolele semiregulate (cu simetrie ciclică) nu toate fusurile sînt identice, ci doar cîte un grup de fusuri; studiul stării de eforturi și de deformații poate fi redus la studiul unui asemenea grup, prin combinații convenabile ale încărcărilor.

2. ELEMENTE DE BAZĂ PENTRU CALCULUL CUPOLEI

2.1. GEOMETRIA CUPOLEI

Suprafața mediană a cupolei date, pe care sînt situate nodurile, este o calotă sferică de rază $R = 25{,}600$ m și diametrul cercului de rezemare $d = 32{,}000$ m (fig. 1 *a*). De aici rezultă o săgeată

$$f = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = 5{,}616 \text{ m}$$

și un unghi la centru $\varphi_0 = 38{,}682187^\circ$ $\left(\sin \varphi_0 = \dfrac{d}{2R} = 0{,}625\right)$.

Atît unghiul φ_0, cît și raportul

$$\frac{f}{d} = \frac{5{,}616}{32} = \frac{1}{5{,}7}$$

arată că avem a face cu o cupolă pleoștită.

Configurația geometrică a barelor este indicată în figura 1 *b*, din care reiese că există patru plane de simetrie, fiecare octant grupînd cîte șase fusuri.

Se disting:

— bare meridiane (de șase tipuri de secțiuni C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),

— bare inelare (de șase tipuri de secțiune I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6),

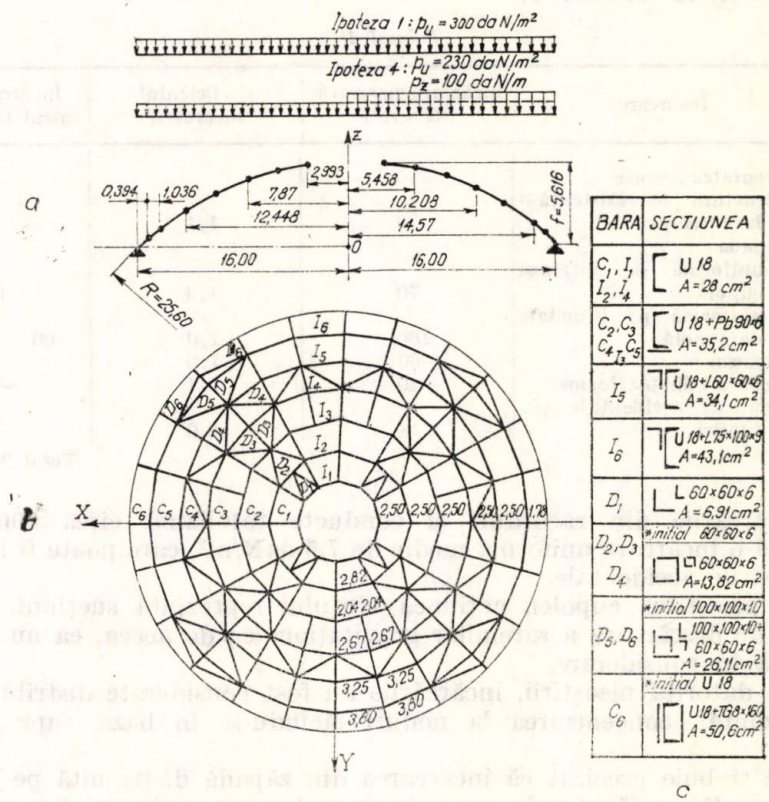


Fig. 1. — Geometria cupolei reticulate : *a* — secțiune transversală și ipotezele de încărcare 1° și 4° ; *b* — dispunerea barelor ; *c* — secțiunile barelor.

— bare diagonale (de șase tipuri de secțiuni D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6).

Structura reticulată are în total 152 noduri și 312 bare.

Barele sînt drepte, doar nodurile fiind situate pe sfera mediană.

2.2. METODA DE CALCUL

Cupola reticulată a fost calculată prin metoda stărilor limită, conform STAS 10108/0—1978.

Pentru un oțel de construcție marca OL 52, rezistența de calcul pentru piese cu grosimi $t \leqslant 16$ mm este $R = 3150$ daN/cm², iar pentru oțelul marca OL 37, $R = 2200$ daN/cm².

Determinarea mărimilor secţionale (eforturi axiale, momente încovoietoare şi de torsiune) s-a făcut în stadiul elastic liniar.

2.3. ÎNCĂRCĂRI

Încărcările normate, coeficienţii încărcărilor şi încărcările de calcul sînt trecute în tabelul 1.

Tabelul 1

Nr. crt.	Încărcare	Încărcare normată (daN/m²)	Coeficientul încărcării	Încărcare de calcul (daN/m²)
1	Greutatea proprie (structura de rezistenţă + învelitoare)	70	1,1	77
2	Zăpada			
	— uniformă pe întreaga cupolă	70	1,4	~100
	— uniformă pe jumătate de cupolă	100	1,0	100
3	Vacuum	60	1,0	60
4	Încărcări din platforme	40	1,1	~45
5	Încărcări accidentale şi rotunjiri	18	1,0	18
				Total 300

Încărcările din racorduri şi conducte totalizînd circa 6000 daN reprezintă o încărcare uniformă medie de 7,5 daN/m², care poate fi inclusă în încărcările accidentale.

La pleoştirea cupolei, acţiunea vîntului reprezintă sucţiuni, avînd un efect de descărcare a sarcinilor gravitaţionale; de aceea, ea nu a mai fost luată în considerare.

Tot datorită pleoştirii, încărcările au fost considerate distribuite în plan orizontal, concentrarea la noduri făcîndu-se în baza suprafeţelor aferente.

Mai trebuie precizat că încărcarea din zăpadă distribuită pe jumătate de cupolă s-a făcut prin analogie cu încărcarea nesimetrică a arcelor, situaţie care se dovedeşte mai defavorabilă decît încărcarea totală (uniformă) a cupolei.

În lipsa oricăror prevederi ale standardului de încărcări date de zăpadă (STAS 10101/21-78) intensitatea încărcării normate a fost luată, de comun acord cu beneficiarul, $p_{zn} = 100$ daN/m² (cît încărcarea de calcul din ipoteza încărcării cu zăpadă pe toată cupola), însă cu un coeficient al încărcării $n = 1$.

2.4. IPOTEZE DE ÎNCĂRCARE

Pentru determinarea solicitărilor maxime au fost stabilite, tot de comun acord cu beneficiarul, următoarele patru ipoteze de încărcare:

1°. Încărcare uniformă pe toată cupola, inclusiv zăpada, de 300 daN/m² (vezi tabelul 1).

2°. Încărcare uniformă pe toată cupola, exclusiv zăpada, de 230 daN/m².

3°. Zăpada distribuită uniform pe jumătate de cupolă, de 100 daN/m².

4°. Încărcare uniformă a cupolei, cu zăpadă pe jumătate.

Se observă că ipotezele 2° și 3° sînt doar ipoteze intermediare de calcul, servind la determinarea efectului încărcărilor nesimetrice ale cupolei provenind din zăpadă.

Ipotezele de bază au rămas 1° și 4°, care au fost detaliate în continuare.

2.5. DATE GENERALE DE CALCUL

Calculele numerice au fost efectuate în baza unui program general de calcul, reprezentînd o variantă a programului SAP IV [11], adaptat pentru calculatoarele FELIX de către un colectiv al Facultății de hidrotehnică din I.C.B., condus de conf. dr. ing. A. Popovici.

Datele de intrare au fost:

— coordonatele nodurilor (exprimate în coordonate cartesiene într-un sistem global X, Y, Z) în baza datelor privind geometria cupolei (vezi § 2.1);

— barele au fost tratate cu elemente de grindă, avînd secțiunile inițiale propuse de beneficiar (vezi figura 1 *c*);

— încărcările (în cele patru ipoteze amintite la § 2.4) concentrate la noduri, în baza încărcărilor aferente nodurilor;

— rezemarea cupolei se face prin articulații plasate la capătul inferior al tuturor meridianelor (căpriorilor).

Au rezultat 153 noduri, 312 bare cu opt tipuri de secțiuni. Sistemul de ecuații în metoda deplasărilor are 840 ecuații.

Programul amintit furnizează atît deplasările nodale în sistemul global de coordonate X, Y, Z, cît și mărimile secționale în raport cu un sistem local de coordonate *1, 2, 3* (coordonata *1* corespunde axei barei, coordonatele *2* și *3* axelor din planul secțiunii transversale).

Din rezultatele complete cuprinse în imprimante, au fost extrase și trecute în figura 2 valorile relative la fiecare tip de bară, în ipoteza de încărcare 1°. Pentru ipoteza de încărcare 4° și pentru fiecare tip de secțiune ($C_1 - C_6, I_1 - I_6, D_1 - D_6$) au fost căutate combinațiile de solicitări care duc la valorile maxime ale tensiunilor. Rezultatele sînt prezentate sintetic în figura 2. Valorile nesemnificative ale momentelor încovoietoare M_y nu au mai fost trecute, fiind înlocuite cu linioară (-).

3. REZULTATE CORESPUNZĂTOARE GEOMETRIEI EXISTENTE

Prezentarea și analizarea rezultatelor este făcută succesiv pentru ipoteza 1° (a încărcării uniforme pe toată cupola) și pentru ipoteza 4° (a încărcării nesimetrice a cupolei).

I p o t e z a 1°. Eforturile axiale în *barele meridiane lungi* (*căpriori*) cresc, în general, de la creștet spre baza cupolei, cu excepția zonei brîului

în care sînt dispuse diagonalele tip D_4. Prezența lor duce la descărcarea meridianului (bara tip C_4) care urmează nodului la care concură diagonalele amintite.

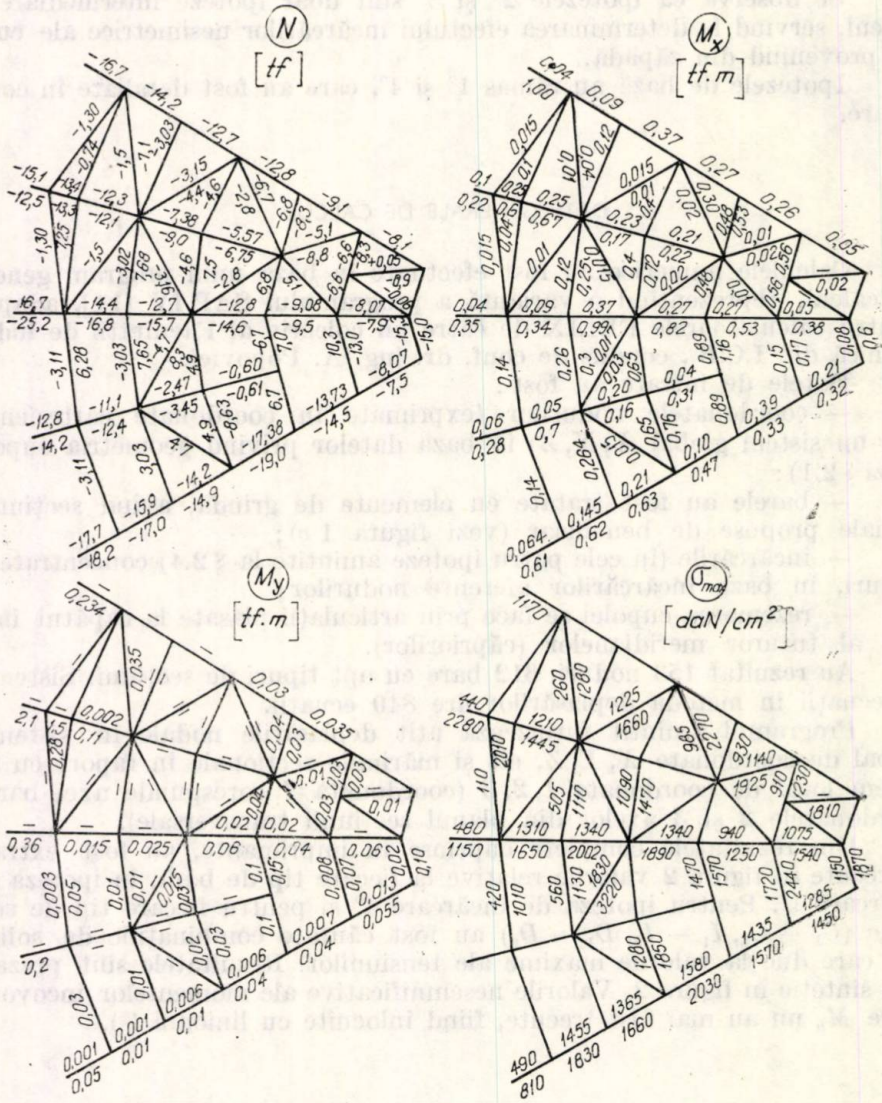


Fig. 2. — Mărimile secționale în barele cupolei, în geometria inițială : *a* — eforturi axiale N ; *b* — momente încovoietoare M_x ; *c* — momente încovoietoare M_y ; *d* — tensiunile normale σ_{max}(valori în ipoteza 1° de încărcare — deasupra ; valori în ipoteza 4° de încărcare — dedesubt).

Eforturile axiale în *barele meridiane scurte* sînt reduse datorită prezenței diagonalelor adiacente. Ele se încarcă mai mult spre reazeme, păstrînd însă valori ale eforturilor inferioare celor din meridianele lungi.

Momentele încovoietoare după ambele direcții, în această ipoteză, au valori mici (producînd tensiuni de pînă la 230 daN/cm²), astfel încît nu sînt determinante la verificarea de rezistență.

Tensiunile maxime sînt atinse în meridianul C_3 și au valoarea de 1580 daN/cm² (compresiune).

Pentru *barele inelare* tendința generală este de descreștere a eforturilor axiale, dinspre creștet spre bază.

În fusurile contravîntuite integral cu diagonale, eforturile axiale din barele inelare sînt mai mici decît cele din fusurile necontravîntuite. Brîul continuu de diagonale duce la o scădere sensibilă a eforturilor axiale din inelele I_4, I_5 și I_6.

Momentele încovoietoare ating valori mai mari tot în barele inelare situate în fusuri necontravîntuite; valorile maxime sînt în barele tip I_3 ($M_x = 0{,}89$ tfm, $M_y = 0{,}10$ tfm) și anume lîngă capătul superior al meridianelor scurte.

Tensiunile maxime sînt atinse în barele tip I_2 (în fusurile necontravîntuite) și au valoarea 1720 daN/cm² (compresiune).

Eforturile în *diagonale* au valori reduse, cu excepția diagonalelor tip D_2 și a celor cuprinse în brîul continuu (tip D_4). Eforturile axiale din diagonale sînt compresiuni, cu excepția diagonalelor superioare D_1 în care apar întinderi mici.

Tensiunile maxime ating 1830 daN/cm² în diagonalele tip D_4, predominînd efectul eforturilor axiale, datorită lungimii de flambaj mari.

Se atrage atenția că secțiunile diagonalelor, în baza cărora au fost determinate tensiunile, sînt întărite (de la D_2 la D_6) față de datele inițiale, prin adăugarea unui profil L 60 × 60 × 6 (vezi figura 1 *c*). Întărirea diagonalelor a fost impusă de natura solicitării (compresiune) și de valorile foarte mari ale coeficientului de sveltețe $\lambda > 200$).

Deformațiile cupolei, în această ipoteză, corespund, în mare, unei deplasări pe verticală care atinge, la nivelul inelului superior, valori de circa 10 mm.

I p o t e z a 4°. Eforturile axiale din *barele meridiane* au o variație similară cu aceea din ipoteza 1°, crescînd de la creștet spre baza cupolei; ele sînt mai mari în meridianele lungi decît în cele scurte. Valorile maxime sînt de 25,20 tf (compresiune) în meridianele lungi din fusurile contravîntuite, în barele tip C_6.

Momentele încovoietoare M_x sînt mai mari decît în ipoteza 1°, ajungînd la 1,00 tfm în barele tip C_6. Momentele încovoietoare M_y sînt mult mai mari decît în ipoteza 1°, ajungînd în zona de rezemare a barelor meridiane scurte din fusurile contravîntuite la valori de 2,10 tfm, aceasta ca urmare a rigidității excesive a lor, precum și a eforturilor nesimetrice din diagonalele adiacente D_6.

Valorile mari ale eforturilor axiale și ale momentelor încovoietoare au impus întărirea tuturor secțiunilor inițiale ale barelor meridiane tip C_6 cu table dispuse astfel încît să crească substanțial rigiditatea barei, în special în raport cu axa $y-y$.

Tensiunile maxime ating 2280 daN/cm² (compresiune) în meridianele de la baza cupolei.

Pentru *barele inelare*, tendința generală este de descreștere a eforturilor axiale, de la creștet spre baza cupolei. Momentele încovoietoare au valori mai mari decît în ipoteza 1°. Inelele superioare avînd secțiunea mai redusă (U 18) prezintă și tensiuni mai mari. Astfel, inelul cel mai solicitat este inelul tip I_2, datorită lungimii mai mari a barelor din fusurile necontravîntuite; tensiunile maxime ating valoarea de 2440 daN/cm² (compresiune).

În *barele diagonale* eforturile axiale cresc față de ipoteza 1°, atingînd, în diagonalele tip D_2, valoarea de 8,80 tf, iar în brîul de diagonale tip D_4 valoarea de 8,30 tf (ambele de compresiune).

Tensiunile maxime se produc în unele bare diagonale tip D_4 ale brîului continuu (în fusurile necontravîntuite), atingînd valoarea de 3220 daN/cm²; această valoare singulară a fost considerată admisibilă, reprezentînd o depășire de 2,2% a rezistenței de calcul și într-o ipoteză de încărcare accidentală. Dimensiunile cornierelor de întărire a diagonalelor D_2—D_6 (L60 × 60 × 6) au fost condiționate de valorile rezultate în această ipoteză de încărcare.

Tendința de deformare a cupolei, în această ipoteză, este următoarea:

— pe orizontală, deplasare dinspre jumătatea încărcată cu zăpadă spre aceea neîncărcată, avînd valoarea maximă de 1,05 cm;

— pe verticală, tendința de coborîre neuniformă, în zona aglomerată cu zăpadă (valoarea maximă 2,84 cm) și de ridicare a părții opuse, neîncărcate, cu valori de pînă la 1,15 cm.

4. RAȚIONALIZAREA GEOMETRIEI CUPOLEI ȘI A SECȚIUNILOR BARELOR

Rezultatele prezentate anterior și corespunzătoare configurației inițiale a cupolei reticulate sînt caracterizate prin variații mari de eforturi și de tensiuni în bare de același tip. O consecință a fost numărul relativ mare de secțiuni distincte utilizate (opt).

Explicația rezidă, în primul rînd, în faptul că nu toate fusurile sînt identice, multe din ele avînd ochiuri trapezoidale; în al doilea rînd, rezemarea la bază se făcea prin tronsoane foarte scurte de meridian (căpriori), fără contravîntuiri, ceea ce, datorită rigidității, atrăgea momente încovoietoare mari, după ambele axe principale de inerție ale secțiunilor.

În al treilea rînd, secțiunile inițiale aveau momente de inerție mult diferite după cele două axe principale de inerție ale secțiunilor, ceea ce este dezavantajos atît pentru flambaj, cît și pentru încovoierea oblică.

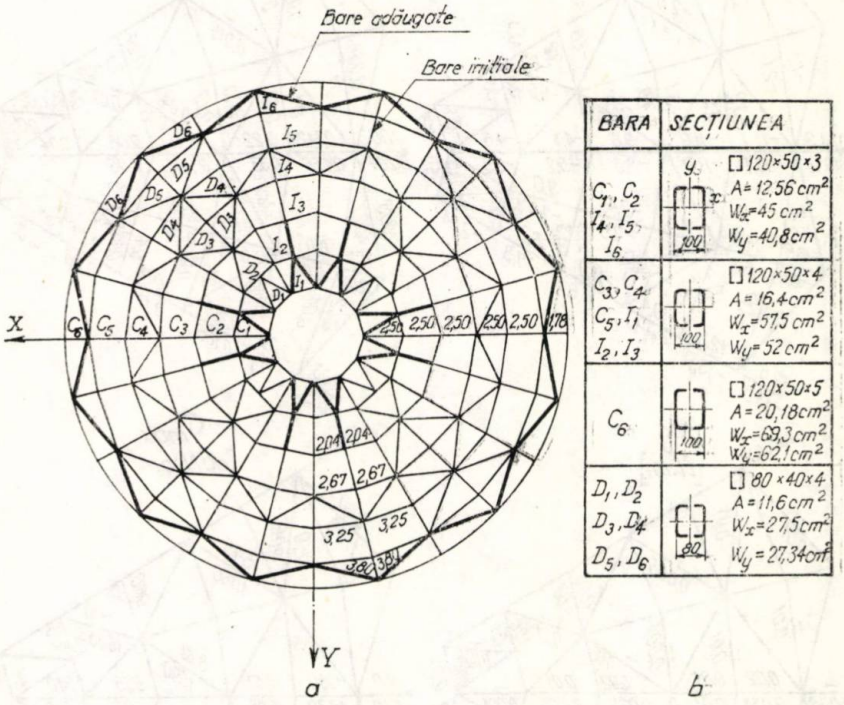
Plecînd de la aceste constatări s-a preconizat mai întîi modificarea configurației geometrice, *cu respectarea dispoziției inițiale a barelor*.

Pentru a uniformiza distribuția eforturilor din barele cupolei, a fost completat inelul central cu diagonale, au fost prelungite meridianele scurte și introduse diagonale în toate panourile inferioare; noua configurație este alcătuită din 356 bare și 156 noduri și este reprezentată în figura 3 *a*.

De asemenea, secțiunile inițiale din proiect reprezentînd secțiuni cu profil deschis, au fost înlocuite în întregime. După mai multe încercări cu diverse tipuri de profile s-a adoptat ca secțiune de bază secțiunea

casetată dreptunghiulară, alcătuită din profile cu pereți subțiri de tipul 2 U 120 × 50 cu grosimi de 3—5 mm pentru barele meridiane și inelare și 2 U 80 × 40 × 4 pentru toate diagonalele. Au rezultat doar patru tipuri de secțiuni distincte, față de opt cît erau inițial (fig. 3 *b*).

Calculele numerice au fost efectuate pentru ipotezele de încărcare prezentate în paragraful 2.4, utilizînd același program de calcul. Din rezultatele obținute—deplasări nodale și mărimi secționale — sînt prezentate sintetic în figura 4 mărimile secționale N, M_x, M_y și tensiunile normale σ_{max}.



BARA	SECȚIUNEA
C_1, C_2 I_4, I_5 I_6	□ 120×50×3 $A = 12,56\ cm^2$ $W_x = 45\ cm^2$ $W_y = 40,8\ cm^2$
C_3, C_4 C_5, I_1 I_2, I_3	□ 120×50×4 $A = 16,4\ cm^2$ $W_x = 57,5\ cm^2$ $W_y = 52\ cm^2$
C_6	□ 120×50×5 $A = 20,18\ cm^2$ $W_x = 69,3\ cm^2$ $W_y = 62,1\ cm^2$
D_1, D_2 D_3, D_4 D_5, D_6	□ 80×40×4 $A = 11,6\ cm^2$ $W_x = 27,5\ cm^2$ $W_y = 27,34\ cm^2$

Fig. 3. — Geometria optimizată a cupolei reticulate : *a* — dispunerea barelor; *b* — secțiunile barelor.

Comparativ cu configurația inițială a cupolei se remarcă următoarele. În barele meridiane eforturile axiale se uniformizează valoric pentru barele cuprinse între două inele succesive, ne mai fiind diferențe mari între eforturile axiale din meridianele lungi și din cele scurte. Valorile maxime ale eforturilor axiale scad cu 25—30% față de cele anterioare; astfel, valoarea maximă din barele C_6 este de 19,2 tf, față de 25,2 tf, în ipoteza 4°. Momentele încovoietoare se micșorează substanțial. Astfel, valoarea maximă a momentului M_x scade de la 1,0 tfm (în bara tip C_6, în ipoteza 4°) la 0,45 tfm (în bara tip C_5). Momentele M_y sînt practic nesemnificative; valoarea maximă atinsă anterior în zona de rezemare a meridianelor, de 2,1 tfm, devine 0,1 tfm. Tensiunile maxime ating valoarea de 1830 daN/cm² (în ipoteza 4°).

În barele inelare eforturile axiale au de regulă valori apropiate de cele anterioare. Momentele încovoietoare M_x se micșorează substanțial; astfel valorile înregistrate precedent în fusurile necontravîntuite scad

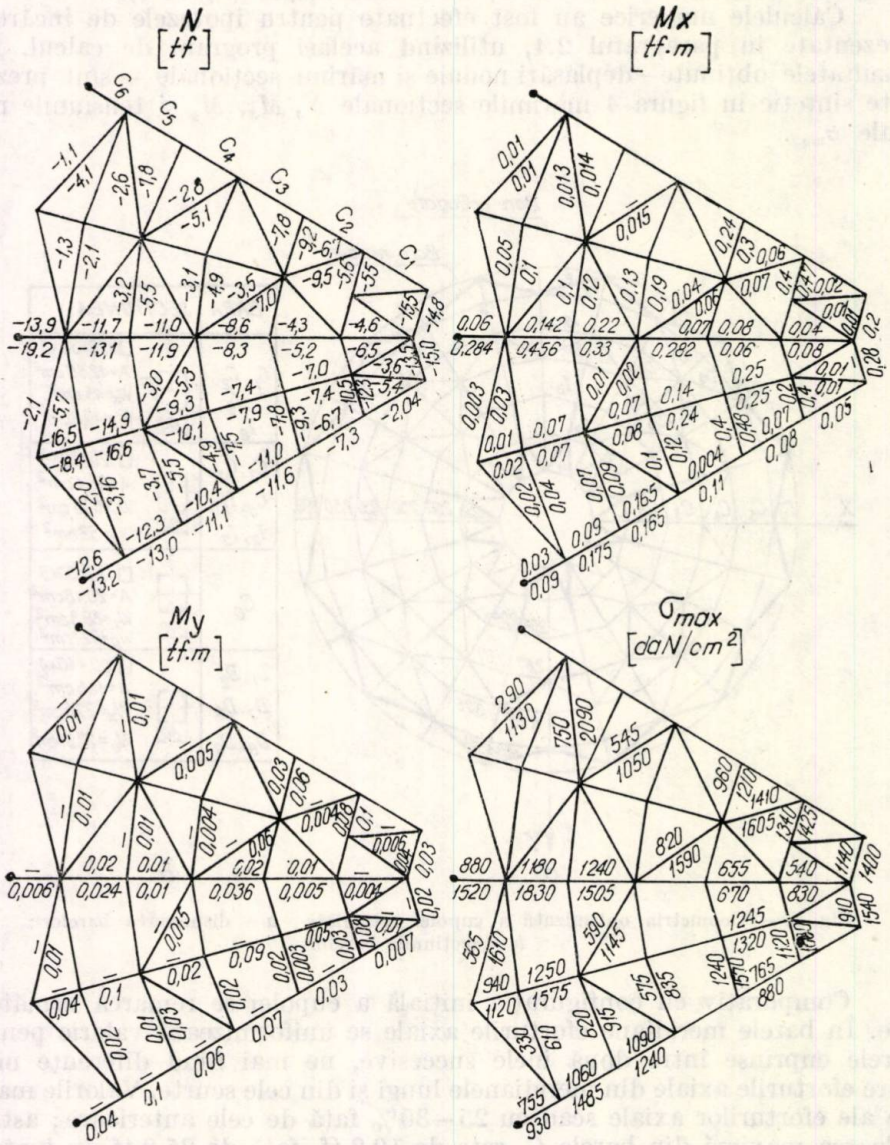


Fig. 4. — Mărimile secționale în barele cupolei, în geometria optimizată: *a* — eforturi axiale N; *b* — momente încovoietoare M_x; *c* — momente încovoietoare M_y; *d* — tensiuni normale σ_{max} (valori în ipoteza 1° de încărcare — deasupra; valori în ipoteza 4° de încărcare-dedesubt).

pe inelul I_3 de la 1,16 la 0,48 tfm (în ipoteza 4°). Tensiunile maxime ating valoarea de 1630 daN/cm² (ipoteza 4°).

În barele diagonale se înregistrează eforturi axiale cu valori apropiate de cele anterioare, fără a mai prezenta însă valori izolate mari. Astfel, în barele diagonale tip D_4 valoarea maximă este de 5,3 tf, față de 8,3 tf înregistrată anterior. Tensiunile maxime ating 2090 daN/cm^2 (ipoteza 4°).

În această variantă, consumul total de oțel s-a redus de la 20,1 t la 12,6 t, marca oțelului fiind redusă de la OL 52 la OL 37.

A rezultat astfel:

— o economie de consum de oțel de 37,3%,

— reducerea prețului de cost datorită atît reducerii consumului de material, cît și a prețului de cost, datorită trecerii de la o marcă superioară la o marcă inferioară,

— reducerea tipului de secțiuni de la opt la numai patru.

5. OBSERVAȚII FINALE ȘI CONCLUZII

În afara problemelor de determinare a mărimilor secționale în barele cupolei reticulate și a tensiunilor corespunzătoare este necesară și examinarea stabilității elastice. Aceasta comportă trei aspecte:

a) flambajul unei bare, datorită mărimilor secționale determinate anterior;

b) voalarea locală (denumită și pierderea stabilității de nod) relativă la deformarea locală în jurul unui nod;

c) pierderea stabilității de ansamblu a cupolei.

Flambajul unei bare este luat în considerare prin verificarea tensiunilor convenționale σ_φ (care includ coeficientul de flambaj minim).

Pentru voalarea locală și flambajul general problema nu mai este atît de simplă, neexistînd o rezolvare acceptabilă la nivelul actual al cunoștințelor, pe plan mondial.

Aplicînd relațiile propuse de D. T. Wright [12] au rezultat coeficienți de siguranță de ordinul 2,5 respectiv 1,47.

Pe marginea analizei făcute sînt de relevat o serie de probleme.

a) Încărcarea cu zăpadă pe jumătate de cupolă a fost luată în considerare prin extinderea încărcării cu sarcină uniformă a unei jumătăți la arc. Desigur că distribuția uniformă în plan orizontal este o schematizare menită să simplifice în anumită măsură calculele intermediare. Intensitatea încărcării însă este subiect de discuție și eventual de introdus în prescripții. Cu cît intensitatea va fi mai redusă în comparație cu restul încărcării — de exemplu 50 daN/m^2 sau 75 daN/m^2 — cu atîta efectul încărcării nesimetrice va fi mai puțin defavorabil la evaluarea stării de eforturi și de deformații.

Trebuie semnalată lipsa unor asemenea date și în alte prescripții, fapt relevat și pentru acțiunea vîntului, cu prilejul unei conferințe organizate la Universitatea din Surrey (Anglia) în septembrie 1980 [1].

b) Starea de eforturi produsă de încărcarea pe jumătate de cupolă este funcție de poziția diametrului de separație; din figura 2 reiese că există o infinitate de poziții, însă, în particular, două poziții pentru care există un plan de simetrie geometrică (una dintre aceste poziții a fost reprezentată în figura 2).

c) În privința optimizării, cercetarea s-a limitat la modificarea geometriei inițiale în vederea obținerii unei stări de eforturi mai raționale. Problema găsirii unei soluții optimale plecînd de la calota sferică dată (R și d) rămîne deschisă.

d) Cupolele semiregulate nu pot fi calculate prin metode aproximative — cum ar fi metoda plăcii înlocuitoare — ; calculul trebuie să fie abordat prin metoda generală a deplasărilor.

e) Conformarea geometrică regulată este recomandabilă asigurînd o stare de eforturi mai uniformă și, implicit, un consum de metal mai redus.

f) Sînt recomandabile secțiunile tubulare deoarece permit realizarea mai simplă a nodurilor și necesită secțiuni mai reduse decît la secțiunile deschise.

În încheiere, autorii doresc să aducă mulțumirile lor prof. dr. ing. I. E. Beleș pentru fructuoasele discuții purtate în timpul elaborării lucrării și pentru sugestiile făcute la citirea manuscrisului; de asemenea, mulțumesc cordial ing. S. Iagădă care le-a dat un prețios concurs la prelucrarea datelor de la calculator, la transpunerea grafică a rezultatelor numerice și la interpretarea lor.

Primită la redacție la 29 octombrie 1981

BIBLIOGRAFIE

1. S. BAKER, *A Comparision of the Codes of Practice Use in Different Countries For the Determination of* Wind *Loads on Domes*, Course on the Analysis, Design and Construction of Braced Domes. Vol. I, University of Surrey, 1980.
2. I. BELEȘ, M. V. SOARE, N. RĂDUICĂ, *Determinarea stării de eforturi în cupola rezervorului exterior la rezervorul de etilenă*, Contract de cercetare științifică I.C.B. nr. 100—79.
3. R. KIRCHHOFF, *Statik der Baukonstruktionen. III Räumliches Fachwerk*, Hütte Des Ingenieurs Taschenbuch, III Bd., 26 Aufl. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1936, p. 77—80.
4. Z. S. MAKOWSKI, *Räumliche Tragwerke aus Stahl*. Verlag Stahleisen m.b.H., Düsseldorf, 1963.
5. Z. S. MAKOWSKI, *Trends and Developments in Space Structures*, Bul. științ. al Institutului de construcții București, **21**, *1—2*, 3—34 (1978).
6. Z. S. MAKOWSKI, *Wide Span Structures-Braced Domes*, Building Specification, Oct. 1979.
7. Z. S. MAKOWSKI, *History of Development of Various Types of Domes and Review of Recent Achievements All Over the* World. Course on the Analysis, Design and Construction of Braced Domes. Vol. I, University of Surrey, 1980.
8. E. W. PARKES, *Braced Frameworks*. 2nd Ed., Pergamon Press, Oxford, 1974.
9. K. POHL, G. POHLMANN, *Statik der Baukonstruktionen. IX Räumliche Tragwerke*. Hütte Des Ingenieurs Taschenbuch, III Bautechnik, 28 Aufl., Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1956, p. 131—138.
10. M. V. SOARE, *Probleme actuale în calculul și proiectarea structurilor spațiale formate din bare. Forme și tipuri de structuri optimizate*, Construcții, **32**, *8*, 21—31 (1980).
11. E. L. WILSON, K. J. BATHE, F. E. PETERSON, *SAP IV — A structural analysis program for static and dynamic response of linear systems*, University of California, Berkeley, 1973.
12. D. T. WRIGHT, *Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, **91**, *ST 1*, 173—201 (1965).
13. D. L. RICHTER, *Analysis, Design and Construction of TEMCOR Aluminium Geodesic Domes*. Course on the Analysis, Design and Construction of Braced Domes. University of Surrey, The Space Structures Research Centre (Editor Prof. Z. S. Makowski), Vol. II, Sept. 1980.

STUDIUL CINEMATIC AL UNITĂȚILOR DE POMPARE PE CALCULATOARE NUMERICE

de NICOLAE PETRE și PETRE CHIȚU-MILITARU
ICPPG Cîmpina

În lucrare sînt evaluați parametrii cinematici ai unităților de pompare : lungimea de cursă, viteza, accelerația, factorul de cuplu și unghiurile cinematice (α, β, γ_1, γ_2 și δ) pentru creșteri succesive ale unghiului descris de butonul manivelei din 5 în 5° între 0 și 360° și fiecare lungime de cursă. De asemenea, numai pentru fiecare lungime de cursă s-au calculat : factorul de asimetrie, indicii cinematici, unghiul de asimetrie și unghiurile φ', φ_1, γ_{max} și γ_{min}.

Rezultatele calculelor analitice se prezintă fie la imprimantă, fie grafic prin reprezentări la PLOTTER.

DESCRIEREA SUCCINTĂ A INSTALAȚIEI DE POMPARE

Instalația de pompare de suprafață, destinată extracției hidrocarburilor prin sonde în pompaj de adîncime, se compune din unitate de pompare, motor electric sau termic, reductor de turație, cap de pompare și dispozitive speciale.

Sistemul mecanic prin intermediul căruia mișcarea de rotație dată de un motor electric sau termic, este transformată într-o mișcare rectilinie alternativă, poartă numele de unitate de pompare.

Principalele părți componente ale unităților de pompare clasice [1, 2, 3] sînt prezentate în figura 1.

Sînt cunoscute mai multe tipuri de unități de pompare (U.P.) în funcție de :

A. Natura echilibrării sarcinilor din sondă [4, 5] :

a) U.P. din seria A cu echilibrare mecanică (rotativă, oscilantă sau combinată) la care efectul de echilibrare este de 75% din sarcina maximă ;

b) U.P. din seria B cu echilibrare mecanică (rotativă) și geometrie modificată ;

c) U.P. din seria C cu echilibrare pneumatică sau hidropneumatică.

B. Valoarea unghiului de asimetrie (θ)*) :

a) U.P. simetrice ($\theta = 0$) ;

b) U.P. asimetrice ($\theta \neq 0$) ;

C. Înlocuirea balansierului clasic cu alt echipament :

a) U.P. acționate hidraulic și comandate electronic (HEP) [6] ;

b) U.P. cu role sau tamburi cilindrici (S.B.M. sau ALPHA) [7, 8] ;

c) U.P. turn [9].

În vederea realizării unui randament volumetric al pompei de adîncime cît mai mare, se poate schimba lungimea de cursă la U.P. (prin modi-

*) Unghiul de asimetrie θ este definit ca unghiul format între pozițiile bielei pentru lagărul sferic (4 din fig. 1) în punctul mort superior, respectiv inferior.

ficarea poziției butonului manivelei) sau/și numărul de curse/min (prin înlocuirea roții de transmisie prin curele a motorului).

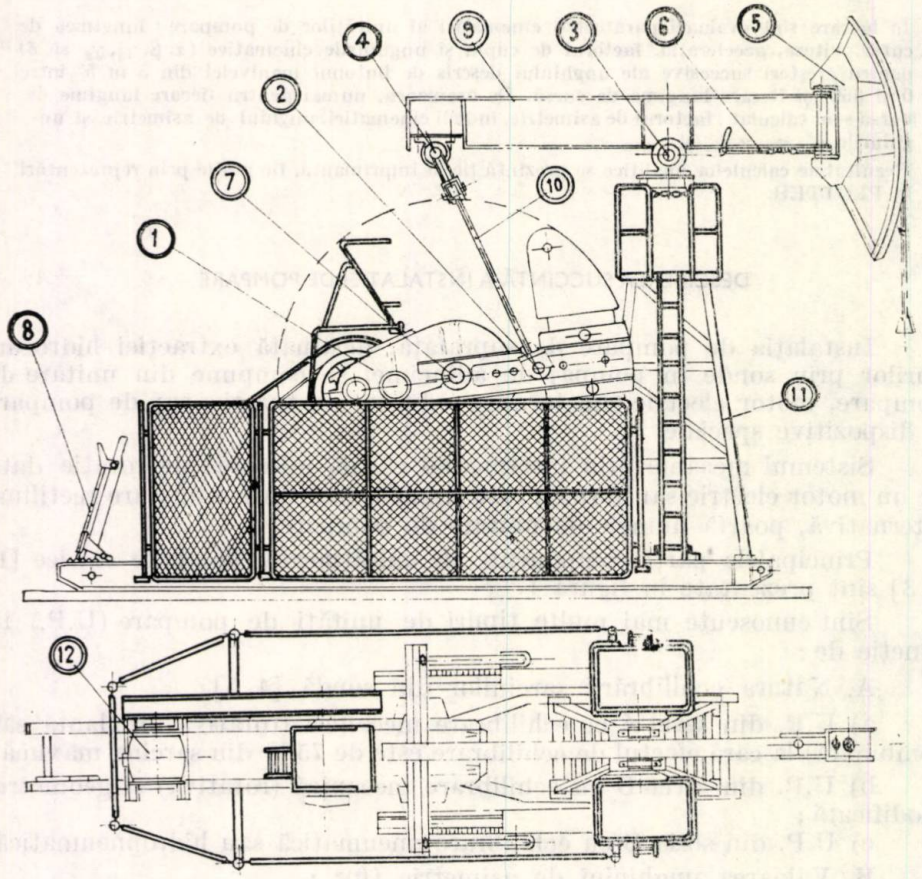


Fig. 1. — Unitatea de pompare Vulcan : *1.* Reductor de turație. *2.* Articulație sferică. *3.* Lagăr central. *4.* Lagăr sferic. *5.* Cap de balansier. *6.* Dispozitiv de rabotarea capului de balansier. *7.* Manivelă cu contragreutăți. *8.* Sistem de frînare. *9.* Balansier. *10.* Bielă. *11.* Capre de susținere. *12.* Motor electric. *13.* Contragreutăți de echilibrare. *14.* Punctul de suspendare al garniturii de prăjini de pompare.

STUDIUL CINEMATIC AL UNITĂȚILOR DE POMPARE

Studiul cinematic s-a particularizat pentru U.P. construite de Uzina Vulcan, București (STAS 1562-64), care fac parte din cele incluse în seria A (tabelul 1).

Schema cinematică a U.P. și notațiile utilizate în relațiile de calcul sînt redate în figura 2.

Metodologia de calcul abordată a permis stabilirea următoarelor elemente :

Partea I, pentru fiecare lungime a manivelei (respectiv fiecare lungime de cursă la U.P.) :

1. Factorul de asimetrie, μ.
2. Indicii cinematici la cursa ascendentă și descendentă, e_a și e_d.

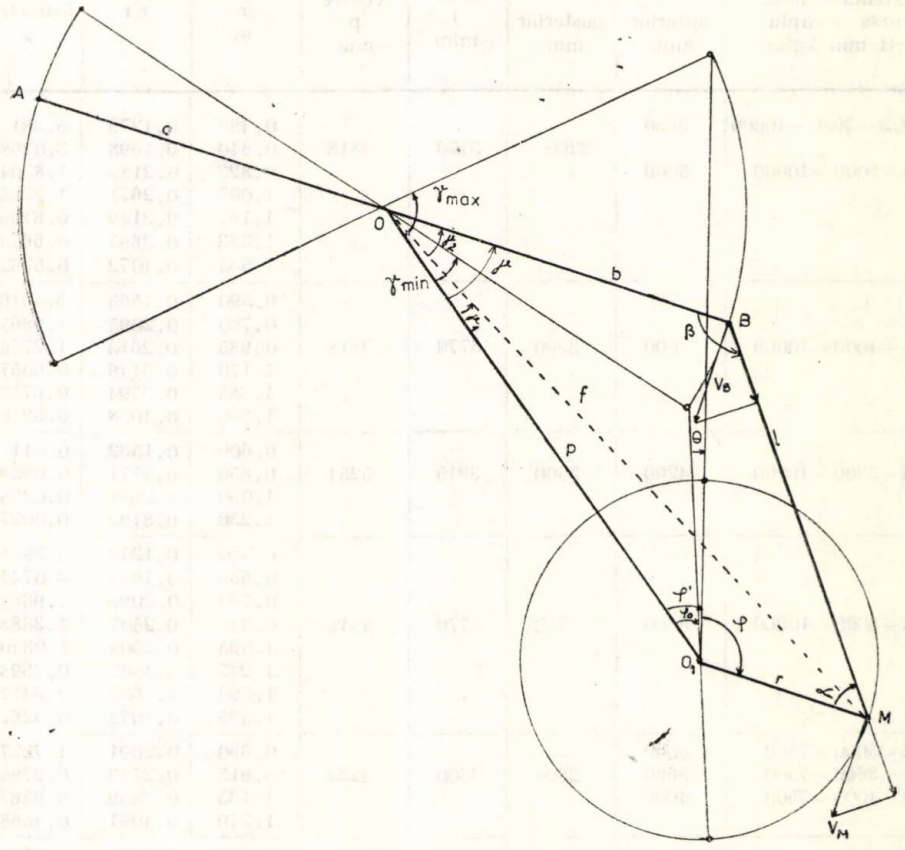


Fig. 2. — Schema cinematică a U.P. 15—4000—10000—1530 mm.

3. Unghiul de asimetrie, θ.
4. Unghiurile formate între : a) linia centrelor, p, și biela l, în punctul mort superior, φ' ; b) linia centrelor și bielă în punctul mort inferior, φ_0 ; c) linia centrelor și brațul posterior al balansierului, b, în punctul mort superior, γ_{max} ; d) linia centrelor și brațul posterioral balansierului în punctul mort inferior, γ_{min}.

Partea a II-a, pentru fiecare lungime de cursă a U.P. și creșteri succesive de 5° ale unghiului descris de butonul manivelei (de la 0 la 360°) :

1. Lungimea cursei, S_A.
2. Viteza, V_A.

Tabelul

CARACTERISTICILE CONSTRUCTIVE ȘI CINEMATICE ALE UNITĂȚILOR

Tip unitate de pompare sarcina × lung. cursa × cuplu tf mm kgfm	Lungimea			Distanța dintre centre p mm	Lungimea manivelei r m	Raport r/l	Factorul de asimetrie μ
	Brațul		Biela l m.m				
	anterior mm.	posterior mm.					
19,3—3650—10000	3650	3200	3770	4818	0,480	0,1273	5,381
					0,640	0,1698	3,0268
15—5000—10000	5000				0,823	0,2183	1,8304
					1,007	0,2671	1,2226
					1,187	0,3149	0,8799
					1,363	0,3695	0,6673
					1,535	0,4072	0,5262
15—4000—10000	4000	3200	3770	4818	0,590	0,1565	3,5616
					0,790	0,2095	1,9865
					0,985	0,2613	1,2778
					1,170	0,3149	0,9057
					1,355	0,3594	0,6753
					1,530	0,4058	0,5296
15—3000—10000	4200	3500	3915	5251	0,600	0,1532	0,0117
					0,850	0,2171	0,0059
					1,050	0,2681	0,0038
					1,250	0,3192	0,0027
12—5000—10000	5000	3200	3770	4818	0,480	0,1273	5,3810
					0,635	0,1684	3,0747
					0,790	0,2095	1,9865
					0,945	0,2507	1,3883
					1,095	0,2904	1,0340
					1,245	0,3302	0,7998
					1,390	0,3687	0,6417
					1,535	0,4072	0,5262
12—3000—7500	3000	2800	3300	4232	0,690	0,2091	1,7227
10—3660—7500	3660				0,915	0,2773	0,9796
9—4000—7500	4000				1,135	0,3439	0,6367
					1,340	0,4061	0,4568
9—2500—5500	2500	2500	3000	3842	0,450	0,150	2,4150
					0,595	0,1983	1,3814
					0,740	0,2467	0,8931
					0,975	0,325	0,5144
					1,195	0,3983	0,3425
7—2000—3500	2200	2200	2400	3189	0,445	0,1854	2,1728
					0,595	0,2479	1,2154
					0,735	0,3063	0,7969
					0,965	0,4021	0,4621
5—1500—2000	1500	1500	1800	2311	0,250	0,1389	2,3885
					0,350	0,1944	1,2116
					0,450	0,250	0,7372
					0,600	0,333	0,4147
					0,715	0,3972	0,2920
3—1200—1000	1200	1200	1440	18490	0,575	0,3993	0,2867

1

DE POMPARE FABRICATE ÎN R.S. ROMÂNIA (UZINA VULCAN)

Indici cinematici		Unghiuri					Dezechilibru constructiv kgf.
ε_a ascend.	ε_d descend.	θ asimetric grade	φ_0 grade	φ' grade	γ_{min} grade	γ_{max} grade	
1,1402	0,8827	0°37′39″	41°21′41″	40°43′34″	42°47′17″	60° 3′28″	
1,1939	0,8474	0°42′11″	40°58′42″	40°16′31″	39°53′54″	62°59′14″	345
1,2607	0,8089	0°37′59″	40°17′57″	39°39′59″	36°36′31″	66°22′27″	
1,3349	0,7721	0°19′29″	39°17′ 7″	38°57′36″	33° 8′30″	69°49′39″	
1,4159	0,7378	0°18′10″	37°52′54″	38°11′ 4″	29°42′43″	73°15′37″	−431
1,5049	0,7057	−1°21′28″	35°59′21″	37°20′49″	26°13′56″	76°40′38″	
1,6037	0,6756	−3° 0′ 1″	33°27′17″	36°27′18″	22°38′45″	80° 5′ 1″	
1,1767	0,8582	0°41′28″	41° 6′56″	40°25′29″	40°48′14″	62° 4′ 7″	
1,2482	0,8157	0°39′38″	40°26′38″	39°46′59″	37° 9′52″	65°45′37″	
1,3256	0,7764	0°22′37″	39°25′36″	39° 2′59″	33°33′15″	69°24′42″	77
1,4078	0,7410	0°13′35″	38° 2′ 5″	38°15′40″	30° 2′26″	72°56′ 0″	
1,5006	0,7077	−1°17′52″	36° 5′20″	37°23′12″	26°23′38″	76°31′14″	
1,6006	0,6765	−2°56′30″	33°32′25″	36°28′55″	22°45′12″	79°59′ 1″	
1,1706	0,8595	0°14′14″	40°54′19″	41° 8′33″	38°19′50″	58° 4′27″	
1,2547	0,8070	0°42′25″	39°50′ 7″	40°32′32″	34° 7′22″	62°14′39″	
1,3294	0,7671	−1°23′53″	38°32′57″	39°56′50″	30°40′19″	65°37′18″	
1,4124	0,7288	−2°30′28″	36°45′ 1″	39°15′30″	27° 6′ 9″	69° 2′40″	
1,1402	0,8827	0°37′39″	41°21′14″	40°43′34″	42°47′17″	60° 3′28″	
1,1921	0,8484	0°42′ 8″	40°59′34″	40°17′26″	39°59′21″	62°53′42″	
1,2482	0,8157	0°39′38″	40°26′38″	39°46′59″	37° 9′52″	65°45′37″	
1,3090	0,7843	0°27′38″	39°40′ 8″	39°12′30″	34°18′ 5″	68°39′29″	459
1,3734	0,7551	0° 3′55″	38°39′24″	38°35′29″	31°28′41″	71°29′54 ″	
1,4440	0,7270	0°35′39″	37°19′21″	37°55′ 1″	28°34′54″	74°22′45″	
1,5195	0,7009	−1°34′10″	35°38′32″	37°12′42″	25°41′ 1″	77°12′27″	
1,6037	0,6756	−3° 0′ 1″	33°27′17″	36°27′18″	22°36′45″	80° 5′ 1″	
1,2476	0,8161	0°28′51″	40° 9′51″	39°40′60″	36°57′20″	65°29′42″	260
1,3515	0,7647	0° 2′ 1″	38°40′58″	38°42′59″	32° 9′57″	70°18′48″	
1,4701	0,7177	−1°14′43″	36°21′33″	37°36′16″	27°17′ 1″	75° 7′59″	
1,6013	0,6764	−3°25′ 1″	33° 0′38″	36°25′38″	22°25′ 3″	79°44′32″	−156
1,1691	0,8641	0°20′29″	39°59′ 3″	39°38′34″	40°57′ 8″	61°41′45″	
1,2338	0,8254	0°13′ 9″	39°19′36″	39° 6′29″	37°33′55″	65° 6′13″	
1,3052	0,7887	0° 7′23″	38°21′ 6″	38°28′29″	34° 7′10″	68°33′17″	240
1,4389	0,7330	−1°24′ 0″	35°51′15″	37°15′16″	28°19′22″	74°15′44″	(206)
1,5920	0,6850	−3°57′37″	31°56′47″	35°54′24″	22°27′33″	79°45′58″	
1,2104	0,8318	0°29′38″	42°46′50″	42°17′12″	37° 7′29″	60°28′15″	
1,2962	0,7812	0°13′37″	41°45′29″	41°31′52″	33° 7′16″	64°30′17″	
1,3869	0,7360	0°25′42″	40°16′33″	40°42′15″	29°17′31″	68°19′44″	176
1,5602	0,6653	−2°56′45″	36° 9′54″	39° 6′38″	22°33′18″	74°46′ 4″	(170)
1,1550	0,8733	0°15′52″	39°56′ 7″	39°40′15″	41°33′12″	60°44′39″	
1,2284	0,8284	0° 7′ 5″	39°12′18″	39° 5′13″	37°39′50″	64°39′ 4″	
1,3104	0,7862	0°18′57″	38° 3′20″	38°22′17″	33°41′45″	68°36′46″	
1,4548	0,7274	−1°5′043″	35°13′36″	37° 4′18″	27°28′50″	74°41′20″	
1,5894	0,6857	−4°13′44″	31°4′23″	35°54′ 7″	22°19′17″	79°28′57″	
1,5942	0,6844	−4°20′51″	31°30′46″	35°51′37″	22° 8′ 2″	79°37′57″	

3. Accelerația, A_A.
4. Factorul de cuplu, F_C.

5. Unghiurile formate între: a) bielă l și mnivelă, r; b) bielă și brațul posterior al balansierului, β; c) linia centrelor, p, și segmentul de dreaptă ce unește lagărul cu articulația sferică (butonul manivelei), f, γ_1; d) brațul posterior al balansierului, b, și segmentul f, γ_2; e) linia centrelor și bielă, δ.

Pentru stabilirea relațiilor de calcul s-a elaborat un studiu geometro-mecanic și trigonometric. Unele din relații sînt preluate din literatura de specialitate [1, 3, 10, 11], iar altele sînt deduse special în această lucrare.

Relațiile de calcul utilizate ca model matematic sînt prezentate în continuare.

Factorul de asimetrie μ:

$$\mu = \frac{e^2 + b^2 - p^2}{r^2}. \tag{1}$$

Indice cinematic la cursa ascendentă e_a și descendentă e_d:

$$e_a = \frac{1 + \frac{r}{l}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2}}, \qquad e_d = \frac{1 - \frac{r}{l}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2}}. \tag{2}$$

Unghiul de asimetrie θ:

$$\theta = \varphi' - \varphi_0, \text{ unde} \tag{3}$$

$$\varphi' = \arccos \frac{p^2 + (l + r)^2 - b^2}{2p(l + r)}, \tag{4}$$

$$\varphi_0 = \arccos \frac{p^2 + (l - r)^2 - b^2}{2p(l - r)}. \tag{5}$$

Unghiurile γ_{min} și γ_{max}

$$\gamma_{min} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(p + l - r - b)(b + l - r - p)}{(p + l - r + b)(b - l + r + p)}}, \tag{6}$$

$$\gamma_{max} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(p + l - r - b)(b + l - r - p)}{(p + l - r + b)(b - l + r + p)}}. \tag{7}$$

Lungimea de cursă la unitatea de pompare S_A:

$$S_A = a(\gamma_{max} - \gamma), \text{ unde} \tag{8}$$

$$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2, \tag{9}$$

$$\gamma_1 = 2\text{arctg}\sqrt{\frac{(f+r-p)(r+p-f)}{(f+p+r)(f+p-r)}}, \tag{10}$$

$$\gamma_2 = 2\text{arctg}\sqrt{\frac{(f+l-b)(b+l-f)}{(f+l-b)(b-l+f)}}. \tag{11}$$

Viteza la unitatea de pompare V_A:

$$V_A = \frac{a}{b}\omega\, r\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \text{ unde} \tag{12}$$

$$\omega = \frac{\sin}{30}. \tag{13}$$

Pentru $n = 10\,\frac{\text{curse}}{\text{min}}$, $\omega = 1{,}0472 s^{-2}$; $\omega^2 = 1{,}0966$: (14)

$$\alpha = 2\pi - \varphi' - \varphi - \gamma - \beta$$

$$\beta = 2\text{arctg}\sqrt{\frac{(l+f-b)(b+f-l)}{(l+f+b)(b-f+l)}}, \tag{15}$$

$$f = \sqrt{p^2 + r^2 - 2p\cdot r\cdot\cos(\varphi+\varphi')}. \tag{16}$$

Factorul de cuplu F_c

$$F_c = \frac{a}{b}\cdot r\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \tag{17}$$

Accelerația la unitatea de pompare A_A:

$$A_A = \frac{1{,}0966\, r}{\sin^2\beta}\,\frac{a}{b}\left[\frac{r\sin^2(\alpha+\beta)}{l\sin\beta} - \sin\beta\cos\alpha - \frac{r\sin^2\alpha\cos\beta}{b\sin\beta}\right]. \tag{18}$$

Unghiul δ:

$$\delta = \pi - \gamma - \beta. \tag{19}$$

Toate unghiurile sînt măsurate în sens trigonometric.

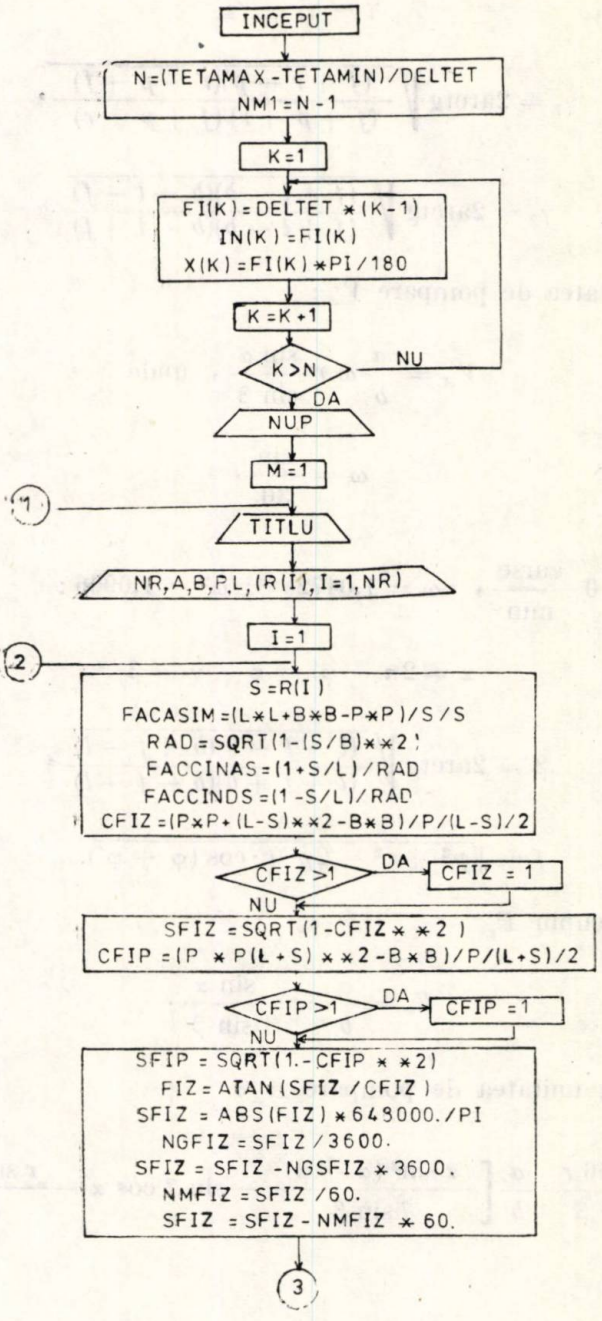


Fig. 3. — Schema bloc a programului PROCEX.

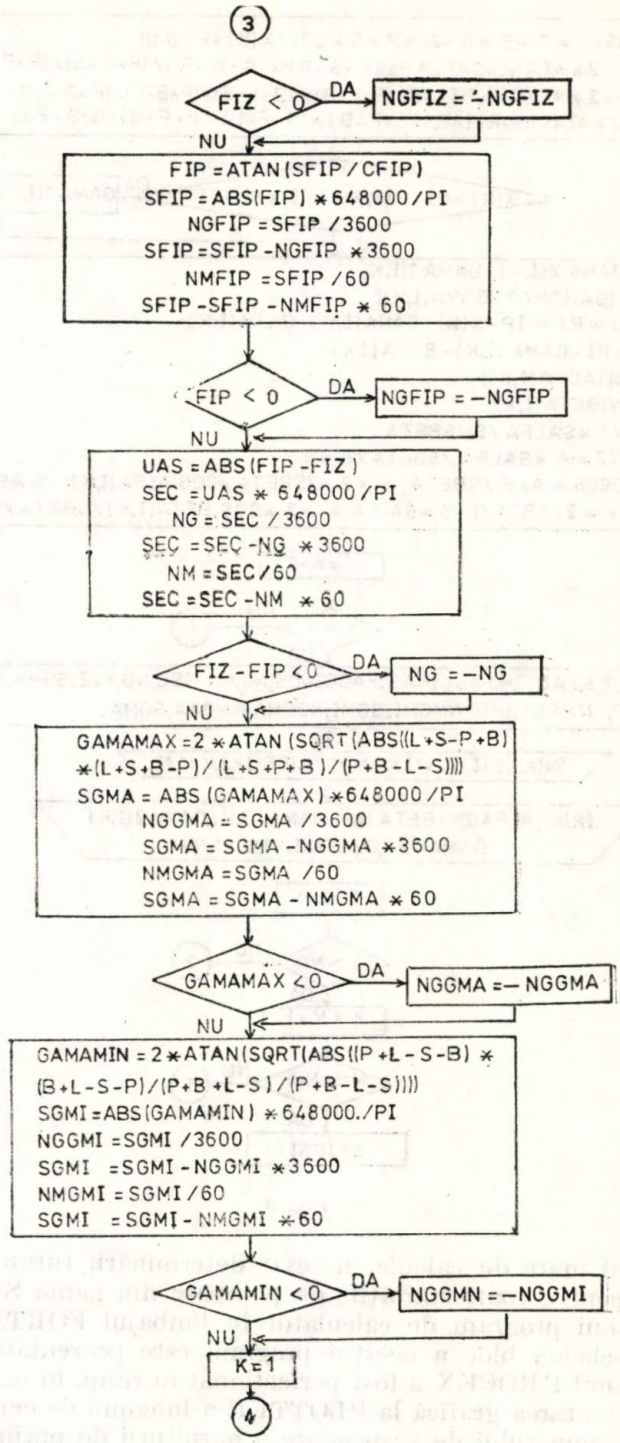

3
FIZ < 0
DA
NGFIZ = -NGFIZ
NU
FIP = ATAN (SFIP / CFIP)
SFIP = ABS(FIP) * 648000 / PI
NGFIP = SFIP / 3600
SFIP = SFIP - NGFIP * 3600
NMFIP = SFIP / 60
SFIP - SFIP - NMFIP * 60
FIP < 0
DA
NGFIP = -NGFIP
NU
UAS = ABS (FIP - FIZ)
SEC = UAS * 648000 / PI
NG = SEC / 3600
SEC = SEC - NG * 3600
NM = SEC / 60
SEC = SEC - NM * 60
FIZ - FIP < 0
DA
NG = -NG
NU
GAMAMAX = 2 * ATAN (SQRT (ABS ((L+S-P+B)
*(L+S+B-P) / (L+S+P+B) / (P+B-L-S))))
SGMA = ABS (GAMAMAX) * 648000 / PI
NGGMA = SGMA / 3600
SGMA = SGMA - NGGMA * 3600
NMGMA = SGMA / 60
SGMA = SGMA - NMGMA * 60
GAMAMAX < 0
DA
NGGMA = - NGGMA
NU
GAMAMIN = 2 * ATAN (SQRT (ABS ((P+L-S-B) *
(B+L-S-P) / (P+B+L-S) / (P+B-L-S))))
SGMI = ABS (GAMAMIN) * 648000. / PI
NGGMI = SGMI / 3600
SGMI = SGMI - NGGMI * 3600
NMGMI = SGMI / 60
SGMI = SGMI - NMGMI * 60
GAMAMIN < 0
DA
NGGMN = -NGGMI
NU
K = 1
4
B

Fig. 3

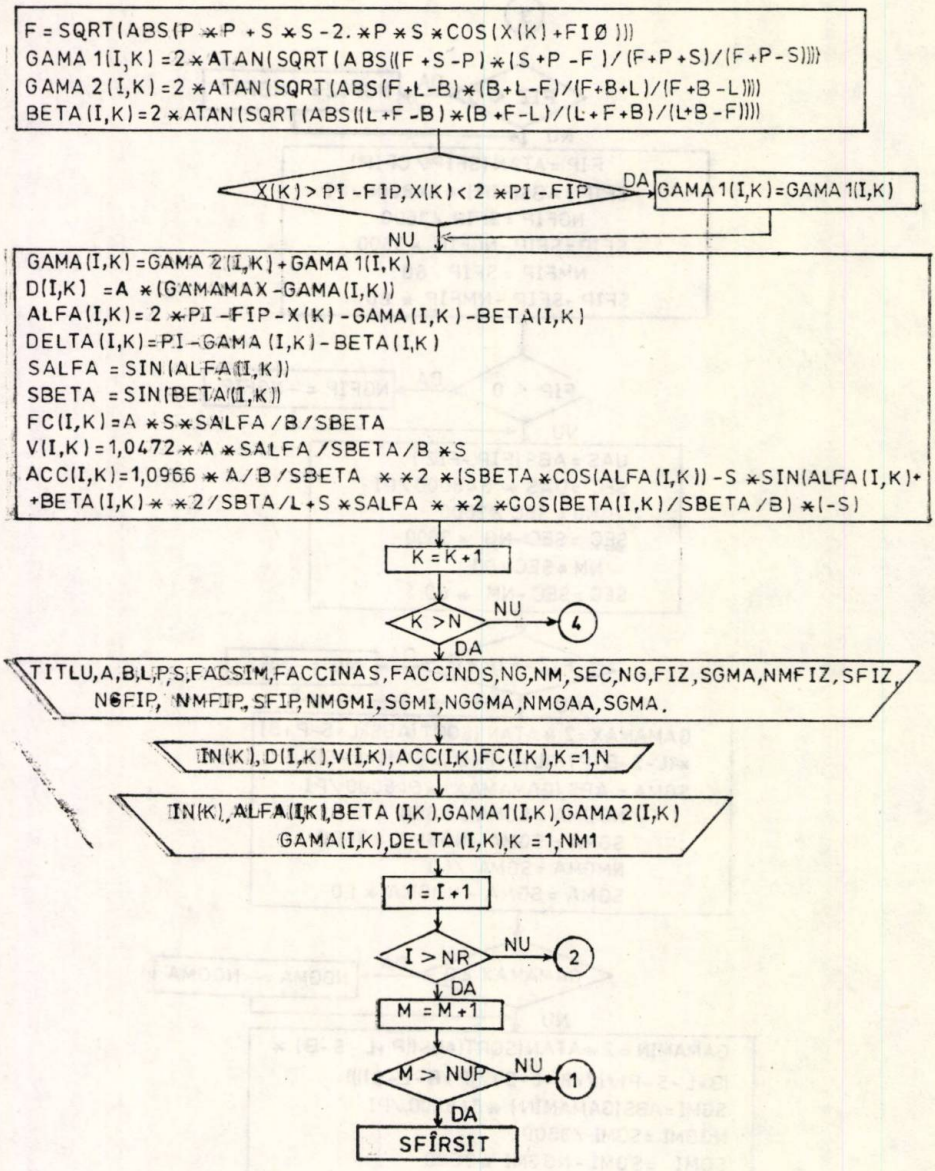


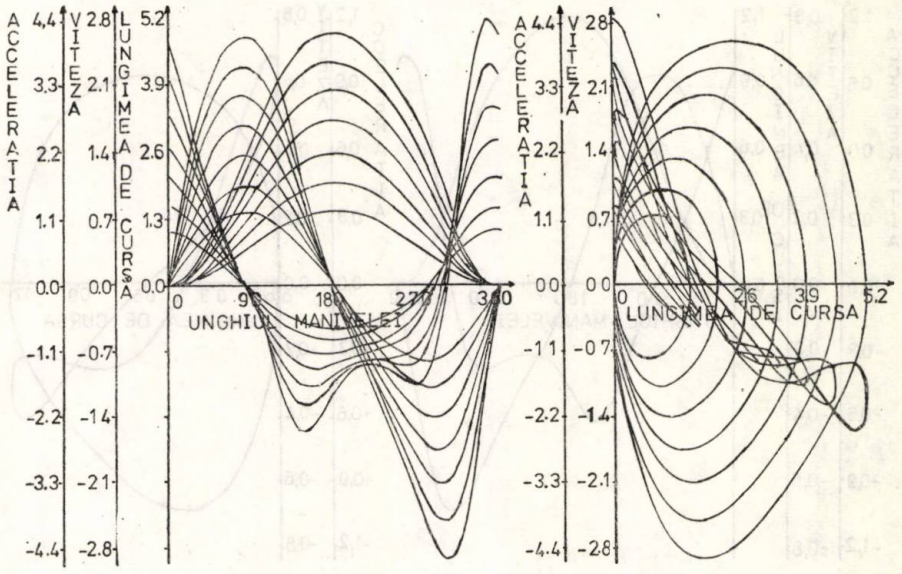
Fig. 3

Volumul mare de calcule, necesar determinării tuturor elementelor cinematice, pentru toate unitățile de pompare din gama STAS, a impus elaborarea unui program de calculator în limbajul FORTRAN denumit PROCEX. Schema bloc a acestui program este prezentată în figura 3.

Programul PROCEX a fost perfecționat în timp, în mai multe etape, pentru reprezentarea grafică la PLOTTER a lungimii de cursă, a vitezei și a accelerației punctului de suspendare a garniturii de prăjini de pompare

U.P. 15.0-5.000-10.000

Curbe cinematice



U.P. 15,0-5,000-10.000

Unghiuri cinematice

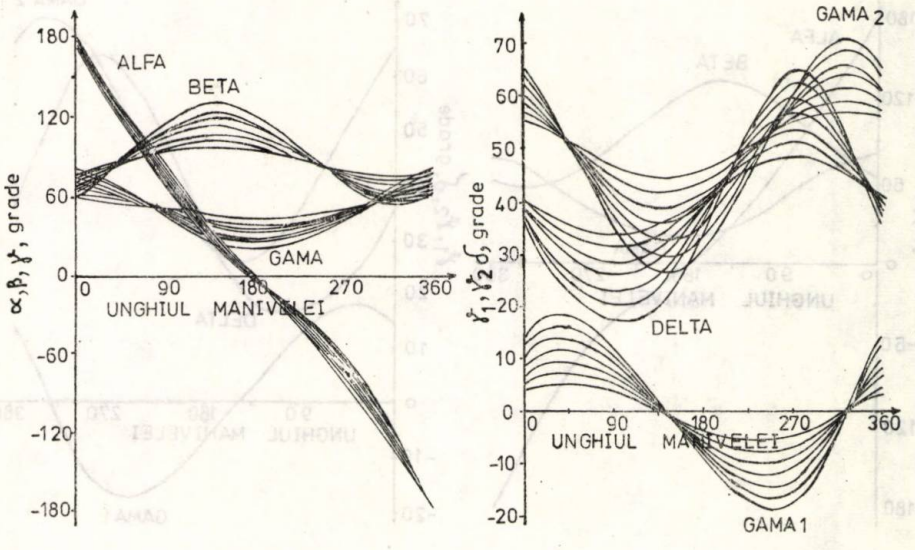
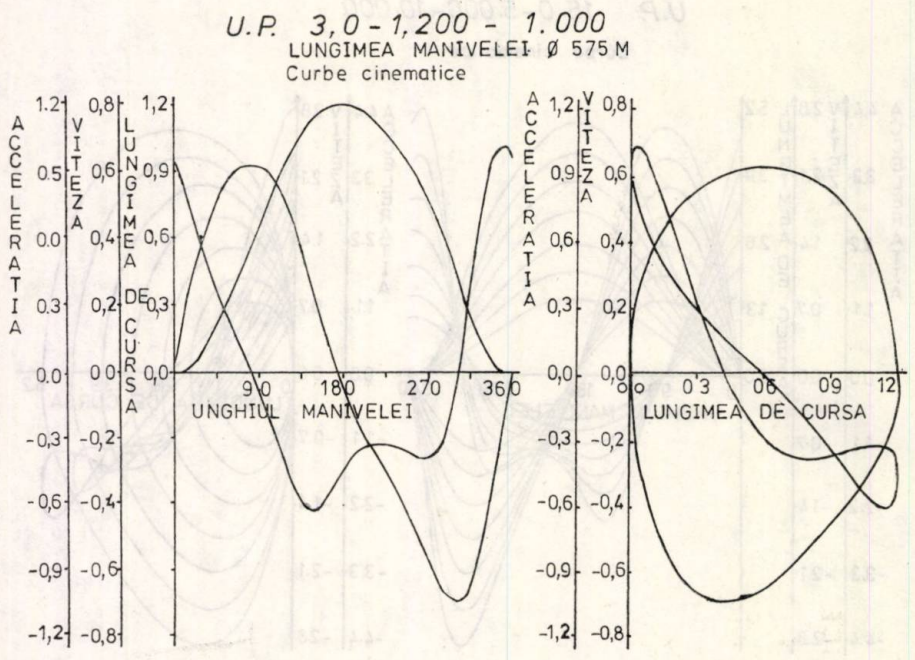


Fig. 4.


U.P. 3,0 - 1,200 - 1.000
LUNGIMEA MANIVELEI Ø 575 M
Curbe cinematice
ACCELERATIA
VITEZA
LUNGIMEA DE CURSA
UNGHIUL MANIVELEI
ACCELERATIA
VITEZA
LUNGIMEA DE CURSA

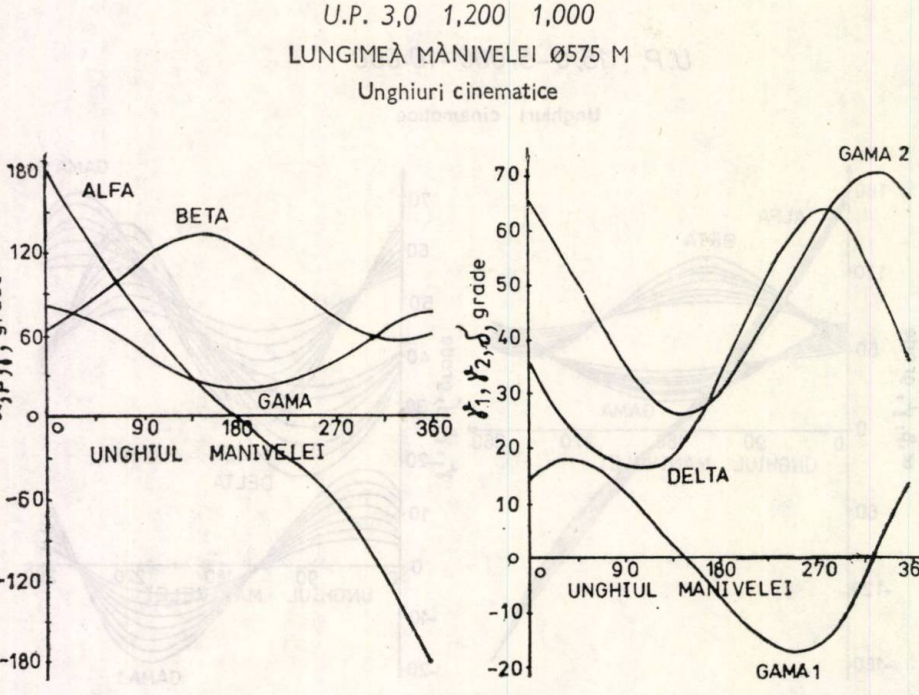

U.P. 3,0 1,200 1,000
LUNGIMEA MÀNIVELEI Ø575 M
Unghiuri cinematice
ALFA
BETA
GAMA
UNGHIUL MANIVELEI
α, β, γ, grade
GAMA 2
DELTA
GAMA 1
UNGHIUL MANIVELEI
γ1, γ2, δ, grade

Fig. 5.

la U.P. în funcție de unghiul descris de butonul manivelei, a vitezei și a accelerației în funcție de lungimea de cursă, precum și variația unghiurilor geometriei U.P.

Ultimul program de reprezentări grafice a fost elaborat în limbaj BASIC pentru prelucrarea pe calculator WANG.

Curbele cinematice obținute la PLOTTER sînt redate în figura 4 (pentru toate lungimile de cursă de la o U.P.) și în figura 5 (pentru o lungime de cursă).

Celelalte curbe cinematice sînt prezentate în anexa 1.

Rezultatele calculelor analitice sînt prezentate în anexa 2.

CONCLUZII

Analizînd atît datele obținute la imprimantă, cît și dispunerea curbelor din reprezentările grafice, se desprind următoarele concluzii:

1. Odată cu creșterea lungimilor de cursă, înregistrarea valorilor maxime ale acestora este deplasată spre valori mai mici de 180° ale unghiului descris de butonul manivelei.

2. Punctele caracteristice ale curbei accelerației sînt mai bine puse în evidență la valori mai mari ale razei manivelei. Din această cauză, pentru valorile inferioare ale lungimii razei manivelei parametrii cinematici se pot evalua după teoria cinematică elementară, fără să apară erori importante din punct de vedere practic.

3. Unghiul de asimetrie al U.P. variază între —4°20′55″ și 4°13′44″, iar precizarea din literatura de specialitate [1], privind suprapunerea condiției de simetrie cu lungimea maximă de cursă nu se întîlnește, condiția de simetrie putînd fi întîlnită la o valoare oarecare a lungimii de cursă. În plus, sînt cazuri cînd condiția de simetrie nu se suprapune cu nici una din lungimile de cursă realizabile la U.P.

4. Tabelele obținute la imprimantă (anexa 2) permit cunoașterea tuturor elementelor cinematice pentru numărul de curse/min = 10 și a unghiurilor dependente de lungimea manivelei variabile între limitele:

$$\varphi_0 = 31°30'46'' - 42°46'50'',$$
$$\varphi' = 35°51'57'' - 42°17'12'',$$
$$\gamma_{min} = 22°8'2'' - 42°47'17'',$$
$$\gamma_{max} = 58°4'27'' - 80°5'1''.$$

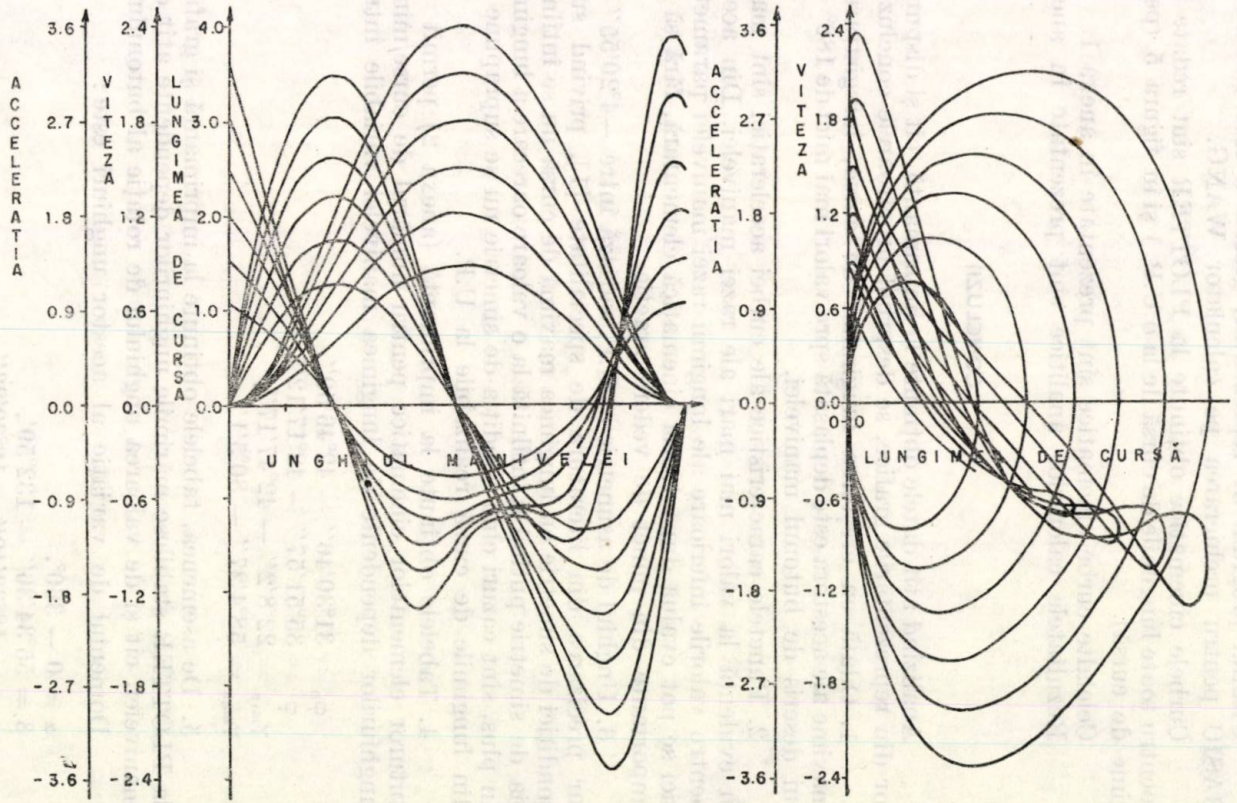
5. De asemenea, tabelele obținute la imprimantă și graficile ridicate la PLOTTER stabilesc mărimile unghiurilor dependente atît de lungimea manivelei, cît și de valoarea unghiului de rotație al butonului manivelei.

Domeniul de variație al acestor unghiuri este:

$$\alpha = 0 - 360°,$$
$$\beta = 55°34'36'' - 132°59',$$
$$\gamma_1 = -18°33'49'' - 18°30'23'',$$
$$\gamma_2 = 25°46'59'' - 71°2'48'',$$
$$\gamma = 22°10'24'' - 80°5'58'',$$
$$\delta = 16°40'23'' - 65°32'46''.$$

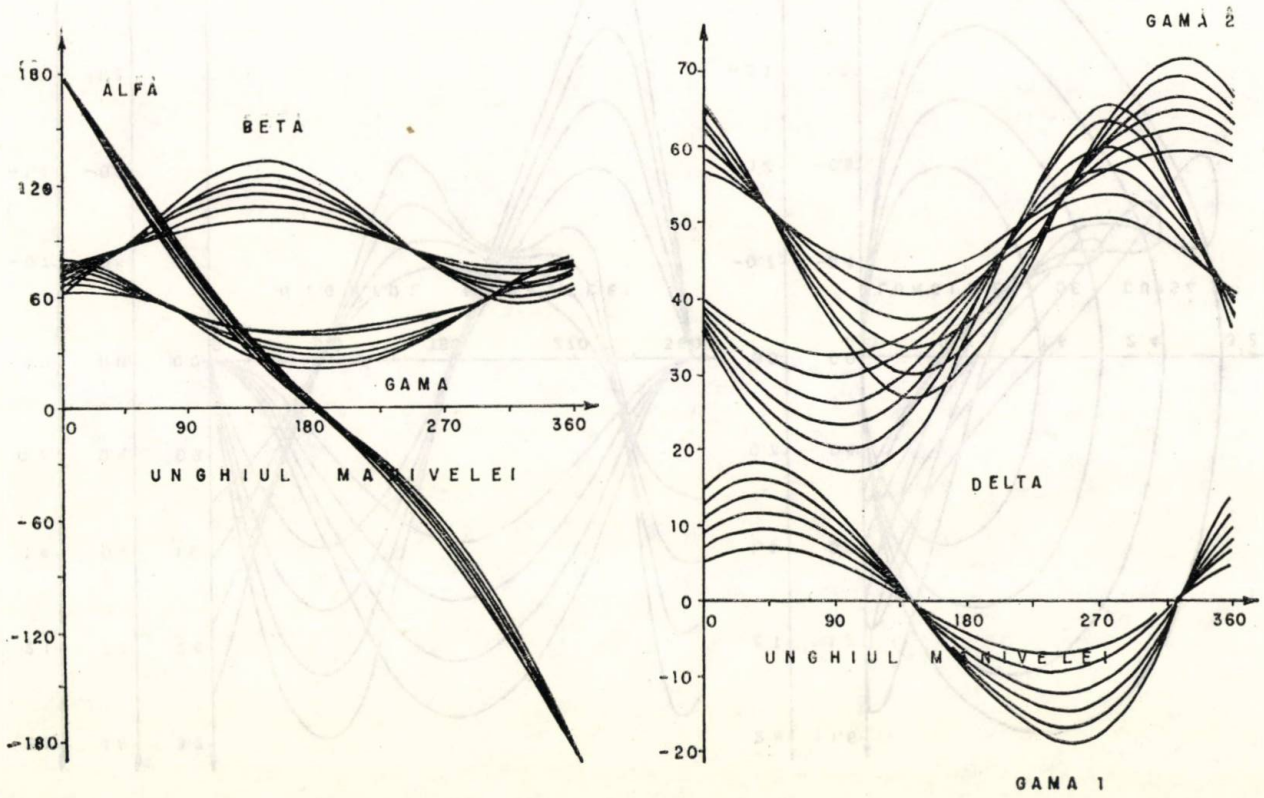
CARACTERISTICILE CINEMATICE ALE UNITATILOR DE POMPARE TIP VULCAN DIN GAMA STAS

U.P 15.0-4.000-10.000



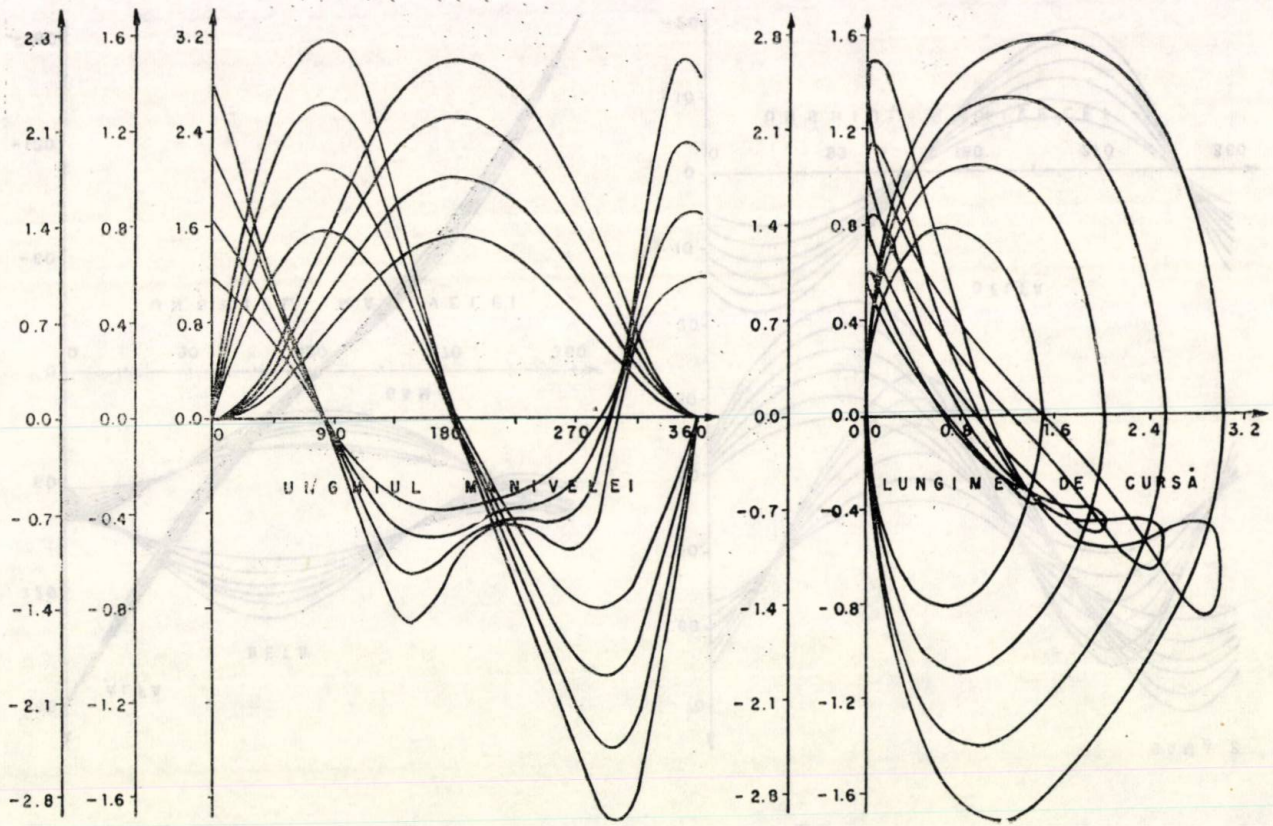
Anexa 1—1 (Fig. 1)

U.P. 15.0 - 4.000 - 10.000

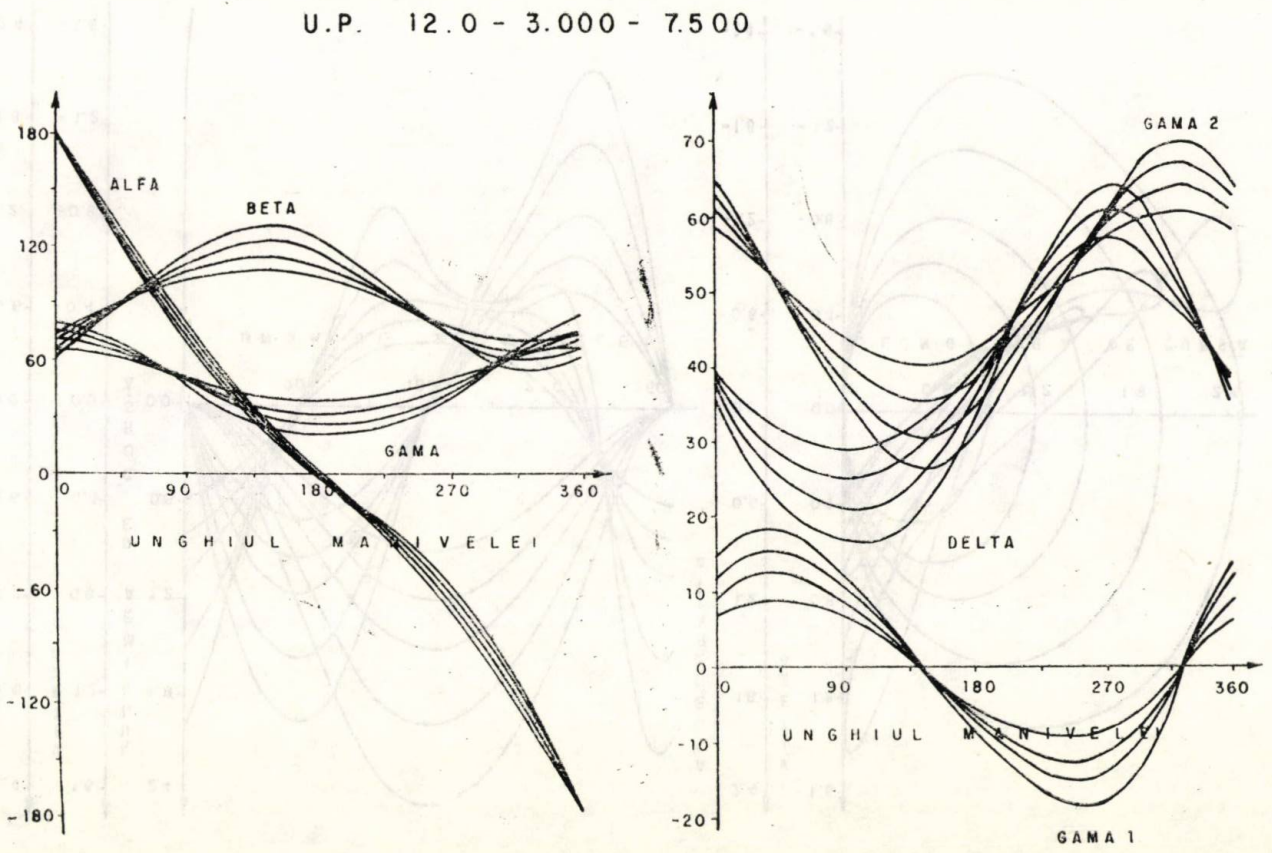


Anexa 1—1 (Fig. 1)

U. P. 12.0 - 3.000 - 7.500

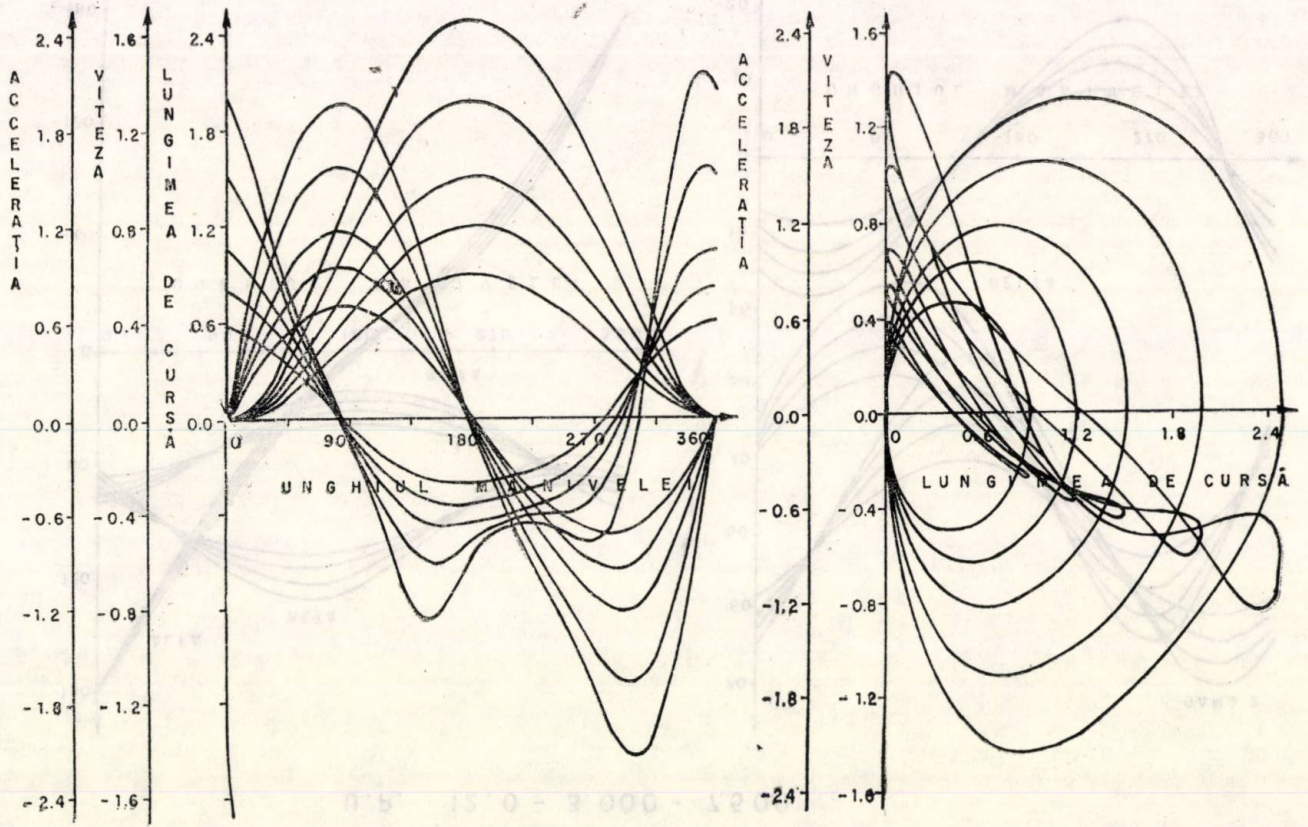


Anexa 1—2 (Fig. 2)



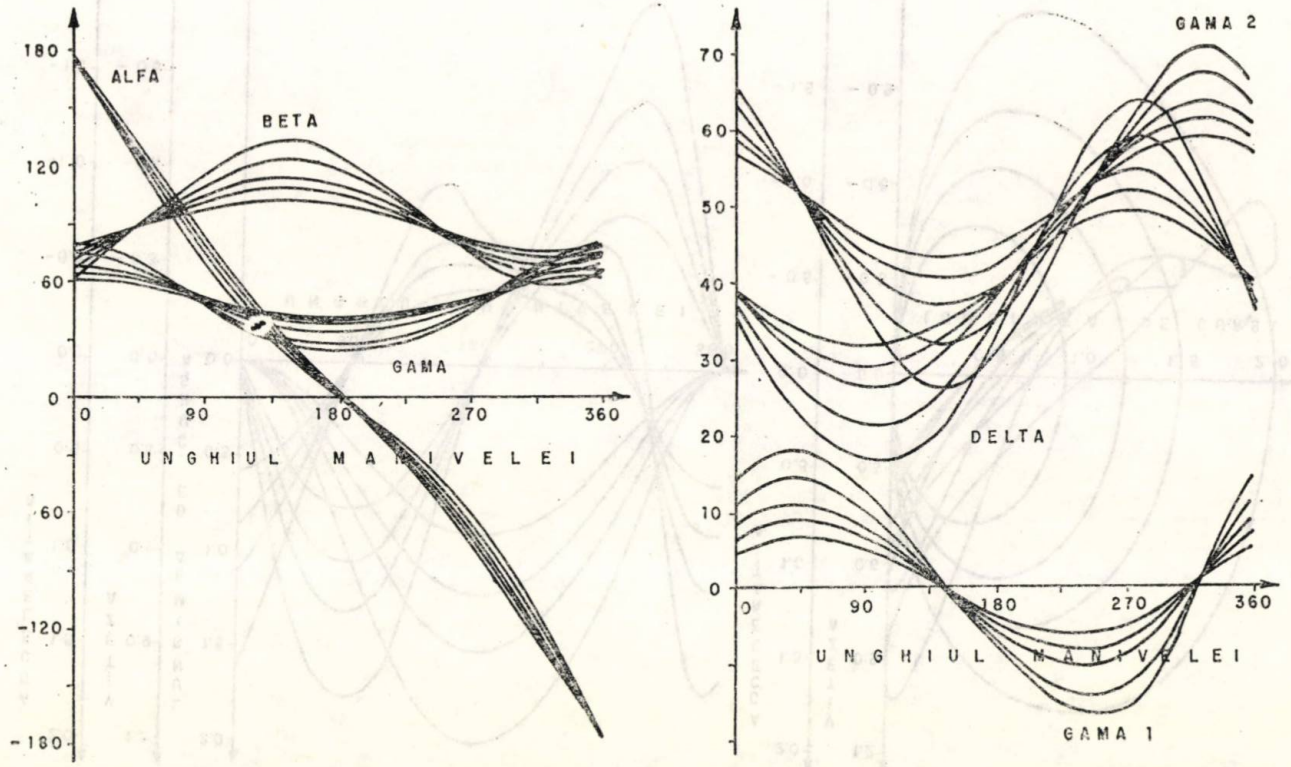
Anexa 1—2 (Fig. 2)

U.P. .9.0 - 2.500 - 5.500

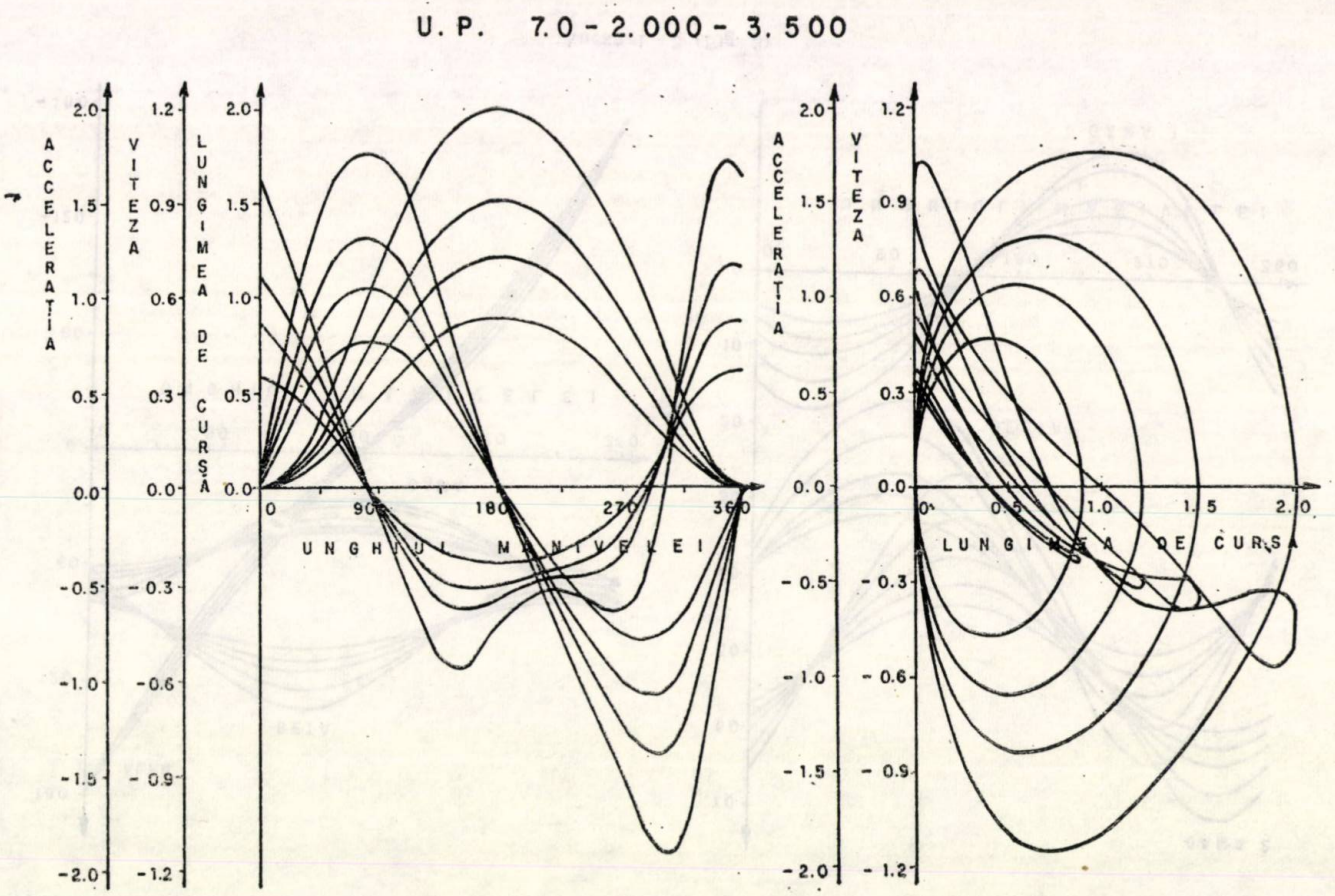


Anexa 1—3 (Fig. 3)

U. P. 9.0 - 2.500 - 5.500

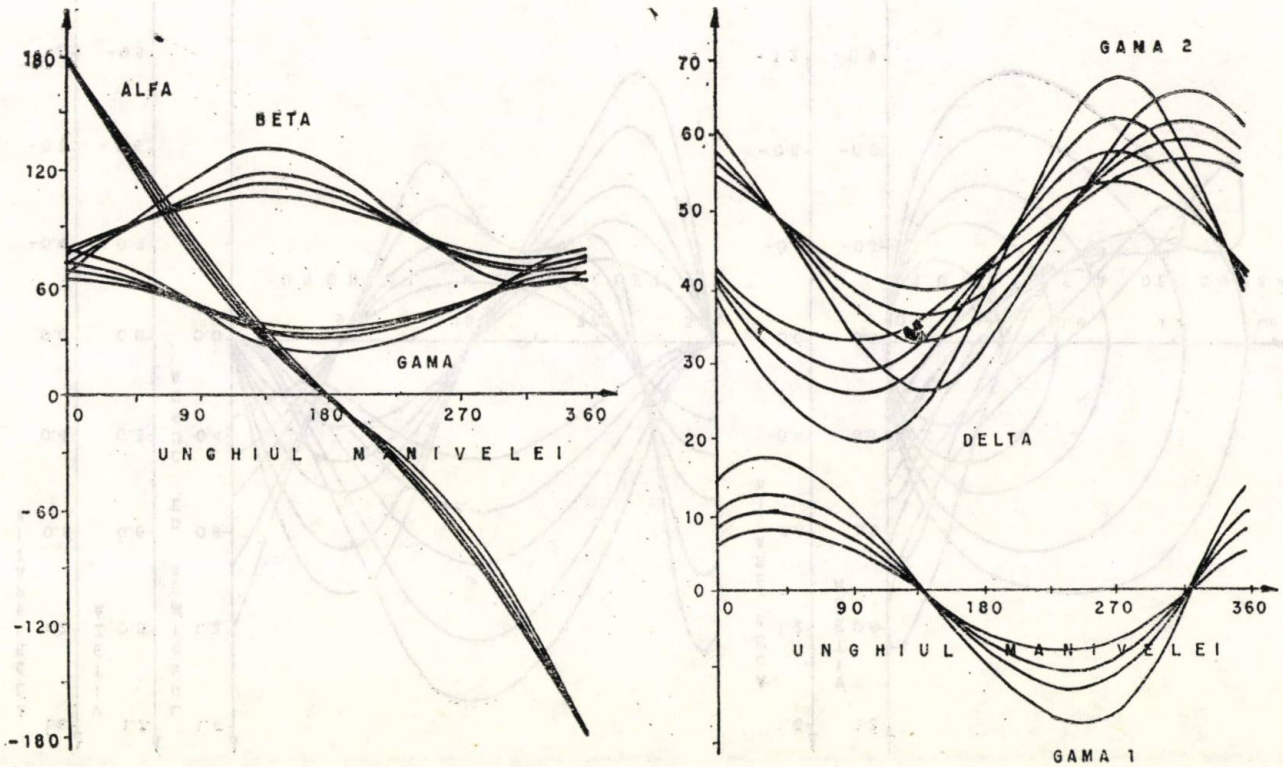


Anexa 1—3 (Fig. 3)

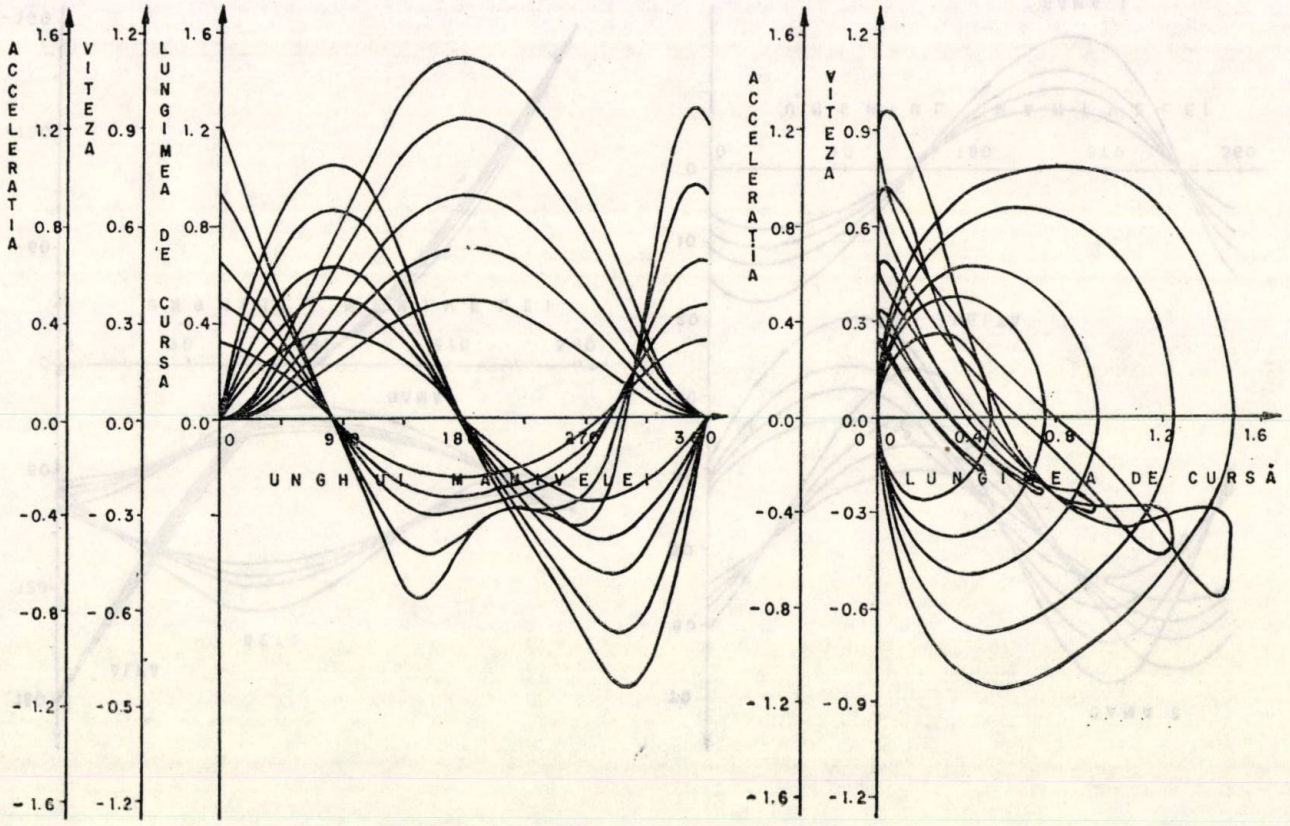


Anexa 1—4 (Fig. 4)

U.P. 7.0 - 2.000 - 3.500

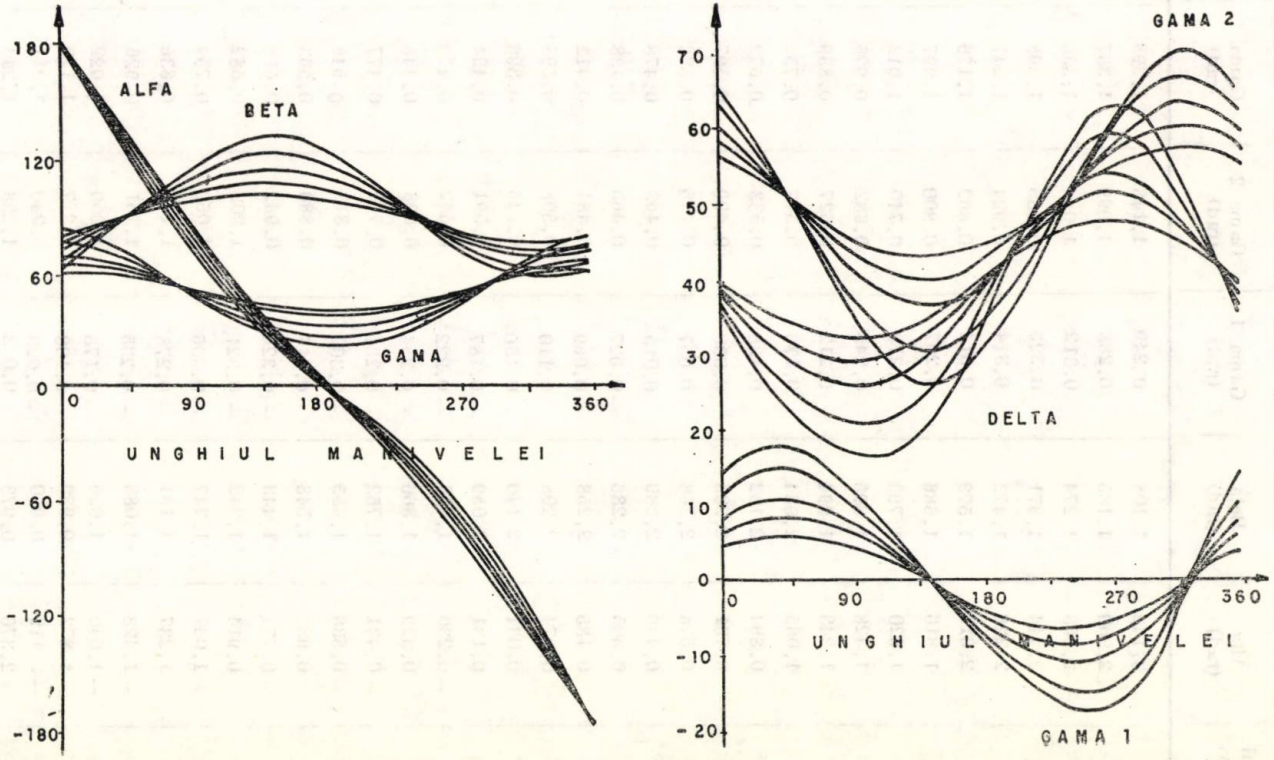


Anexa 1—4 (Fig. 4)



Anexa 1—5 (Fig. 5)

U. P. 5.0 - 1.500 - 2.000



Anexa 1—5 (Fig. 5)

Anexa

VALOAREA UNGHIURILOR

Unghi maniv. (gr)	Alfa (rad)	Beta (rad)	Gama 1 (rad)	Gama 2 (rad)	Gama (rad)	Delta (rad)
0	3,142	1,108	0,249	1,148	1,398	0,636
10	2,900	1,185	0,288	1,099	1,387	0,570
20	2,668	1,274	0,312	1,044	1,356	0,512
30	2,444	1,371	0,323	0,985	1,308	0,463
40	2,228	1,473	0,314	0,924	1,247	0,421
50	2,019	1,579	0,314	0,862	1,176	0,387
60	1,816	1,686	0,297	0,800	1,097	0,358
70	1,620	1,793	0,273	0,740	1,013	0,336
80	1,428	1,896	0,245	0,682	0,926	0,319
90	1,243	1,994	0,212	0,627	0,839	0,309
100	1,065	2,084	0,176	0,577	0,753	0,305
110	0,894	2,162	0,138	0,533	0,672	0,308
120	0,731	2,225	0,098	0,499	0,597	0,320
130	0,578	2,268	0,057	0,475	0,532	0,342
140	0,436	2,289	0,015	0,463	0,478	0,374
150	0,305	2,286	−0,027	0,465	0,438	0,418
160	0,185	2,258	−0,069	0,481	0,412	0,472
170	0,074	2,208	−0,110	0,508	0,398	0,536
180	−0,031	2,140	−0,150	0,545	0,396	0,605
190	−0,131	2,059	−0,187	0,591	0,404	0,680
200	−0,230	1,966	−0,222	0,642	0,420	0,755
210	−0,329	1,866	−0,254	0,698	0,445	0,831
220	−0,431	1,762	−0,281	0,757	0,477	0,903
230	−0,538	1,655	−0,302	0,818	0,516	0,971
240	−0,653	1,548	−0,317	0,880	0,563	1,031
250	−0,777	1,443	−0,324	0,942	0,618	1,081
260	−0,914	1,342	−0,321	1,002	0,682	1,118
270	−1,067	1,247	−0,306	1,060	0,754	1,140
280	−1,237	1,161	−0,278	1,114	0,836	1,144
290	−1,428	1,088	−0,235	1,161	0,926	1,128
300	−1,640	1,029	−0,178	1,200	1,022	1,091
310	−1,872	0,989	−0,108	1,227	1,119	1,034
320	−2,119	0,970	−0,029	1,240	1,211	0,961
330	−2,376	0,973	0,052	1,238	1,290	0,879
340	−2,635	0,998	0,129	1,220	1,350	0,793
350	−2,892	1,044	0,196	1,190	1,386	0,711
360	−3,142	1,108	0,249	1,148	1,398	0,636

2

CINEMATICE

Unghi maniv. (gr)	Alfa (rad)	Beta (rad)	Gama 1 (rad)	Gama 2 (rad)	Gama (rad)	Delta (rad)
5	3,020	1,145	0,270	1,125	1,395	0,602
15	2,783	1,228	0,301	1,072	1,373	0,540
25	2,555	1,322	0,319	1,015	1,334	0,486
35	2,336	1,422	0,324	0,955	1,279	0,441
45	2,123	1,526	0,319	0,893	1,213	0,403
55	1,917	1,633	0,306	0,831	1,137	0,372
65	1,717	1,740	0,286	0,770	1,056	0,346
75	1,523	1,845	0,260	0,710	0,970	0,327
85	1,335	1,946	0,229	0,654	0,883	0,313
95	1,153	2,040	0,195	0,601	0,796	0,306
105	0,978	2,124	0,158	0,554	0,712	0,305
115	0,811	2,195	0,118	0,515	0,633	0,313
125	0,653	2,249	0,078	0,485	0,563	0,329
135	0,506	2,282	0,036	0,467	0,503	0,357
145	0,369	2,290	−0 006	0,463	0,456	0,395
155	0,244	2,275	−0,048	0,471	0,423	0,444
165	0,128	2,235	−0,090	0,493	0,403	0,503
175	0,021	2,176	−0,130	0,525	0,395	0,570
185	−0,081	2,101	−0,169	0,567	0,398	0,642
195	−0,181	2,013	−0,205	0,616	0,411	0,717
205	−0,279	1,917	−0,238	0,670	0,431	0,793
215	−0,380	1,814	−0,268	0,727	0,460	0,867
225	−0,484	1,709	−0,292	0,788	0,495	0,938
235	−0,595	1,601	−0,311	0,849	0,538	1,002
245	−0,714	1,495	−0,322	0,911	0,589	1,057
255	−0,844	1,392	−0,324	0,972	0,649	1,101
265	−0,989	1,294	−0,315	1,032	0,717	1,131
275	−1,150	1,203	−0,294	1,088	0,794	1,145
285	−1,330	1,123	−0,258	1,139	0,880	1,139
295	−1,532	1,056	−0,208	1,182	0,974	1,112
305	−1,754	1,006	−0,144	1,215	1,071	1,064
315	−1,994	0,976	−0,069	1,235	1,166	0,999
325	−2,247	0,968	0,012	1,241	1,253	0,920
335	−2,506	0,983	0,092	1,231	1,323	0,836
345	−2,764	1,019	0,164	1,207	1,371	0,752
355	−3,018	1,074	0,224	1,170	1,395	0,673
365	−3,263	1,145	0,270	1,125	1,395	0,602

Anexa

REZULTATELE CALCULELOR CINEMATICE PENTRU U.P. 15,0—5.000—10.000
Lungimea brațului anterior = 5,0000 M
Lungimea brațului posterior = 3,2000 M
Lungimea bielei = 3,7700 M
Distanța dintre centre = 4,8180 M
Lungimea manivelei = 1,5350 M
Factorul de asimetrie = 0,5262

Unghi maniv. grade	Lungime cursa m	Viteza tij. pol. m/s	Accel. tij. pol. m/s^2	Fac. de cuplu m	Unghi maniv. grade	Lungime cursa m
0	0,000	—0,000	4,137	—0,000	5	0,014
15	0,121	0,935	3,301	0,893	20	0,210
30	0,449	1,645	2,391	1,571	35	0,594
45	0,926	2,140	1,594	2,044	50	1,110
60	1,504	2,453	0,920	2,342	65	1,711
75	2,139	2,606	0,312	2,489	80	2,357
90	2,794	2,608	—0,302	2,491	95	3,010
105	3,430	2,449	—0,983	2,339	110	3,630
120	4,004	2,112	—1,710	2,017	125	4,174
135	4,472	1,605	—2,296	1,533	140	4,597
150	4,798	1,000	—2,467	0,954	155	4,873
165	4,973	0,409	—2,207	0,390	170	4,999
180	5,010	—0,092	—1,800	0,088	185	4,996
195	4,935	—0,499	—1,486	—0,477	200	4,888
210	4,765	—0,849	—1,336	—0,810	215	4,690
225	4,512	—1,180	—1,337	—1,127	230	4,409
240	4,174	—1,526	—1,448	—1,457	245	4,042
255	3,746	—1,908	—1,603	—1,822	260	3,581
270	3,217	—2,320	—1,660	—2,215	275	3,018
285	2,587	—2,706	—1,337	—2,584	290	2,358
300	1,878	—2,925	—0,256	—2,793	305	1,634
315	1,157	—2,764	1,632	—2,640	320	0,933
330	0,538	—2,106	3,533	—2,011	335	0,375
345	0,134	—1,087	4,408	—1,038	350	0,059
360	0,000	—0,000	4,137	0,000		

2—1

Indice cinematic ascendent = 1,6037
Indice cinematic descendent = 0,6756
Unghiul de asimetrie = — 3°0′1″
Unghiul fio = 33°27′17″
Unghiul fip = 36°27′18″
Unghiul gama min. = 22°38′45″
Unghiul gama max = 80°5′1″

Viteza tij. pol m/s	Accel. tij. pol. m/s²	Fac. de cuplu m	Unghi maniv grade	Lungime cursa m	Viteza tij. pol. m/s	Accel. tij. pol. m/s²	Fac. de cuplu m
0,335	3,890	3,320	10	0,055	0,647	3,605	0,618
1,197	2,991	1,143	25	0,320	1,434	2,686	1,369
1,833	2,110	1,750	40	0,753	1,997	1,844	1,907
2,263	1,358	2,161	55	1,303	2,367	1,134	2,260
2,521	0,714	2,407	70	1,923	2,572	0,512	2,456
2,624	0,112	2,505	85	2,576	2,625	0,092	2,506
2,574	—0,520	2,458	100	3,223	2,521	0,747	2,408
2,357	—1,225	2,251	115	3,822	2,245	—1,470	2,144
1,960	—1,936	1,872	130	4,330	1,790	—2,135	1,710
1,409	—2,409	1,345	145	4,706	1,205	—2,466	1,151
0,796	—2,417	0,760	160	4,931	0,598	—2,326	0,571
0,230	—2,072	0,220	175	5,011	0,064	—1,933	0,061
—0,237	—1,678	—0,226	190	4,971	—0,327	—1,573	—0,355
—0,620	—1,417	—0,592	205	4,831	—0,736	—1,368	—0,703
—0,959	—1,321	—0,916	220	4,605	—1,069	—1,322	—1,021
—1,292	—1,364	—1,234	235	4,296	—1,408	—1,402	—1,344
—1,649	—1,499	—1,575	250	3,899	—1,776	—1,552	—1,696
—2,043	—1,643	—1,951	265	3,405	—2,181	—1,666	—2,083
—2,457	—1,613	—2,346	280	2,808	—2,587	—1,511	—2,471
—2,808	—1,077	—2,681	295	2,120	—2,883	—0,718	—2,753
—2,923	0,304	—2,791	310	1,392	—2,872	0,944	—2,742
—2,599	2,325	—2,482	325	0,725	—2,378	2,973	—2,271
—1,793	2,968	—1,712	340	0,240	—1,449	4,261	—1,384
—0,718	4,421	—0,686	355	0,015	—0,353	0,322	—0,337

Pentru cîteva U.P. (12—3000—75000 sau 5500, 10—3660—7500, 9—4000—7500 etc) unghiurile de mai sus au practic aceiași valoare.

6. Programele de calculator sînt flexibile astfel încît se pot utiliza pentru orice variabilă de intrare constituind o metodologie prețioasă pentru proiectanți în vederea perfecționării constructive a U.P. vechi sau realizării U.P. noi.

Primită la redacție la 12 martie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. GRIGORE IOACHIM, CONSTANTIN POPA, *Exploatarea zăcămintelor de țiței*, Edit. tehnică, București, 1979.
2. *** *Unități de pompare cu sarcini în prăjina lustruită de la 3—15 t*. Prospect, Uzina Vulcan București.
3. NICOLAE PETRE, *Contribuții la studiul comportării instalației de pompaj din sondă*, Teza de doctorantură, IPG—Ploiești, 1980.
4. *** *Specification for Pumping Units*, API Std. 11 E, Eleventh Edition, I 1971.
5. NICOLAE PETRE, *Studiul cinematic al instalațiilor de pompare cu prăjini*, Referat doctorantură, ICPPG-Cîmpina, 1973.
6. P. J. JESPERSEN, R. N. LAIDLAW, *Unique rod pumping unit improves lifting efficiency*, W.O. IV/1980.
7. T. K. ALIVERDIZADE, M. A. GUSEINOV, *K voprosu kinematiki bezbalansirnogo privoda konstrucții*, AzINMaşa, ANH, 2 (1970).
8. *** *Switch to Alpha i pumping unit ups well's production by 60%*, PEI IV 1979.
9. R. D. EWING, J. E. MAKIS, *Pumping the Deep Seel Improvements in Sucker — Rod Pumping Systems*, Drilling—DCW, **VII** (1976).
10. WOINAROVSKI ș.a., *Cinematica exactă a dispozitivului de acționare al pompelor de mare adîncime*, Lucrările IPGG—București, 1955.
11. N. PETRE, P. CHIȚU MILITARU, *Cinematica exactă a unităților de pompare clasice*, Sesiunea de comunicări a tinerilor cercetători și specialiști din județul Prahova, Ediția a IV-a, Ploiești, 1977.

CALCULUL GRAFIC AL UNGHIURILOR DE ÎNCLINARE DE DIVIZARE AL DANTURILOR CONICE CIRCULARE

de N. N. ANTONESCU, H. BODNĂRESCU, E. VOICU, L. RIZEA, N. GRIGORE
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Lucrarea prezintă o metodă grafică originală în determinarea unghiurilor de înclinare de divizare exterior și interior ale danturii roților dințate conice cu dantură circulară. Sînt expuse principalele etape de rezolvare a problemei, cu prezentarea avantajelor rezultate din utilizarea nomogramei originale stabilite.

Roțile dințate conice, cu dantură circulară de înălțime constantă (fig. 1), executate pe mașina de danturat conic în arc de cerc 528 S, prezintă unghiuri de înclinare variabile de-a lungul dinților.

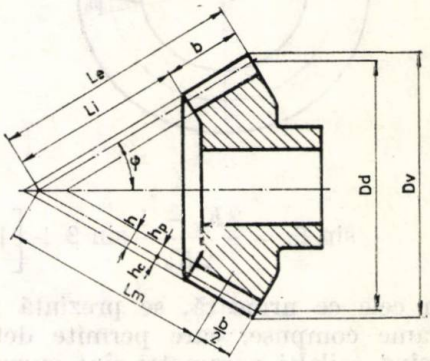


Fig. 1. — Roată dințată conică, cu dantură circulară, de înălțime constantă.

Se fac următoarele notații:

β reprezintă unghiul de înclinare de divizare median al dintelui, în grad;

β_e — unghiul de înclinare de divizare exterior al dintelui, în grad;
β_i — unghiul de înclinare de divizare interior al dintelui, în grad;
L_e — lungimea exterioară a generatoarei de divizare, în mm;
L_i — lungimea interioară a generatoarei de divizare, în mm;
L_m — lungimea mediană a generatoarei de divizare, în mm;
b — lățimea danturii, în mm;
h_c — înălțimea capului de divizare al dintelui, în mm;
h_p — înălțimea piciorului de divizare al dintelui, în mm;
h — înălțimea dintelui, în mm;
φ — semiunghiul conului de divizare, în grad;
D_d — diametrul cercului de divizare (exterior), în mm;
D_v — diametrul cercului de vîrf (la exterior), în mm;
D_u — diametrul capului port-cuțit, în mm;
$r_e = \frac{D_u}{2}$ — raza capului port-cuțit, în mm;
$K_v = \frac{L_e}{b}$ — coeficientul lățimii danturii.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 6, ,1982 P. 715—719

Unghiul de înclinare de divizare interior, β_i, şi unghiul de înclinare de divizare exterior, β_e (fig. 2), se determină în funcţie de unghiul de înclinare de divizare median β cu relaţiile:

$$\sin \beta_i = \frac{2K_v - 1}{2K_v - 2} \sin \beta + \frac{3 - 4K_v}{4(K_v - 1)} \frac{L_e}{D_u K_v}, \tag{1}$$

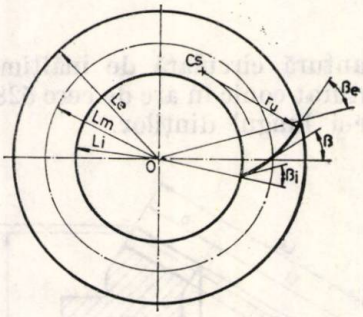


Fig. 2. — Unghiurile de înclinare ale dintelui unei roţi dinţate conice, cu dantură circulară, de înălţime constantă.

şi

$$\sin \beta_e = \frac{2K_v - 1}{2K_v} \sin \beta + \left[1 - \left(\frac{2K_v - 1}{2K_v}\right)^2\right] \frac{L_e}{D_u}. \tag{2}$$

În cele ce urmează, se prezintă metodologia de construire a unei nomograme compuse, care permite determinarea unghiurilor β_i şi β_e, atunci cînd ceilalţi parametri sînt cunoscuţi.

Pentru aceasta se notează:

$$\frac{D_u}{L_e} = \theta, \tag{3}$$

$$\theta \sin \beta = u, \tag{4}$$

$$uf(K_b) + g(K_v) = v, \tag{5}$$

$$UF(K_v) + G(K_v) = V. \tag{6}$$

Rezultă

$$\sin \beta_i = \frac{v}{\theta}, \tag{7}$$

$$\sin \beta_e = \frac{V}{\theta}, \tag{8}$$

unde s-a notat

$$f(K_v) = \frac{2K_v - 1}{2(K_v - 1)}; \quad g(K_v) = \frac{3 - 4K_v}{4K_v(K_v - 1)} \tag{9}$$

şi

$$F(K_v) = \frac{2K_v - 1}{2K_v}; \quad G(K_v) = 1 - \left(\frac{2K_v - 1}{2K_v}\right)^2. \tag{10}$$

Ţinînd seama de limitele de variaţie a parametrilor şi a funcţiilor, precum şi de dimensiunea formatului A_4, ales pentru reprezentarea respectivă, s-au stabilit ecuaţiile Soreau:

a) Pentru relaţiile (1), (2), (7), (8), avînd forma I canonică a ecuaţiilor de ordinul al treilea de nomografiere:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2\theta \\ 1 & 3 & \frac{1}{40}(50 - D_u) \\ 1 & \frac{3(80 - L_e)}{80 + L_e} & \frac{1\,000}{80 + L_e} \end{vmatrix} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2\theta \\ 1 & 5 & -3u \\ 1 & \frac{5(2 - 3\sin\beta)}{2 + 3\sin\beta} & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{12}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2\theta \\ 1 & 4 & -2(v + 1) \\ 1 & \frac{4(1 - \sin\beta_i)}{1 + 3\sin\beta_i} & \frac{-2}{1 + \sin\beta_i} \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2\theta \\ 1 & 4 & 2{,}8(V + 0{,}5) \\ 1 & \frac{4(1 - 1{,}4\sin\beta_e)}{1 + 1{,}4\sin\beta_e} & \frac{-1{,}4}{1 + 1{,}4\sin\beta_e} \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Ecuaţiile (13) şi (14) au fost stabilite impunîndu-se şi condiţia ca suporturile scărilor v şi V să coincidă.

b) Pentru relaţiile (5) şi (6), care sînt de tip Cauchy,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2(v + 1) \\ 1 & 1 & -3u \\ 1 & -\frac{-2f(K_v) + 3}{3 - 2f(K_v)} & \frac{-6[g(K_v) + 1]}{3 - 2f(K_v)} \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2{,}8(V + 0{,}5) \\ 1 & 1 & -3u \\ 1 & -\frac{3 + 2{,}8F(K_v)}{3 - 2{,}8F(K_v)} & \frac{-8{,}4[G(K_v) + 0{,}5]}{3 - 2{,}8F(K_v)} \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Scara corespunzătoare parametrului K_v, conform relaţiei (15) a fost notată cu (K_{v-i}), ea ducînd la determinarea lui β_i, iar scara lui K_v, conform relaţiei (16) a fost notată cu (K_{v-e}), ea ducînd la determinarea lui β_e.

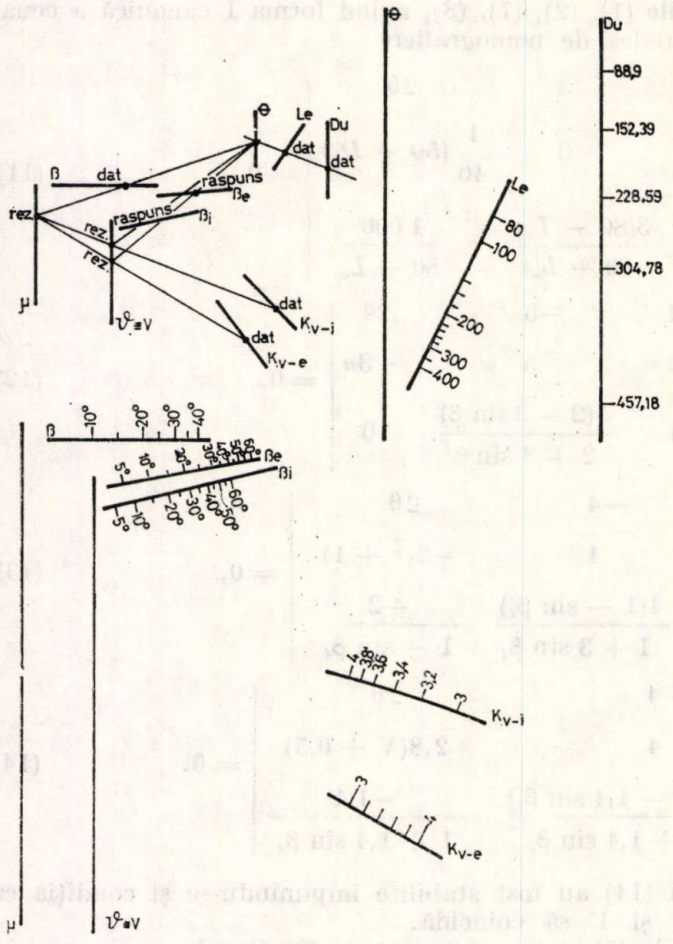


Fig. 3. — Nomogramă compusă pentru determinarea unghiurilor de înclinare de divizare exterior şi interior ale dintelui unei roţi dinţate conice, cu dantură circulară, de înălţime constantă.

Ecuaţiile parametrice ale suporturilor scărilor (K_{v-i}) şi (K_{v-e}) sînt:

(K_{v-i})

$$x = -\frac{2f(K_v) + 3}{3 - 2f(K_v)},$$

$$y = \frac{-6[g(K_v) + 1]}{3 - 2f(K_v)}; \tag{17}$$

(K_{v-e})

$$x = -\frac{3 + 2{,}8\,F(K_v)}{3 - 2{,}8\,F(K_v)},$$

$$y = \frac{-84[G(K_v) + 0{,}5]}{3 - 2{,}8\,F(K_v)}. \tag{18}$$

Eliminînd pe K_v din relaţiile (17) se obţine pentru suportul scării (K_{v-i}) ecuaţia:

$$3x^2 - 8xy - 18x - 16y - 21 = 0 \tag{19}$$

şi deci, suportul scării (K_{v-i}) este un arc de hiperbolă. Pentru suportul scării (K_{v-e}) se obţine în mod analog ecuaţia:

$$69x^2 - 140\,xy - 1038\,x + 140y + 69 = 0, \tag{20}$$

suportul scării (K_{v-e}) fiind de asemenea, un arc de hiperbolă.

În baza ecuaţiilor de mai sus, a fost întocmită nomograma de calcul prezentată în figura 3.

CONCLUZII

Metoda grafică utilizată este expeditivă, ea ducînd uşor la determinarea unghiurilor de înclinare de divizare exterior şi interior ale danturii roţilor dinţate conice cu dantură circulară.

Nomograma construită permite, în cazul cunoaşterii unghiurilor β_i sau β_e, determinarea altor mărimi, ca de pildă K_v, ceea ce ar duce, conform relaţiilor (1) şi (2), la rezolvarea unor ecuaţii de grad superior.

Primită la redacţie la 20 ianuarie 1982

BIBLIOGRAFIE

1. I. LĂZĂRESCU, *Calculul şi construcţia sculelor aşchietoare*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1961.
2. L. SAUER, *Scule pentru danturare*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1962.
3. H. BODNĂRESCU, R. BODNĂRESCU, T. GHEORGHIAN, N. URECHE, *Geometrie descriptivă şi desen tehnic*, Ploieşti, Institutul de petrol şi gaze, 1979.
4. G. HENRIOT, *Traité théoretique et practique des angrénages*, Dunod, Paris, 1960.
5. L. SAUER, ş.a. *Angrénage*, Vol. I şi II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1970.

O MANIFESTARE ŞTIINŢIFICĂ ÎN FAVOAREA PĂCII

Poziţia constructivă a ţării noastre în politica externă şi iniţiativele ei în vederea soluţionării marilor probleme cu care este confruntată lumea contemporană îşi găsesc un ecou corespunzător în activitatea oamenilor de ştiinţă din România. Este cunoscut apelul lansat de Comitetul Naţional Român „Oamenii de ştiinţă şi pacea" care s-a bucurat de o primire favorabilă pretutindeni.

În continuarea acestor manifestări, sub egida aceluiaşi comitet s-a desfăşurat la Bucureşti simpozionul cu tema „Civilizaţie, umanism, pace, dezarmare, securitate internaţională". Organizarea acestui simpozion a revenit Academiei Republicii Socialiste România, Academiei de Ştiinţe Sociale şi Politice, Academiei de Ştiinţe Medicale, precum şi unor institute centrale.

Cuvîntul de deschidere a fost rostit de prof. dr. doc. Mihnea Gheorghiu, preşedintele Academiei de Ştiinţe Sociale şi Politice, membru al Biroului Executiv al Comitetului Naţional Român „Oamenii de ştiinţă şi pacea", care a insistat asupra răspunderii deosebite ce revine în prezent oamenilor de ştiinţă români şi de pretutindeni faţă de popoarele lor şi de viitorul civilizaţiei umane. Această răspundere se extinde asupra problemelor stringente ale lumii contemporane care sînt eliberarea de povara cheltuielilor pentru înarmare, evitarea cursei spre dezastrul unui război nuclear, salvgardarea şi consolidarea păcii. Adresînd sesiunii speciale a Organizaţiei Naţiunilor Unite consacrată dezarmării Apelul său, poporul român şi-a manifestat cu hotărîre voinţa de pace. Semnînd acest apel, cetăţenii României au dat dovadă de o înaltă conştiinţă a datoriei faţă de prezentul şi viitorul patriei lor, faţă de destinele întregii omeniri.

În cadrul simpozionului au mai luat cuvîntul prof. dr. ing. Mihai Drăgănescu, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, directorul Institutului Central de informatică, acad. Emil Condurachi, secretar general al Asociaţiei de studii sud-est europene, acad. C. I. Gulian, preşedintele Secţiei de ştiinţe filozofice, psihologice şi juridice a Academiei Republicii Socialiste România, prof. dr. doc. şt. Ioan Ceterchi, vicepreşedinte al Academiei de Ştiinţe Sociale şi Politice, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România, prof. dr. Dumitru Ghişe, preşedintele Secţiei de filozofie şi logică a Academiei de Ştiinţe Sociale şi Politice, prorector al Academiei „Ştefan Gheorghiu", şi prof. dr. Emil Măgureanu, secretar al Academiei de Şiinţe Medicale.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 41, NR. 6, 1982, P. 721–722

În toate luările de cuvînt a fost scos în evidență caracterul activ, umanist al politicii externe a României. A fost subliniat prestigiul internațional al promotorului acestei politici, președintele Nicolae Ceaușescu, în a cărui concepție toți oamenii au ca drept suprem pe acela la o viață pașnică, de prietenie și colaborare între popoare. Activitatea Comitetului Național Român „Oamenii de știință și pacea", prezidat de academician doctor inginer Elena Ceaușescu, a fost evidențiată, vorbitorii exprimîndu-și deplina adeziune la documentul transmis de delegația noastră forului internațional de la New York. A fost exprimată convingerea că opinia publică ce reprezintă glasul popoarelor lumii și se exprimă tot mai ferm pretutindeni, nu va fi ignorată de conducătorii tuturor statelor și guvernelor. S-a exprimat speranța că voința de a trăi în pace a popoarelor va fi respectată și că se va ajunge la eliminarea definitivă a războiului din istoria omenirii, acesta reprezentînd în civilizația contemporană un tragic anacronism. În felul acesta, puterea creatoare a științei va putea fi utilizată exclusiv în scopuri pașnice și va servi progresului, prosperității și cooperării între națiuni.

Această manifestare, în cadrul căreia au fost subliniate cu tărie nobilele principii ale politicii externe a țării noastre a avut loc în aula Academiei Republicii Socialiste România. La ea au participat academicieni, conducători de institute de cercetare, cadre didactice, alți oameni de știință, activiști de partid și de stat și un numeros public.

T. Oroveanu

RECENZII

V. SAWARAGI, T. SOEDA, S. OMATU, Modelling, Estimation, and Their Applications for Distributed Parameter Systems (Modelare, estimare și aplicațiile lor pentru sisteme discrete), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978, 269 pag.

În ultimul timp problemele de estimare și control stohastice a comportării dinamice a sistemelor au căpătat o mare dezvoltare teoretică, fiind legate de o serie de aspecte practice importante ca, de exemplu, obținerea unei aproximații pentru răspunsul sistemului din observații afectate de perturbații aleatoare (zgomot) sau determinarea intrărilor unui sistem astfel încît să se obțină performanțele dorite (rezistență maximă, consum minim de carburant etc), în ciuda prezenței perturbațiilor aleatoare.

Aspectele tratate în lucrarea recenzată se înscriu în cadrul problemei generale de estimare și control a sistemelor discrete. Sistemele fizice considerate au două tipuri de intrări : intrări care pot fi controlate (deterministe) și intrări care reflectă prezența în sistem și în mediul înconjurător a unor perturbații aleatoare.

Lucrarea cuprinde trei părți mari. Prima parte este dedicată aspectelor matematice, terminologiei și conceptelor necesare înțelegerii problemelor de estimare și control a sistemelor stohastice discrete. Partea a doua se ocupă de estimarea optimală a sistemelor liniare discrete, iar partea a treia de controlul optimal al acestor sisteme.

În prima parte (capitolul 2) sînt date elementele de bază ale teoriei probabilităților în spații Hilbert, cu un accent deosebit asupra integralelor și ecuațiilor diferențiale stohastice de tip Itô. În partea a doua (capitolele 3, 4, 5) este prezentată deducerea estimatorilor optimali pentru problemele de filtrare, netezire și predicție, sînt tratate problemele de existență a acestor estimatori și sînt abordate unele aspecte privind plasarea optimală a sensorilor utilizați în măsurarea parametrilor răspunsului sistemelor. În capitolul 6 sînt considerate probleme de control stohastic optimal în spații Hilbert, atît pentru intrările distribuite spațial, cît și pentru cele de pe frontieră.

Lucrarea este foarte bine structurată și conține elementele esențiale pentru aprofundarea aspectelor fundamentale ale problemelor de estimare și control a sistemelor stohastice discrete. Exemplele numerice prezentate ilustrează în mod util aceste aspecte, contribuind la o mai bună înțelegere a lor.

Lucrarea a fost întocmită pe baza unui bogat material documentar, conținînd 68 referințe bibliografice de dată recentă, dintre care cea mai mare parte au fost elaborate de autori.

Lucrarea prezintă un deosebit interes pentru cercetătorii (cu solide cunoștințe matematicei care lucrează în domeniul optimizării comportării dinamice a sistemelor cu perturbații aleatoare (procese industriale, echipamente electronice, structuri aerospațiale, autovehicule etc.).

T. Sireteanu

Senkrechtstarttechnik (Tehnica decolării și aterizării verticale), de X. Hafer și G. Sachs, Springer-Verlag, Berlin—Heildelberg—New York, 1982

Prezenta lucrare are ca obiect problema dezvoltării sistemelor și a tehnicii decolării și a aterizării verticale (denumită în terminologia engleză Vertical Take-Off and Landing „VTOL"), care, aplicată avioanelor convenționale, realizează combinarea performanțelor lor normale de zbor cu posibilitatea decolării și a aterizării verticale.

Scopul cărții este să dea o privire generală atît asupra dezvoltării tehnicii VTOL de la începutul ei, din anii 50, pînă-n prezent, făcînd totodată o descriere a soluțiilor constructive utilizate în diferite etape ale dezvoltării, cît și asupra bazelor teoretice din aerodinamica și mecanica zborului în regimul VTOL, cu arătarea aplicării lor practice la diferite realizări tehnice.

Materialul prezentat este deosebit de valoros datorită folosirii de către autori a experienței lor de colaborare cu industria aeronautică și cu instituțiile de învățămînt superior. Dezvoltarea în ultimul deceniu în R.F.G. a tehnicii VTOL a permis autorilor să realizeze prezenta lucrare de sinteză.

Lucrarea conține următoarele capitole :

1. *Considerații generale și trecerea în revistă a dezvoltării tehnicii VTOL*, în care sînt prezentate problemele speciale ale tehnicii VTOL și sistemele VTOL cu jet de gaze și cu elice, proiectele cu soluțiile constructive ale avicanelor VTOL de transport.

2. *Sisteme de acționare VTOL*, în care se fac considerații asupra alegerii mecanismului de acționare și se descriu sistemele principale VTOL moderne cu jet și suflantă, cu rotor și elici.

3. *Producerea forțelor și momentelor ale comenzilor de zbor*, în care se face prezentarea sistemelor cu jet și suflantă sau acționărilor cu elice pentru producerea forțelor și a momentelor de comandă pentru manevrarea avionului în regimul VTOL.

4. *Dinamica zborului în suspendare*, capitolul în care sînt prezentate bazelor dinamicii zborului în regimul VTOL și în regimul de zbor de mișcarea longitudinală și laterală, problemele speciale ale regimului de suspendare.

5. *Influența solului*, capitolul care cuprinde paragrafele despre efectul solului în regim de zbor vertical (în suspendare) la decolare verticală cu elici, influența efectului solului asupra mecanicii zborului.

6. *Zbor de tranziție*, unde se prezintă problemele zborului de tranziție de la vertical la normal în cazul acționării cu jet de gaze și cu elice, considerații asupra stabilității avionului în regim de tranziție.

7. *Linii directoare pentru cerințele referitoare la proprietăți de zbor ale avioanelor VTOL*, capitol în care se face prezentarea diferitelor cerințe referitoare la performanțele de zbor ale avioanelor VTOL, conform normelor AGARD și MIL.

8. *Probleme speciale de dezvoltare și considerații de viitor*, unde se discută probleme referitoare la bilanțul energetic al zborului vertical, efectul zborului în regim VTOL asupra economiei transportului aerian, securitatea zborului și a zgomotului.

Cartea a apărut într-o formă simplă, în seria textelor pentru învățămîntul superior (Hochschultexte) a editurii Springer, dar conținutul ei depășește cerințele didactice ale învățămîntului superior de specialitate ; datorită acestui fapt ea va fi deosebit de folositoare nu numai studenților, dar și inginerilor și cercetătorilor care se ocupă de problemele legate de tehnica VTOL, avînd o valoare practică incontestabilă.

G. V. Vasiliev

ELEMENTARE SCHALENSTATIK (Statica elementară a învelișurilor) de Alf Pflüger, ed. a 5-a, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1981.

În lucrare se face o expunere concisă a bazelor teoriei învelișurilor. Sînt dezvoltate teoria de membrană și teoria încovoierii învelișurilor elastice subțiri. Deși dezvoltarea în ultimele decenii a materialelor de analiză tensorială, precum și pătrunderea cît mai largă a metodei elementului finit la calculul structurilor au atras după sine modificări importante în teoria învelișurilor, autorul a căutat să păstreze și în prezenta ediție conceptul teoretic inițial, utilizat în edițiile anterioare, fiind cel mai potrivit pentru scopurile didactice datorită unei reprezentări simple și clare a relațiilor de bază și a jocului de forțe spațial care apare la învelișuri solicitate. Acest mod de prezentare este deosebit de sugestiv pentru înțelegerea fenomenului fizic în sine, fiind util de aceea tocmai în cazul aplicării metodelor de analiză moderne — a studiilor teoretice în formulare tensorială și a metodei elementului finit, la calculul stării de solicitare a învelișurilor.

Lucrarea este împărțită în șapte capitole și o anexă, unde sînt tratate următoarele probleme :

Capitolul I constituie *introducerea*, unde sînt expuse bazele calculului referitor la geometria învelișului, premisele și ipotezele inițiale de calcul.

În capitolul II se fundamentează *teoria de membrană a învelișurilor de revoluție*, cu aplicație la construcții de cupole (de formă sferică și conică) și la rezervoare constituite din elemente sferice și cilindrice sau avînd alte forme caracteristice (rezervoare de tipuri Barkhausen și Intze, rezervoare echirezistente).

În capitolul III, consacrat *teoriei de încovoiere a învelișurilor de revoluție sub acțiunea unei sarcini axial simetrice*, după deducerea relațiilor de echilibru și a relațiilor dintre eforturi,

sînt tratate problemele privind învelişuri cilindrice circulare şi sînt deduse soluţiile aproximative pentru învelişuri de revoluţie oarecare.

Capitolul IV conţine *teoria de membrană a învelişurilor cilindrice*, în cadrul căreia se deduc relaţiile referitoare la starea de solicitare a învelişurilor cilindrice circulare sub acţiunea greutăţii proprii avînd axa perpendiculară pe direcţia sarcinii, precum şi starea de solicitare a învelişurilor cilindrice de formă oarecare.

În capitolul V este tratată *teoria de membrană a învelişurilor de formă oarecare*, care cuprinde : relaţiile geometrice şi de echilibru, deducerea ecuaţiilor diferenţiale şi o aplicaţie cu referire la problema calculului învelişurilor în formă de paraboloid hiperbolic sub acţiunea greutăţii zăpezii.

În capitolul VI sînt discutate unele *particularităţi ale stării de solicitare* ale învelişurilor subţiri, calculul tensiunilor în raport cu eforturile globale din secţiunile învelişului, precum şi dependenţa stării de solicitare de direcţia axelor de referinţă din înveliş.

Capitolul VII cuprinde *bibliografia* utilizată.

În capitolul VIII este *anexa* la lucrare, care cuprinde în forma tabelară rezumatul soluţiilor şi formulelor eforturilor şi deformaţiilor pentru învelişuri de diferite forme sub acţiunea unor tipuri caracteristice de sarcini, deduse în baza teoriilor tratate în capitolele precedente.

Avînd o ţinută tehnico-ştiinţifică superioară, cartea cuprinde materialul corespunzător programei ultimelor semestre, predat la universităţile şi şcoliile superioare tehnice, la cursurile de mecanică a construcţiilor şi construcţii de maşini. Ea poate fi utilă atît studenţilor cursurilor superioare, cît şi inginerilor şi cercetătorilor care se ocupă de problemele calculului învelişurilor subţiri în domeniul construcţiilor civile şi industriale, al construcţiei de maşini şi al structurilor aeronautice. Pentru scopurile practice sînt deosebit de utile tabelele de rezultate cuprinse în anexă.

G. V. Vasiliev

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 41 1982

INDEX ALFABETIC

AMZA, GHEORGHE, NICOLAE CONSTANTIN, Cercetări privind influenţa energiei ultrasonore asupra rezistenţei la oboseală a pieselor prelucrate prin deformare plastică a stratului superficial în cîmp ultrasonor 4 490

ANTONESCU, N. N., H. BODNĂRESCU, E. VOICU, L. RIZEA, N. GRIGORE, Calculul grafic al unghiurilor de înclinare de divizare al danturilor conice circulare 6 715

ATANASIU, A., C. I. IONESCU, ZOE ATANASIU, Cercetări privind prelucrabilitatea prin aşchiere la strunjirea aliajelor de aluminiu deformabile 5 610

ATANASIU, ZOE v. ATANASIU, A. 5 610

BADEA, OVIDIU, VICTOR HOFFMANN, MIRCEA LUPU, Studiul cîmpului de temperaturi în cazul unei mişcări nestaţionare a fluidelor vîscoase . . 2 189

BAGNARU, D. v. BUCULEI, M. 2 255

BERBENTEA, I., O analogie elastico-relativistă 2 317

BODNĂRESCU, H. v. ANTONESCU, N. N. 6 715

BUCULEI, M., D. BAGNARU, Vibraţiile elementelor cinematice rectilinii cu proprietăţi vîscoelastice, ale mecanismelor plane 2 255

BUCULEI, M., D. MARGHITU, Vibraţii neliniare ale elementelor cinematice nerectilinii ale mecanismelor plane 6 659

CANŢĂ, TR. v. VASILIU, GH. 1 125

CHIŢU-MILITARU, P. v. PETRE, N. 6 687

CHIUJDEA, V., I. ROŞU, Determinarea profilului teoretic al electrodului sculă la prelucrarea electrochimică a pieselor de configuraţie complexă . . . 5 578

CONSTANTIN, N. v. AMZA, GH. 4 490

CONSTANTINESCU, N. I., Studiul vibraţiilor transversale şi longitudinale ale cablurilor de compensare la instalaţiile de extracţie 5 561

CRĂCIUN, C., D. HOMENTCOVSCHI, Soluţii ale problemei la limită cu racordări pentru viteze în curgerea stratificată prin conducta circulară. I . . 6 635

CĂPITANU, LUCIAN, Instalaţie pentru oxidarea pulberii de wolfram 3 427

CĂPITANU, LUCIAN, Instalaţie de granulare pentru oxid de wolfram 4 514

DOBRE, G., Cu privire la influenţa unor elemente de geometrie asupra rigidităţii danturii în cazul angrenajelor paralele cilindrice cu dinţi drepţi în evolventă 1 157

DUMBRAVĂ, M. A., Considerarea efectului hidrodinamic în optimizarea funcţională a lagărelor hidrostatice 3 419

ERHAN, M. v. SETEANU, I. 3 387

GLOD, FLORICA, Mişcarea bidimensională a unui fluid ideal de adîncime finită, datorită unei perturbaţii produse la suprafaţa sa 1 17

GLOD, FLORICA, Mişcarea axial simetrică a unui fluid ideal de adîncime finită, datorită unei perturbaţii produse la suprafaţa sa 2 199

GRIGORE, N. v. ANTONESCU, N. N. 6 715

HOFFMANN, V. v. BADEA, O. 2 189

HOMENTCOVSCHI, D. v. CRĂCIUN, C. 6 635
IONESCU, C. I. v. ATANASIU, A. 5 610
LARIONESCU, D., Rezolvarea sistemelor de ecuaţii neliniare ce intervin în probleme de proiectare a mecanismelor plane cu cuple inferioare 4 435
MARGHITU, D. v. BUCULEI, M. 6 659
MARINESCU, AL., Intrarea optimă tridimensională ricoşantă cu încălzire minimă a vehiculului 1 39
MOMANU, GH., Calculul plăcilor circulare rezemate pe medii elastice 1 83
MUSCOLINO, G. v. POTERAŞU, V. FL. 2 267
NEAMŢU, M. v. TEODORESCU-ŢINTEA, C. 5 521
NGUYEN BA PHUONG, M. V., SOARE, Influenţa problemelor de montaj la proiectarea structurilor reticulate planare 2 293
OBLEMENCO, GH. v. SOARE, M. V. 3 403
ONU, G., Includerea efectului forţei tăietoare în matricele elementului de grindă dreaptă 4 459
OROVEANU, T., B. SIRO, Unele probleme de optim privind secţionarea zonelor de amestec în cazul transportului succesiv de produse petroliere . . . 2 207
OROVEANU, T., B. SIRO, Asupra caracteristicii hidraulice ($H-Q$) şi a influenţelor presiunii şi temperaturii în pomparea succesivă de produse petroliere 3 366
PANTAZOPOL, D. v. TEODORESCU-ŢINTEA, C. 5 521
PASCOVICI, M. D., Studiul filmului de lubrifiant extrudat în condiţii elastohidrodinamice 1 139
PETCU, D. GH., C. GH. POPA, O nouă metodă numerică pentru soluţionarea problemei curgerii nestaţionare bidimensionale ($x-y$), bifazice (apă-ţiţei), prin medii poroase 3 349
PETRE, N., P. CHIŢU-MILITARU, Studiul cinematic al unităţilor de pompare pe calculatoare numerice 6 687
POPA, AL., Aspecte ale cinematicii mişcării plan-paralele a rigidului privind generalizarea cercurilor lui Bresse 6 667
POPA, C. GH., v. PETCU, D. GH. 3 349
POPA, G. D., Placă încastrată pe contur, rigidizată cu grinzi prinse continuu şi dispuse pe o direcţie 1 53
POPESCU, MIHAI, Studiul traiectoriilor optime ale reintrării în atmosferă pentru vehicule spaţiale portante 2 171
POPESCU, MIHAIL, Calculul rezonanţei hidraulice la uzine hidroelectrice. I 1 23
POPESCU, MIHAIL, Calculul rezonanţei hidraulice la uzine hidroelectrice. II 2 233
POPESCU, MIHAIL, Rezultate experimentale în studiul mişcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune. I 4 443
POPESCU, MIHAIL, Rezultate experimentale în studiul mişcărilor nepermanente din sistemele hidraulice sub presiune. II 5 595
POTERAŞU, V. FL., D. VIERU, G. MUSCOLINO, Unicitatea identificării matricelor de rigiditate şi amortizare la structurile în cadre acţionate seismic 2 267
PRIŞCU, RADU, D. STEMATIU, C. STERE, Asupra siguranţei barajului Râuşor 2 283
PĂRĂIAN, S. v. SIRETEANU, T. 1 95
RADU, V. v. SETEANU, I. 3 387
RAŞEEV, D. v. ULMANU, V. 5
RĂDUICĂ, N., M. V. SOARE, Contribuţii la calculul cupolelor reticulate . . 6 675
RIZEA, L. v. ANTONESCU, N. N. 6 715
SETEANU, I., M. ERHAN, Tranzitul undelor de viitură în albii deschise cu inflitraţii laterale. 1 3
SETEANU, I., V. RADU, M. ERHAN, Influenţa paletajului rotoric asupra desprinderii stratului limită la grupurile bulb reversibile 3 387
SIRETEANU, T., Suspensii cu performanţe îmbunătăţite 2 321
SIRETEANU, T., S. PĂRĂIAN, I. ROŞU, Metode spectrale în dinamica autovehiculelor. 1 95
SIRO, B. v. OROVEANU, T. 2 207
SIRO, B. v. OROVEANU, T. 3 366
SOARE, M. V., GH. OBLEMENCO, Influenţa condiţiilor de rezemare asupra stării de eforturi şi de deformaţii într-o structură planar-pătrată diagonală 3 403
SOARE, M. V. v. NGUYEN BA PHUONG 2 293
SOARE, M. V. v. RĂDUICĂ, N. 6 675

SPULBER, C. v. SPULBER, I. 2 331
SPULBER, I., C. SPULBER, Procedeu de rectificare a alezajelor 2 331
STEMATIU, D. v. PRIŞCU, R. 2 283
STERE, C. v. PRIŞCU, R. 2 283
SUNGURŢEV, I. V., Asupra unei metode de calcul a funcţiei lui Ciaplîghin 6 654
ŞTEFĂNESCU, D.-M., Instalaţie pentru măsurarea mobilităţii şi impedanţei mecanice 4 501
TEODORESCU-ŢINTEA, C., D. PANTAZOPOL, M. NEAMŢU, Savantul şi profesorul Elie Carafoli 5 521
TRUICĂ, N., Un algoritm pentru analiza şi sinteza pe calculator a parametrilor geometrici ai roţilor-faţă cu suspensie independentă de la automobile. Analiza parametrilor roţilor-faţă de la Dacia 1300 . . . . . 1 109
TUDOR, A., Asupra distribuţiei temperaturii cauzate de frecare în dantura roţilor dinţate lubrefiate cu uleiuri minerale aditive 1 147
ULMANU, V., D. RAŞEEV, Cercetări privind capacitatea portantă a îmbinărilor filetate cu umăr pentru garnitura de foraj 5 529
VASILESCU, Ş., Influenţa forţei tăietoare asupra deformatelor statice ale barelor drepte. 4 470
VASILIU, CH., Variaţia coeficientului de aderenţă şi determinarea vitezei autovehiculelor după urmele de frînare 5 545
VASILIU, GH., TR. CANŢĂ, Influenţa eficacităţii frînelor asupra parametrilor capacităţii maxime de frînare a autovehiculelor. 1 125
VIERU, D. v. POTERAŞU, V. FL. 2 267
VOICU, E. v. ANTONESCU, N. N. 6 715

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosfera rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul al maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

*

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 1.